

FFT를 이용한 Hertzian Contact 해석

구영필 · 조용주*

부산대학교 대학원 기계공학과
*부산대학교 공과대학 기계공학부

Analysis of Hertzian Contact using Fast Fourier Transform

Young-Pil Koo and Yong-Joo Cho*

Graduate School, Pusan National University
*School of Mechanical Engineering, Pusan National University

Abstract—In this study, a numerical procedure to solve a contact problem has been developed. The procedure takes advantage of signal processing technique in frequency domain to achieve shorter computing time. Boussinesq's equation was adopted as the response function. This procedure is applicable to a non-periodic surface profile as well as a periodic one. The validity of this procedure has been established by comparing the numerical results with the exact solutions. The fastness of this procedure was shown in comparison with other algorithm.

Key words—contact analysis, FFT, signal processing, FIR filter, response function, Boussinesq's equation, Hertzian contact.

1. 서 론

서로 상대운동하고 있는 두 가공면 사이에는 돌기들의 접촉에 의하여 과도한 마찰과, 그에 따른 마멸의 문제가 발생할 수 있으므로 표면의 사용 목적에 부합되는 트라이보 시스템의 설계를 위해서는 접촉문제에 대하여 정확한 이해가 요구되어 왔다. 고전적으로 Greenwood와 Williamson[1]은 접촉돌기들의 형상을 동일한 곡률을 갖는 구로 근사시켜 접촉하중을 계산하였다. 이후, Wei-Tang Lai[2]는 탄성 접촉문제에 대하여 수치적 모델을 사용하여 접촉압력과 접촉면적을 구하였으며 J. A. Ogilvy[3]는 거친 면의 접촉을 수치해석적으로 계산하여 마찰력을 예측하는 모델을 소개하였고, Xuefeng Tian과 Bhushan[4]은 변분 원리와 influence matrix를 이용하여 3차원 표면의 접촉을 해석하였다. 접촉문제에서의 관건은 실제에 가까운 접촉압력과 접촉변위의 해를 구하는 것이며 이를 위해

서는 표면의 실제 형상을 도입해야 하지만, 실제 형상을 수치해석에 도입하면 node 수가 증가하고 그에 따라 계산량이 급증하는 문제가 야기된다. 그러므로, 기존의 수치해석 방법으로는 계산 능력의 한계 때문에 실제에 근접한 접촉문제의 해석에 장애가 대두되고 있다. 계산 능력을 향상시키기 위하여 N. Ren과 S. C. Lee[5]는 변형계수의 계산시간을 단축시키고 작은 크기의 computer memory를 효율적으로 이용할 수 있도록 하는 moving grid method를 3차원 표면의 접촉해석에 사용하였다.

최근에는 계산의 고속화를 위하여 고속 푸리에 변환(fast Fourier transform, FFT)을 이용한 신호처리 기법이 접촉문제의 해석에 활용되고 있다. 이것은 진동이나 소음 등 시간영역의 신호를 주파수 영역의 신호로 변환하여 필터링하는 신호처리 기법을 공간영역의 신호인 접촉압력 또는 접촉변위의 해석에 응용한 것으로서 기존의 접촉에 대한 수치해석 방법에 비하여

계산시간을 획기적으로 단축시킬 수 있는 장점이 있다. 즉, node의 수가 $N \times N$ 인 표면을 해석할 때 기존의 방법을 채택하면 매트릭스의 곱은 N^2 으로 증가하는데 비하여 주파수영역에서의 신호처리에 소요되는 노력은 $N \log_2 N$ 의 비율로 증가하므로 매트릭스 곱에 비하여 계산시간 측면에서 상당한 이점이 있다. Y. Ju와 T. N. Farris[6]는 2차원 선하중 접촉문제에 대하여 스펙트랄 분석을 도입하여 접촉압력으로부터 변위, 또는 변위로부터 접촉압력을 구하는 방법을 소개하였다. H. M. Stanley와 T. Kato[7]는 임의 구조의 2차원 및 3차원 접촉문제에 대하여 고속 푸리에 변환과 변분 원리의 장점을 이용하는 방법을 제시하였다. 이들의 해는 변위가 조화함수적으로 변화하는 Westergaard의 문제를 기본으로하여 연구되었다.

본 연구에서는 보다 폭넓게 응용 가능한, 고속 푸리에 변환을 이용한 접촉해석 모델을 제시하기 위하여 Boussinesq 식을 응답함수로 이용하여 접촉문제를 해석하는 절차를 소개하였다. 기존의 연구는 주기적 표면을 기본으로하여 수행되었지만 대부분의 경우에 표면의 높이분포, 변위 또는 접촉압력은 주기적이지 않기 때문에 본 연구에서는 비주기적 경우에 대하여 필터링 기법을 도입하여 접촉문제를 해석하였다.

