

연소 반응을 가지는 후류 유동의 불안정성

신동신*, 홍성제**

Stability Analysis of Wakes with Chemical Reaction

D. S. Shin* and S. J. Hong**

ABSTRACT

This paper investigates the linear stability of wakes with special emphasis on the effect of chemical reaction. Velocity and density profiles for laminar flows are obtained from analytic profiles as well as from simulation. Wakes have two generalized inflection points and two unstable modes—sinuous and varicose modes. For analytical laminar profiles, sinuous modes are more unstable than varicose modes irrespective of density variation, which shows wakes will be destabilized by sinuous modes. Large velocity difference and density difference lead to more unstable wakes due to large momentum difference. For simulated laminar profiles, chemical reaction with stoichiometric chemistry increases temperature and stabilizes the flow due to increase in viscosity. In compressible reacting wakes, flow becomes stable as velocity increases due to viscous dissipation.

초 록

연소 반응을 가지는 비압축성 및 압축성 후류유동에 대하여 선형 불안정성 해석을 수행하였다. 기본유동의 속도장 및 온도장은 해석적 함수 및 연소 반응을 포함하는 유동 계산의 결과를 사용하였다. 후류유동은 두 개의 변곡점을 가지며 sinuous mode와 varicose mode의 두 개의 불안정성 모드가 존재한다. 후류유동에서는 sinuous 모드가 varicose 모드보다 더 불안정하여 자유 유동에 가까운 위상 속도를 가지는 sinuous 모드에 의해 지배된다. 해석적 함수의 형태를 가지는 후류 유동의 경우 속도구배가 클수록, 밀도 구배가 클수록 운동량의 차이가 커지므로 더욱 불안정하여진다. 계산되어 일관된 유동장과 온도장을 사용한 비압축성과 압축성 후류유동의 경우 모두 완전연소에 가까울수록 유동장의 온도가 증가하고 유체의 점성의 증가로 유동이 안정되어진다. 압축성 후류유동의 경우에는 유속이 증가함에 따라 점성소산에 의한 열 발생으로 유동이 안정되는 경향을 보인다.

* 홍익대학교 기계공학과(Hong Ik University, Dept. of Mechanical Engineering)

** 홍익대학교 대학원(Hong IK University, Graduate School)

1. 서 론

화학반응에 의한 밀도구배를 가지는 후류(wake)는 가스터빈 연소실의 flame holder 등에서 발생한다. 후류유동의 안정성 혹은 불안정성은 이러한 유동에 있어서 많은 영향을 끼치므로 상당히 중요하다. 이의 해석방법 중의 하나인 선형 불안정성 해석은 다른 수치해석에 비하여 빠르고 경제적으로 수행할 수 있으며, 직접수치해석과 같은 복잡한 수치해석에 필요한 정보나 조건을 제공할 수 있어 국외에서는 학계뿐 아니라 산업계에서도 많이 사용하고 있다. 또한 선형 불안정성 연구는 난류 자유 전단층 유동에 존재하는 large coherent structure의 특성을 정확하게 예측할 수 있어¹⁾ 난류의 중요한 특성을 예측하는데에도 많은 도움을 주고 있다. 본 연구는 이러한 선형 불안정성 해석을 통하여 후류유동의 물리적인 현상을 이해하기 위한 것이다.

비압축성 및 압축성 전단층, 특히 혼합층의 불안정성 연구는 국외에서는 상당히 연구가 진행되어 왔다. 비압축성 혼합층에서 변곡점(inflexion point)이 존재할 경우 유동이 불안정하다는 것을 처음으로 보인 것은 Rayleigh²⁾이었다. Rayleigh는 연속한 속도장을 가지는 혼합층에 대해 비점성 평행 선형 불안정성 해석을 수행하였다. Michalke³⁾는 비압축성 혼합층에서 하이퍼볼릭 탄젠트 함수를 사용하여 시간 및 공간에 대한 교란의 불안정성에 대하여 연구하였다. 화학반응에 의한 밀도구배가 존재하는 혼합층에 대하여 Menon⁴⁾ 등은 비점성 압축성 불안정성 방정식을 유도하여 예혼합되어진 초음속 반응혼합층에 적용하였다. Trouve⁵⁾와 Candel⁶⁾은 램젯(ram-jet) 연소기내의 흡입젯의 불안정성을 연구하여 밀도구배가 불안정성에 큰 영향을 미친다는 것을 알아내었다. Shin 과 Ferziger⁶⁾는 화학반응을 포함하는 경계층 방정식으로부터 구한 기본 유동을 사용하여 반응혼합층의 불안정성을 해석하였다. 그들은 상당한 연소열이 존재하는 경우 일반 변곡점에 기인하는 바깥모드가 비압축성 반응혼합층에 존재하는 것을 알아내었다.