2. 해석 방법

2-1. Boussinesq 식

Fig. 1의 반 무한체에서 표면상의 영역 S 위에 작용하는 수직 압력 p 에 의한 반 무한체 내의 어떤 점 A 의 변위는 다음과 같이 표현된다[10].

$$u_x = \int_S \int \frac{p(\xi, \eta)}{4\pi G} \left\{ \frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right\} d\xi d\eta \quad (1)$$

$$u_y = \int_S \int \frac{p(\xi, \eta)}{4\pi G} \left\{ \frac{yz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{y}{\rho(\rho+z)} \right\} d\xi d\eta \quad (2)$$

$$u_z = \int_S \int \frac{p(\xi, \eta)}{4\pi G} \left\{ \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right\} d\xi d\eta \quad (3)$$

여기에서,

$$\rho = \overline{AC} = \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2\}^{1/2}$$

표면에서의 z 방향 변위는 다음과 같이 표현된다.

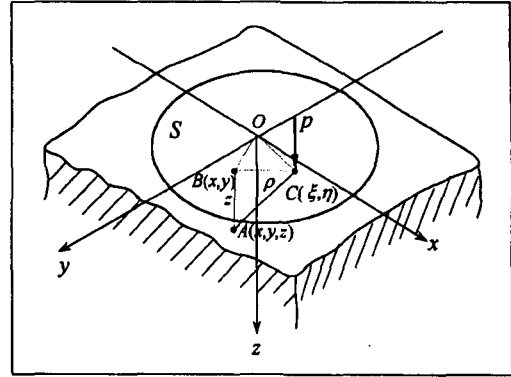


Fig. 1. Normal pressure acting on the surface of the elastic half-space.

$$u(x, y) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_S \int p(\xi, \eta) \times \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\xi d\eta \quad (4)$$

이를 달리 표현하면,

$$u(x, y) = \int_S \int p(\xi, \eta) \cdot h(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \quad (5)$$

식 (5)는 표면의 접촉압력으로부터 접촉변위를 구하는데 이용될 수 있다. 여기에서 h 는 응답함수로서 다음과 같다.

$$h(x-\xi, y-\eta) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

2-2. FFT를 이용한 접촉문제 해석

식 (5)에서 압력을 입력, 변위를 출력으로 취급하면 접촉문제는 단일 입력에 대하여 단일 출력을 갖는 선형시스템으로 취급할 수 있다. 식 (5)를 수치해석을 위하여 이산적으로 표현하면 다음과 같다.

$$u(I, J) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p(k, l) h(I-k, J-l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p(I-k, J-l) h(k, l) \quad (6)$$

여기에서 h 는 이산화된 응답함수이다.

임펄스의 응답을 유한한 영역만 취하면 식 (6)은 다음과 같이 비순회형(finite impulse response) 필터의 형태로 변환된다.

$$u(I, J) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} h(k, l) p(I-k, J-l) \quad (7)$$

시스템의 특성을 알기 위해서는 식 (7)로 표현된 콘볼루션을 계산해야 하지만 공간 영역에서 콘볼루션을 계산하고 그 특성을 평가하는 것은 어렵다. 문제가 주파수 영역으로 변환되면 콘볼루션은 입력신호와 전달함수의 곱으로 표현되므로 주파수 영역에서 시스템의 특성을 계산하고 평가하는 편이 더 쉽다. 주파수 영역으로 변환하기 위하여 식 (7)의 양변에 푸리에 변환을 취하면 다음의 관계가 얻어진다.

$$U(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) P(\omega_x, \omega_y) \quad (8)$$

여기에서, $U(\omega_x, \omega_y)$ 는 출력(변위)의 푸리에 변환, $H(\omega_x, \omega_y)$ 는 전달함수, $P(\omega_x, \omega_y)$ 는 입력(압력)의 푸리에 변환이다.