이상과 같이 비압축성 및 압축성 반응혼합층에 대하여는 불안정성 해석 및 실험을 통하여 많은 연구가 진행되었으나 연소열 등에 의하여 생기는 밀도구

배가 존재하는 후류유동에 대하여는 그다지 연구가 진행되지 않은 상태이다. 따라서 본 연구는 밀도구배를 가지는 후류유동에 있어서 속도변화 및 밀도의 변화가 있는 경우에 대하여 불안정성 해석을 수행하였다.

2. 교란 방정식과 기본 유동

2.1 지배 방정식 및 수치해법

자유전단층에서 점성은 유동장을 안정시키는 역할을 하므로 본 연구에서는 비점성 안정성 해석을 수행하였다. 지배 방정식은 Navier-Stokes 방정식에서 점성항을 제외한 Euler 방정식을 고려하였다. 교란방정식 자체에 있어서 화학반응의 효과는 무시할 수 있으므로⁶⁾ 화학반응은 충류유동을 구하는 경우에 대하여만 고려하였다. 충류유동의 압력은 일정하다고 가정한다. 질량, 운동량 보존식과 이상기체 방정식에서의 모든 변수들은 자유유동의 변수들 및 초기 속도분포의 vorticity thickness로 무차원화하면, 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = - (\gamma - 1) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$1 = \rho I \quad (4)$$

여기서, ρ , u_i , T 는 밀도, 속도 및 온도를 나타낸다. 교란 방정식을 유도하기 위해서 충류 유동이 평행하여 유동 방향에 수직한 방향의 구배만이 존재한다고 가정한다. 충류 유동의 속도, 밀도, 온도가 모두 지정되어야만 유동의 안정성을 해석할 수가 있다. 모든 변수들은 충류 유동의 값과 움직이는 과정의 형태를 가지는 작은 교란의 합으로 생각될 수가 있다.

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(y) + f(x, y, z, t) \quad (5)$$

$$f'(x, y, z, t) = \hat{f}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)] \quad (6)$$

$\bar{f}(y)$ 는 총류 유동의 값이며, \hat{f} 는 오직 y 만의 고유 함수이다. 여기서 α 와 β 는 x 와 z 방향의 파동수를 나타내고, 주파수(frequency), ω 와 복소파장속도(Complex wave velocity), c 와는 $\omega = c\alpha$ 의 관계를 가진다. α 와 ω 는 시간 안정성 해석 및 공간 안정성 해석에 따라서 각각 실수와 복소수의 형태를 갖는다. 시간 안정성에 대한 해석인 경우 ω 는 복소수의 형태를 가지며, α 는 실수의 형태를 갖고, 공간 안정성에 관한 해석이면 α 가 복소수의 형태를 가지며, ω 는 실수의 형태를 가지게 된다. 각각의 성장율(amplification rates)은 ω_i 와 $-\alpha_i$ 가 된다. 본 연구에서는 실제 현상에 직접 적용할 수 있는 공간적 안정성해석을 고려하였다.

식 (5)와 (6)을 식 (1), (2), (3) 및 (4)에 대입하고, 교란의 곱을 무시하면 다음과 같은 압력에 대한 교란방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{p}'' - \left\{ \frac{2\alpha \bar{u}'}{(\alpha u - \omega)} + \frac{\bar{\rho}}{T} (\alpha \bar{u} - \omega)^2 [RXM] \right\} \hat{p}' \\ - [(a^2 + \beta^2) - \gamma M_1^2 (\alpha \bar{u} - \omega)^2 \times \\ \left\{ \frac{1}{T} + \frac{\bar{\rho}}{T} [RXN2] \right\}] \hat{p} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 ' $'$ 은 y 에 대한 미분을 나타내며, $[RXM]$ 과 $[RXN2]$ 는 화학반응과 압축성에 의한 밀도변화에 따른 영향을 나타내는 항이다. 위의 식은 밀도변화가 없는 경우 Rayleigh 방정식⁽²⁾이 된다.

경계조건은 위의 교란방정식의 경계에서의 극한값을 고려함으로써 구한다. $y \rightarrow \pm\infty$ 일 때 \bar{u}' 과 $[RXM]$ 은 무시할 수 있으며, $[RXN2]$ 는 $-\bar{T}(\gamma-1)/\gamma$ 이 되므로, 식 (7)은 다음과 같이 된다.

$$\hat{p}'' - q^2 \hat{p} = 0 \quad (8)$$

$$q^2 = (a^2 + \beta^2) - \frac{M_1^2}{T} (\alpha \bar{u} - \omega)^2 \quad (9)$$

$y \rightarrow \pm\infty$ 일 때 압력의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y \rightarrow -\infty \text{ 일 때} & \quad \hat{p} \rightarrow \exp(qy) \\ y \rightarrow \infty \text{ 일 때} & \quad \hat{p} \rightarrow \exp(-qy) \end{aligned} \quad (10)$$

위의 문제는 고유치 문제가 되므로 shooting 법과 Newton-Raphson 법에 근거를 두는 반복법을 사용하여 풀도록 한다. 우선 고유치를 가정한 뒤, 가정된 고유치로부터 경계조건을 구한다. 위의 상미분방정식을 양쪽 경계로부터 중심($y=0$)까지 적분한 후, 양쪽 경계로부터 적분되어 구해진 \hat{p} 와 \hat{p}' 의 값을 비교하여 수렴여부를 결정한다. 모든 고유함수들은 \hat{u} 의 최대절대값이 1이 되도록 표준화 하였다.

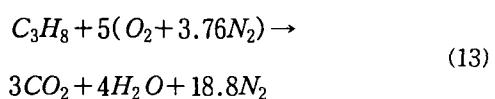
2.2 기본 유동

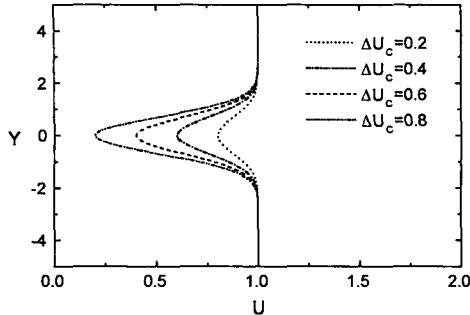
불안정성 해석을 수행하는 기본 유동의 속도장 및 온도장은 불안정성 해석을 수행하는 기본 유동의 속도장 및 온도장은 비압축성의 경우 우선 다음과 같이 Gaussian Profile로 가정하였다.

$$\bar{u} = 1 - \Delta u_c e^{-y^2} \quad (11)$$

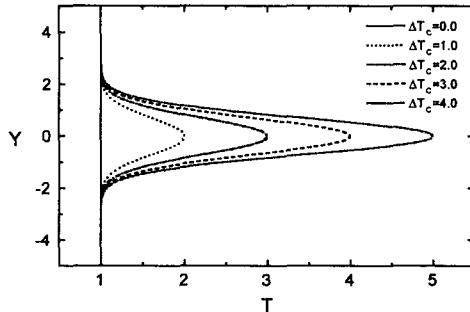
$$\bar{T} = 1 + \Delta T_c e^{-y^2} \quad (12)$$

여기서, Δu_c 는 자유유동과 후류의 중심선에서 속도의 차이를 나타내는 값으로 0.2, 0.4, 0.6, 0.8의 경우를 고려하였고, ΔT_c 는 자유유동과 후류의 중심선에서의 온도와의 차이로 0, 1, 2, 3, 4의 경우를 고려하였다. 밀도는 무차원화된 이상기체의 방정식(식 (4))으로부터 구하였다. Fig. 1에 속도장 및 온도장을 표시하였다. 위의 해석적 함수를 사용함과 동시에 연소반응을 포함하는 유동장을 보다 정확히 구하기 위하여 STAR-CD⁽⁷⁾를 사용하였다. 연소반응을 포함하는 유동장을 구할 때에는 해석상 편의를 위해 예온합물질은 이상기체로, 화학반응은 아래와 같은 1 단계의 비가역반응으로 가정하였으며, 반응열로 인한 부력의 효과는 무시하였다.