전달함수는 다음과 같이 공간영역의 응답함수를 푸리에 변환시키면 구해진다.

$$H(\omega_x, \omega_y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} h(k, l) e^{-jk\omega_x} e^{-jl\omega_y} \quad (9)$$

전달함수가 구해지면 다음의 절차에 의하여 압력으로부터 변위를 구할 수 있다. 이것은 비순회형 필터를 이용하는 필터링 조작의 처리속도를 향상시키기 위하여 주파수 영역 접근법과 고속 푸리에 변환에 바탕을 둔 해석 절차이다. 응답함수는 $h(k, l)$, $k=0, \dots, n/2-1$, $l=0, \dots, m/2-1$, 출력, $u(I, J)$ 를 구하기 위하여 비순회형 필터에 의하여 필터링 되어야하는 입력이 $p(I, J)$, $I=0, \dots, N-1$, $J=0, \dots, M-1$ 인 경우, L_x, L_y 가 각각 $N+n-1, M+m-1$ 보다 큰 2의 누승이면, 다음의 절차를 사용하여 주파수 영역에서 해석이 가능하다.

(1) 새로운 입력 신호 $p_f(I, J)$ 구성

$$I = 0, \dots, L_x - 1, J = 0, \dots, L_y - 1$$

$$p_f(I, J) = p(I, J)$$

$$I = 0, \dots, N - 1, J = 0, \dots, M - 1$$

$$p_f(I, J) = 0$$

$$I = N, \dots, L_x - 1, J = M, \dots, L_y - 1$$

(2) 새로운 응답함수 $h_f(I, J)$ 구성

$$I = 0, \dots, L_x - 1, J = 0, \dots, L_y - 1$$

$$h_f(I, J) = h(I, J);$$

$$I = 0, \dots, n/2 - 1, J = 0, \dots, m/2 - 1$$

$$h_f(L_x - I + 1, J) = h(I, J)$$

$$h_f(I, L_y - J + 1) = h(I, J)$$

$$h_f(L_x - I + 1, L_y - J + 1) = h(I, J);$$

$$I = 1, \dots, n/2 - 1, J = 1, \dots, m/2 - 1$$

$$h_f(I, J) = 0;$$

$$I = n/2, \dots, L_x - n/2 - 1,$$

$$J = m/2, \dots, L_y - m/2 - 1$$

(3) $p_f(I, J)$ 의 2차원 푸리에 변환을 계산하여 $P_f(\omega_x, \omega_y)$ 를 구함

$$\omega_x = 0, \dots, L_x - 1, \omega_y = 0, \dots, L_y - 1$$

(4) $h_f(I, J)$ 를 2차원 푸리에 변환하여 필터의 주파수 응답 $H_f(\omega_x, \omega_y)$ 구함

$$\omega_x = 0, \dots, L_x - 1, \omega_y = 0, \dots, L_y - 1$$

(5) $H_f(\omega_x, \omega_y)$ 와 $P_f(\omega_x, \omega_y)$ 의 곱을 계산하여 주파수 영역의 출력, $U_f(\omega_x, \omega_y)$ 구함

$$\omega_x = 0, \dots, L_x - 1, \omega_y = 0, \dots, L_y - 1$$

(6) $U_f(\omega_x, \omega_y)$ 의 푸리에 역변환을 계산하여 공간영역의 변위, $u(I, J)$ 구함

$$I = 0, \dots, N - 1, J = 0, \dots, M - 1$$

위의 절차를 개념적으로 정리하면 다음과 같이 요약된다.

(1) 입력신호(압력)를 FFT하여 주파수 영역의 입력으로 변환

(2) 주파수 영역의 입력과 전달함수의 곱을 계산하여 주파수 영역의 출력을 구함

(3) 주파수 영역의 출력을 iFFT하여 공간 영역의 출력신호(변위)로 변환

여기에서 iFFT는 고속 푸리에 역변환(inverse fast Fourier transform)을 의미한다.

이 절차는 표면의 변위가 주기적이라는 가정하에 수행되지만 실제의 표면은 주기적이지 않기 때문에 푸리에 변환 또는 푸리에 역변환 중에 본래의 신호가 왜곡되는 문제가 발생할 수 있다. 이 문제를 예방하기 위하여 푸리에 변환 또는 역변환에 사용되는 신호의 수(L_x, L_y)는 2의 누승으로서 입력신호의 수와 응답함수의 수를 합한 것보다 더 많도록 설정해야 한다. 이 산적 푸리에 변환시 입력신호의 수와 응답함수의 수는 같아야 하므로 위의 절차에서 나타난 바와 같이 계

산영역을 각각 L_x, L_y 까지 확장시키고 데이터가 부족한 곳에는 영(0)을 부가하고 있다.

압력으로부터 변위를 구하는 과정을 역으로 수행하면 다음과 같이 변위로부터 압력을 구할 수 있다.