(a)



(b)

Fig. 1. Gaussian mean velocity and temperature profiles.

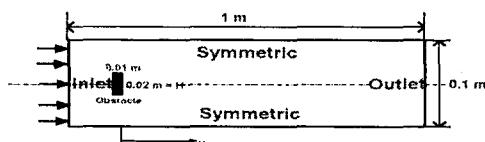
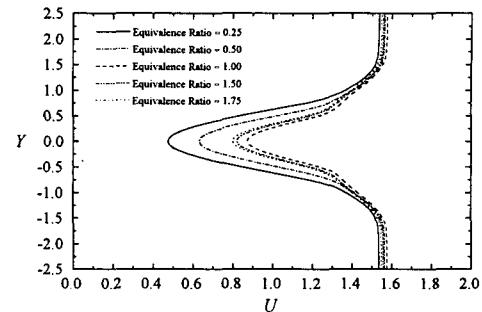


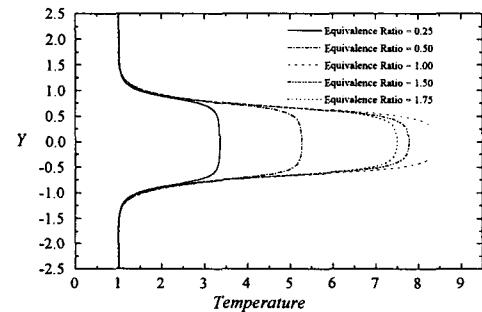
Fig. 2. Geometry for combustor.

Fig. 2는 해석대상인 단순화된 가스터빈 연소기의 형상을 나타낸 것이다. 입구에서 유입되어지는 예혼합물질은 C_3H_8 과 공기의 혼합물로서, 당량비(Equivalence Ratio)는 0.25에서부터 1.75까지, 입구의 유속은 비입축성(유속=10m/s)에서부터 압축성(유속=340m/s)의 영향이 존재하는 경우까지를 고려하였다.

기본 유동의 계산에서는 후류유동의 불안정성 해석을 효율적으로 진행하고자 임의 지점의 속도 및 온도는 입구속도 및 반응전 온도로 무차원화하였다.



(a)



(b)

Fig. 3. Mean profiles of incompressible reacting wakes (a) velocity (b) temperature
(Velocity = 10m/s, $X/H = 5$)

또한, flame holder 뒤에서 부터의 거리 X 는 flame holder의 높이 H 로 무차원화하였다. X/H 가 증가함에 따라 속도구배가 감소하므로 유동의 불안정 해석에서는 속도구배가 비교적 큰 $X/H=5$ 인 경우를 고려하였다. Fig. 3은 위와 같은 조건하에서 화학반응 있는 경우의 속도장 및 온도장을 나타낸 것이다. Fig. 3(a)는 당량비가 0.25일 경우 자유유동과 중심선에서의 유동속도의 차이가 최대, 당량비 1.0일 경우는 최소임을 보이고 있다. 이에 반해서 Fig. 3(b)의 자유유동과 중심선에서의 유동온도의 차이는 당량비 0.25일 경우가 최소, 당량비 1.0일 경우가 최대이다. 이는 완전연소(당량비 = 1.0)의 경우, $X/H=5$ 인 지점에서의 온도가 당량비 0.25의 경우보다 높아 중심선에서의 유속이 증가하여 자유유동과 중심선의 유동속도의 차이가 감소한 것이다. 압축

성 연소유동인 경우도 비압축성 연소유동인 경우와 비슷한 현상을 보여준다.

3. 후류 유동에 대한 불안정성해석

3.1 변곡점

Rayleigh의 변곡점 정리⁽²⁾에 의하면, 비압축성 유체가 불안정하기 위해서는 총류 유동이 변곡점을 가지고 있어야 한다. 이 조건은 유동영역 내에서 \bar{u}'' 이 적어도 한 번이상의 부호의 변화가 있거나 \bar{u}' 의 극값을 가지는 것을 요구한다. Fjørtoft⁽⁸⁾는 위의 조건을 더욱 제한하여 유동이 불안정하기 위해서는 유동 영역내에서 $\bar{u}''(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 이어야 한다고 밝혔다. 여기서 $\bar{u}_s = \bar{u}(y_s)$ 로 y_s 는 \bar{u}'' 이 0이 되는 점이다. 해석적 함수를 사용한 비압축성 유동의 경우와 연소반응을 포함하는 유동장을 계산하여 얻은 비압축성 및 압축성 기본유동들은 모두 위의 조건들을 만족시키는 두 개의 점들이 존재하였다. 이와 같이 변곡점을 2개 갖고 있으므로 두 개의 불안정성 모드가 존재할 수 있으며, 이 변곡점들은 불안정성의 더욱 제한적인 조건인 $\bar{u}''(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 도 만족하였다. 따라서 본 연구에서 고려한 후류 유동은 두 개의 불안정성 모드를 갖게 됨을 예측할 수 있다.

3.2 불안정성 해석

우선 밀도 변화가 없는 해석적 함수 형태의 후류 유동의 불안정성 해석을 수행하였다. Fig. 4는 주파수 ω_r 에 대한 후류유동의 x 방향의 성장을 $-a_i$ 및 위상 속도 c_r 을 나타낸 것이다. 그림은 2개의 불안정성 모드가 존재함을 보여주고 있다. Fig. 4(a)에서 보는 바와 같이 Δu_c 가 증가함에 따라서 자유유동과 유동중심부와의 속도구배가 커지므로 성장률이 증가한다. Fig. 4(b)에서 상단의 한 모드는 자유 유동에 가까운 위상속도에서 시작하여 ω_r 이 증가함에 따라 변곡점에서의 자유유동의 속도로 접근함을 보이고 있다. 그림 하단의 모드도 후류 유동의 최저 속도에서 시작하여 변곡점에서의 속도로 접근함을 보여준다.

이 두 모드들의 각각의 특성을 파악하기 위하여

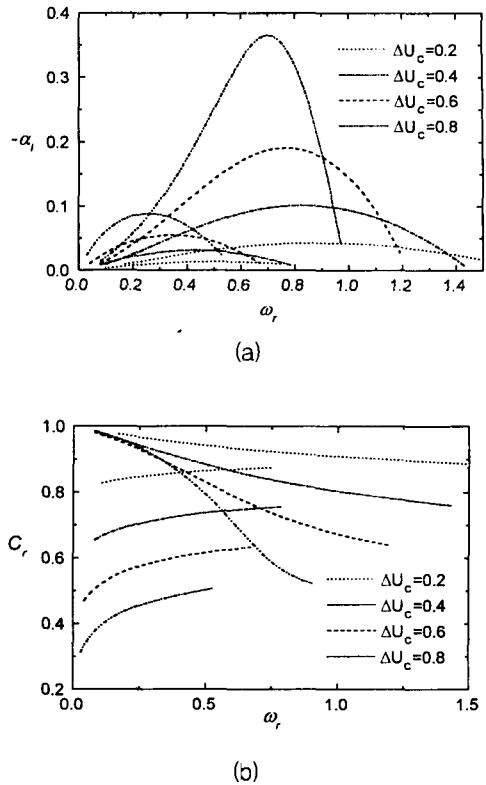
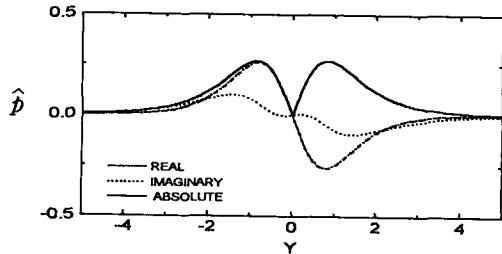
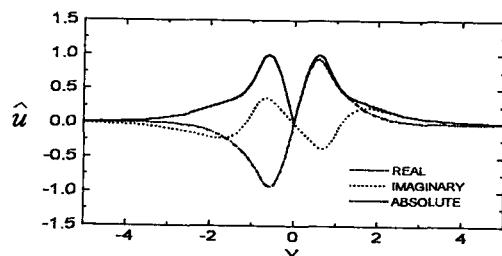


Fig. 4. (a) Amplification rates (b) phase speeds vs. frequency with velocity changes in cold flows.