(1) 공간 영역의 출력신호(변위)를 FFT하여 주파수 영역의 출력으로 변환

(2) 주파수 영역의 출력을 전달함수로 나누어 주파수 영역의 입력신호를 구함

(3) 주파수 영역의 입력을 iFFT하여 공간 영역의 입력신호(압력)로 변환

2-3. 상호작용적 접촉해석 방법

접촉문제의 수치해석에서 수렴해를 구하는 것은 접촉압력과 접촉변위의 평형점을 찾는 과정이다. 접촉압력 혹은 접촉변위의 가정된 초기치로부터 출발하여 접촉영역에서의 구속조건과 비접촉영역에서의 구속조건을 만족시키는 압력분포와 변위분포를 구하는 것이다. 이때의 구속 조건은,

접촉영역에서;

$$\alpha(x) > 0, u(x) = \delta - [h_1(x) + h_2(x)] \quad (10)$$

비접촉영역에서;

$$\alpha(x) = 0, u(x) > \delta - [h_1(x) + h_2(x)] \quad (11)$$

여기에서 δ 는 두 면의 상대적 접근거리, $h_1(x), h_2(x)$ 는 두 접촉면의 변형전 프로파일의 높이분포이다. 평면과 구의 탄성접촉에 대하여 접촉문제를 해석하는 상호작용적 방법은 다음과 같다.

- (1) 구의 표면 형상 데이터 입력
- (2) 초기 변위량 가정
- (3) 응답함수를 푸리에 변환시켜 전달함수를 구함
- (4) FFT해석에 의하여 변위로부터 압력을 구함
- (5) 압력과 변위의 구속조건 적용
- (6) FFT해석에 의하여 변경된 압력으로부터 변위를 계산
- (7) 반복계산에 의하여 수렴해 유도

3. 접촉해석 대상

본 연구에서 채택한 전달함수와 필터링 기법의 타당성을 검증하기 위하여 정확해가 알려져 있는 다음의 경우를 FFT를 이용한 접촉해석 대상으로 선정하였다.

3-1. 조화함수적 압력에 대한 변위 분포

Westergaard[8]는 웨이브를 가진 표면에 등분포하중이 작용할 경우에 대하여 접촉압력과 변위의 해를 구하였다. 즉, 하중이 가해지기 전에 두 면의 초기 거리, s 가 식 (12)와 같이 표현된다면, 표면의 변위는 식 (13), 접촉구간에서 표면의 접촉압력은 식 (14)와 같이 각각 표현된다.

$$s = \frac{c}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{l} \right) \right] = c \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) \quad (12)$$

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)pl}{\pi E \sin^2(\pi a/l)} \left[\cos \left(\frac{2\pi x}{l} \right) - 1 \right] \quad (13)$$

$$\sigma_z = - \frac{2p \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{l} \right)} \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{l} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right)} \quad (14)$$

여기에서 p 는 등분포하중, l 은 파장 a 는 원점에서 접촉구간까지의 길이이다. 웨이브가 상대평면과 완전히 접촉되는 경우에 $a=l/2$ 이므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\sigma_z = -p \cos \left(\frac{2\pi x}{l} \right) + C_1 \quad (15)$$

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)pl}{\pi E} \cos \left(\frac{2\pi x}{l} \right) + C_2 \quad (16)$$

즉, 평면에 조화함수적으로 압력이 작용하면 결과적으로 변위도 조화함수적으로 나타난다.

3-2. 집중하중에 의한 변위

반 무한체의 표면에 크기가 P 인 집중하중이 작용할 때, 표면에서의 변위는 Boussinesq 식으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)P}{\pi E} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (17)$$

3-3. 평면과 구의 Hertz 접촉

이것은 Hertz 이론의 가장 간단한 경우로서 구를 강체, 평판을 탄성체, 접촉영역은 직경이 $2a$ 인 원으로 된다고 가정하면 중심에서 r 만큼 떨어진 곳의 접촉압력과 수직변위는 각각 식 (18), (19)와 같다.

$$\sigma_z = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \quad (18)$$

$$u_z = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a \quad (19)$$

$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*}\right)^{1/3} \quad (20)$$

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left(\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R^2}\right)^{1/3} \quad (21)$$

$$d_0 = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}}\right)^{1/3} \quad (22)$$

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (23)$$

여기에서 P 는 가해진 하중, R 은 구의 반경, p_0 은 접촉 영역 중심에서의 최고압력, d_0 는 정점에서의 최대변위, E^* 는 상당탄성계수이다.

4. 해석결과 및 고찰

Node의 수를 64×64 , 격자의 크기를 0.1×0.1 mm, 탄성계수 200 GPa, Poisson 비를 0.3으로 하여 조화함수적 하중, 단위 집중하중 및 구의 Hertz 접촉에 대하여 FFT를 이용한 접촉해석을 수행하였다.