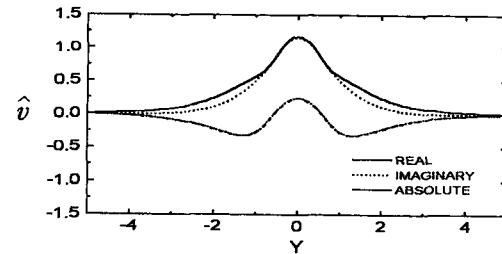
각 모드의 가장 불안정한 성장을 선택하여 속도 및 압력의 고유 함수를 그려보았다. Fig. 5는 자유 유동에 가까운 위상 속도에서 시작하여 ω_r 이 증가함에 따라 변곡점에서의 자유유동의 속도로 접근하는 모드의 가장 불안정한 성장률의 경우의 교란의 고유함수 \hat{p} , \hat{u} , \hat{v} 를 각각 나타낸 것이다. 고유함수 \hat{p} 와 \hat{u} 가 후류의 중심선 ($Y=0$)에서 0이 되기 때문에 이 모드를 sinuous 모드라 부른다. \hat{v} 는 \hat{u} 와 달리 후류의 중심선에서 0이 되지않는다. 중심선에서의 속도에서 시작하여 변곡점에서의 속도로 접근하는 모드의 가장 불안정한 성장률의 경우의 교란의 고유 함수를 Fig. 6에 나타내었다. 이 모드는 sinuous 모드와 달리 후류의 중심선에서 속도교란의 함수인 \hat{v} 만이 0이 되므로 varicose 모드 또는 wall 모드라 부른다. 후류유동의 경우 Fig. 4에서 볼



(a)



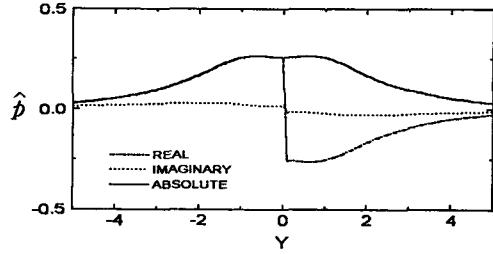
(b)



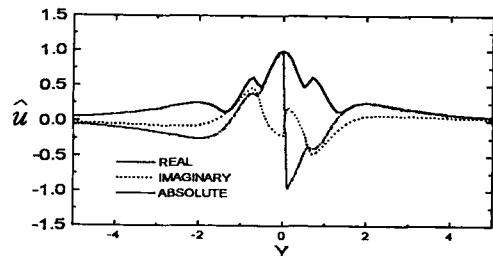
(c)

Fig. 5. Eigen functions of the most unstable sinuous mode in cold flows. (a) \hat{p} (b) \hat{u} (c) \hat{v} .

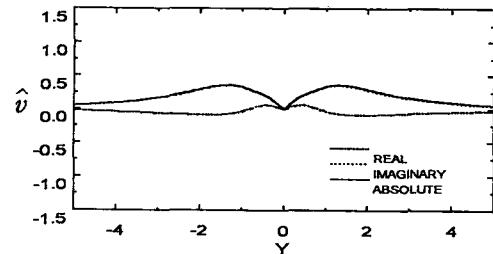
수 있는 바와 같 \hat{p} sinuous 모드의 최대성장률이 varicose 모드의 최대성장률보다 크므로 sinuous 모드가 더 불안정하며, 위상속도도 전체적으로 빠르다. 따라서 후류유동은 자유유동에 가까운 위상속도를 가지는 sinuous 모드들에 의하여 충류유동으로부터 천이를 거쳐 난류로 전개될 것을 추측할 수 있다. 또한 가장 불안정한 sinuous 모드의 주파수가 varicose 모드보다 파장이 짧게 된다. 속도구배는 sinuous 모드와 varicose 모드를 더욱 불안정하게 만듬과 동시에 주파수도 짧게 함을 보이고 있다. Fig. 4의 위상속도는 속도구배가 커짐에 따라서 작아짐을 보이고 있다. 후류유동의 변곡점이 중심선에



(a)



(b)

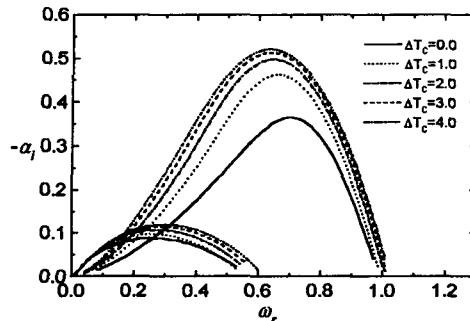


(c)

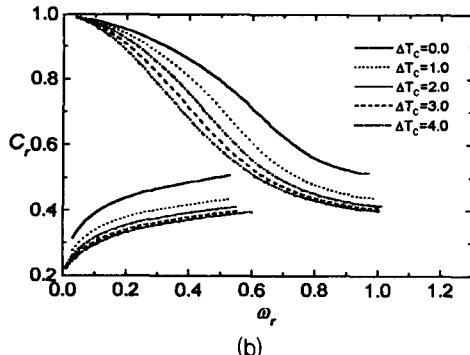
Fig. 6. Eigen functions of the most unstable varicose mode in cold flows. (a) \hat{p} (b) \hat{u} (c) \hat{v} .

대하여 대칭이고 두 개의 변곡점에서의 위상속도가 같으므로, sinuous 모드와 varicose 모드는 각각의 변곡점에 대응하는 반응혼합층의 복수불안정성 모드와는 달리 두 개의 변곡점에 함께 대응하는 불안정성 모드라 할 수 있다.

Fig. 7은 해석적 함수 형태의 밀도 변화가 있는 경우($\Delta u_c = 0.8$)에 주파수 ω 에 대한 후류유동의 x 방향의 성장을 및 위상 속도를 나타낸 것이다. 역시 두 개의 불안정 모드가 존재함을 알 수 있다. ΔT_c 가 증가함에 따라서 유동은 더욱 불안정해지는 것을 알 수 있다. 이는 밀도구배가 있을 경우 밀도구배가 없는 경우에 비하여 더욱 불안정하여질 것을



(a)

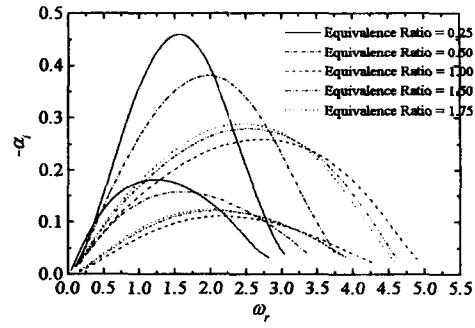


(b)

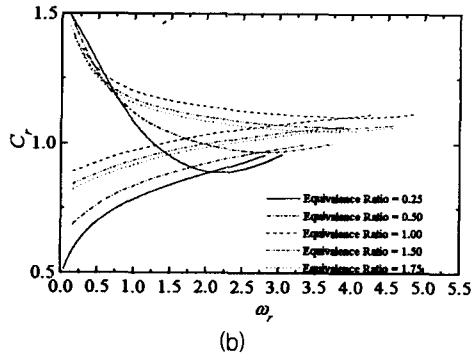
Fig. 7. (a) Amplification rates (b) phase speeds vs. frequency with velocity changes when density gradients exist.

시사하여 후류유동에 있어서 자유유동과의 혼합이 향상될 수도 있음을 보여준다. 최대 성장률을 가지는 주파수는 Δu_c 가 증가하는 경우와 마찬가지로 ΔT_c 가 증가함에 따라 작아진다. 속도구배가 커지는 경우와 마찬가지로 밀도구배가 커지면 위상속도는 낮아짐을 알 수 있다. 하지만, 밀도 변화가 있는 유동의 경우에는 모드들이 각각의 변곡점의 속도로 접근하지는 않는다.

다음은 계산된 일관된 유동장과 온도장에 대하여 불안정성 해석을 수행하였다. Fig. 8은 입구에서의 속도가 10m/s인 경우의 성장률과 위상속도를 당량비에 대하여 나타낸 것이다. 두 개의 불안정성 모드가 존재하며, 당량비가 1에 가까울수록 유동이 안정됨을 보이고 있다. 이는 반응열로 인하여 유동장의 온도가 증가하고 유체의 점성이 증가하여 유동의 불안정성을 감소시키기 때문이다. 완전연소로 진행할수록 sinuous mode나 varicose mode의 주파수가 길어지고 파장이 짧아진다. 따라서 연소반응은 sinuous



(a)



(b)

Fig. 8. (a) Amplification rates (b) phase speeds vs. frequency with equivalence ratio in incompressible reacting wakes. (Velocity = 10 m/s)

mode 및 varicose mode를 안정화시킴과 동시에 이들의 파장을 짧게 함을 알 수 있다. 위상속도는 당량비가 작을수록 작아지며, 1에 가까울수록 커지는 경향을 보여 연소가 활발할수록 불안정성 모드가 빠른 속도로 전파될 것으로 사료된다.

Fig. 9는 입구에서의 속도가 340m/s인 압축성 유동의 경우의 성장률과 위상속도를 당량비에 대하여 나타낸 것이다. Fig. 8과 거의 비슷한 경향을 보이고 거의 비슷한 경향을 보이고 있으나 압축성의 영향으로 유동이 안정화되고 있으며, 전체적으로 주파수가 짧아져 파장이 길어짐을 알수 있다.

4. 결 론

연소 반응을 가지는 비압축성 및 압축성 후류유동에 대하여 선형 불안정성 해석을 수행하였다. 기본유동의 속도장 및 온도장은 해석적 함수 및 연소 반응

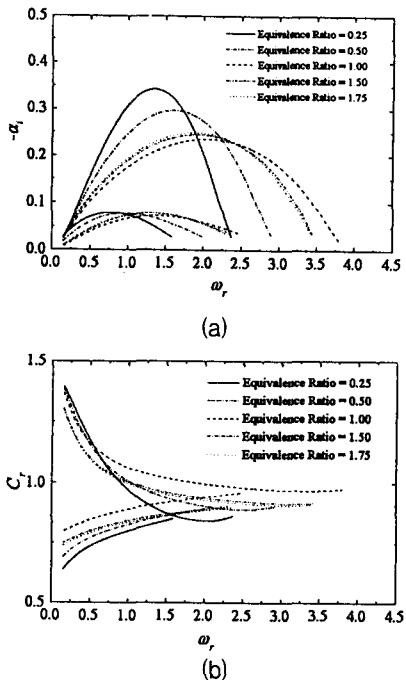


Fig. 9. (a) Amplification rates (b) phase speeds vs. frequency with equivalence ratio in compressible reacting wakes. (Velocity = 340 m/s)

을 포함하는 유동 계산의 결과를 사용하였다. 후류유동은 두 개의 변곡점을 가지며 sinuous mode와 varicose mode의 두 개의 불안정성 모드가 존재한다. 후류유동에서는 sinuous 모드가 varicose 모드보다 더 불안정하여 자유 유동에 가까운 위상 속도를 가지는 sinuous 모드에 의해 지배된다. 해석적 함수의 형태를 가지는 후류 유동의 경우 속도구배가 클수록, 밀도구배가 클수록 운동량의 차이가 커지므로 더욱 불안정하여진다. 계산되어 일관된 유동장과 온도장을 사용한 비압축성과 압축성 후류유동의 경우 모두 완전연소에 가까울수록 유동장의 온도가 증가하고 유체의 점성의 증가로 유동이 안정되어진다. 압축성 후류유동의 경우에는 유속이 증가함에 따라 점성소산에 의한 열발생으로 유동이 안정되는 경향을 보인다.

후 기

이 논문은 과학재단 특정기초연구(과제번호[95-0020-16-01-3]) 연구비에 의하여 연구되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. G. L. Brown and A. Roshko, "On Density Effects and Large Structure in Turbulent Mixing Layers," *J. Fluid Mech.* 64, 1974, pp.775~816.
2. L. Rayleigh, "On the Stability, or Instability of Certain Fluid Motions," *Proc. London Math. Soc.* 11, 1980, pp.57~70.
3. A. Michalke, "On the Inviscid Instability of the Hyperbolic-Tangent Velocity Profile," *J. Fluid Mech.* 19, 1965, pp.543~556.
4. S. Menon, J. D. Anderson and S. I. Pai, "Stability of a Laminar Premixed Supersonic Free Shear Layer with Chemical Reactions," *Int. J. Engg. Sci.* Vol. 22, No.4, 1984, pp.361~374.
5. A. Trouve and S. M. Candel, "Linear Stability of the Inlet Jet in Ramjet Dump Combustor," *AIAA-88-0149*, 1988.
6. D. S. Shin and J. H. Ferziger, "Linear Stability Analysis of Reacting Mixing Layer," *AIAA Journal*, 29, 1991, pp. 1634~1642.
7. STAR-CD User Guide and Manuals, Version 3.0, Computational Fluid Dynamics Ltd., 1997.
8. Drazin, P. G. and Reid, W. H., 1982, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, UK.