Fig. 2에 반무한체에 식 (24)의 조화함수적인 압력이 작용할 경우의 변위를 도시하였다. 계산결과는 정점을 제외한 거의 모든 영역에서 Westergaard의 해와 잘 일치하고 있다.

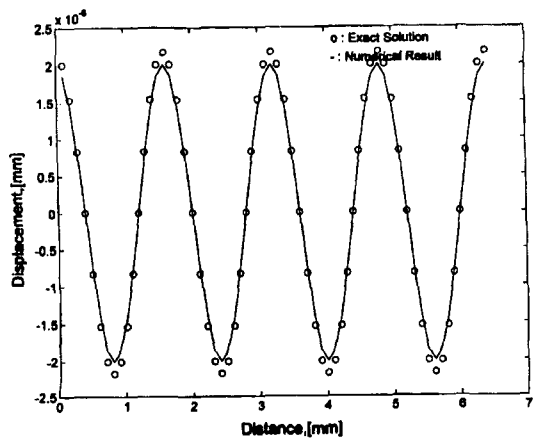


Fig. 2. Displacement for Westergaard problem.

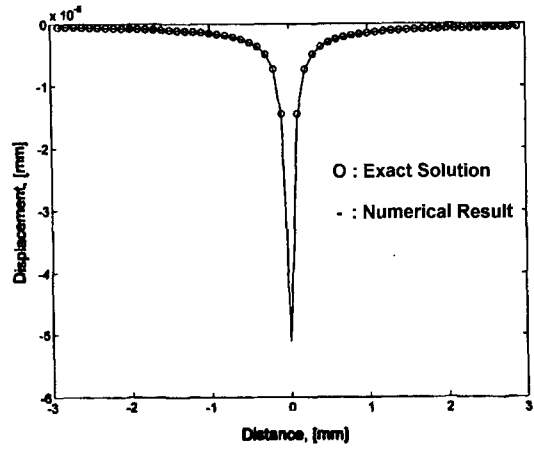


Fig. 3. Displacement for point load.

$$\sigma_z = -\cos\left(\frac{2\pi}{16}\right) \quad (24)$$

Fig. 3에 반 무한체의 표면에 1 N의 집중하중이 작용하는 경우에 대하여 변위의 계산결과와 정확해를 비교하여 나타내었다. 하중 작용점을 제외한 모든 위치에서 FFT해석에 의한 계산결과는 정확해와 거의 일치한다.

Fig. 4, 5에 구의 Hertz 접촉에 대하여 FFT해석에 의한 접촉압력과 평판의 접촉영역에서 변위의 계산결과를 각각 나타내었다.

이 경우에 정점에서의 최대 변위는 0.01 mm를 부여하였다. 구의 Hertz 접촉에 대해서도 FFT해석을 이용한 계산결과는 정확해와 잘 일치하고 있다. Hertz

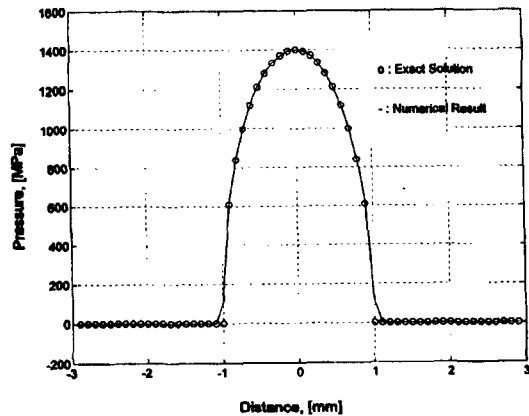


Fig. 4. Contact pressure in Hertzian contact between a sphere and a plane.

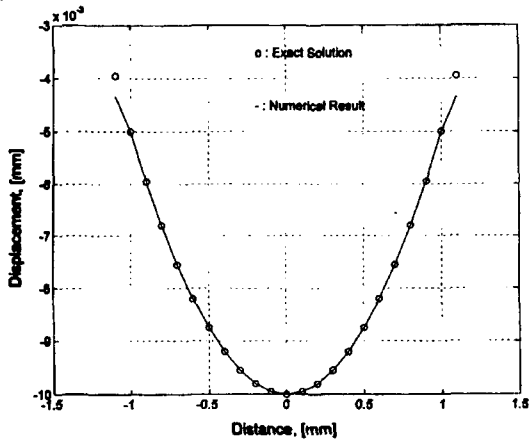


Fig. 5. Displacement in Hertzian contact between a sphere and a plane.

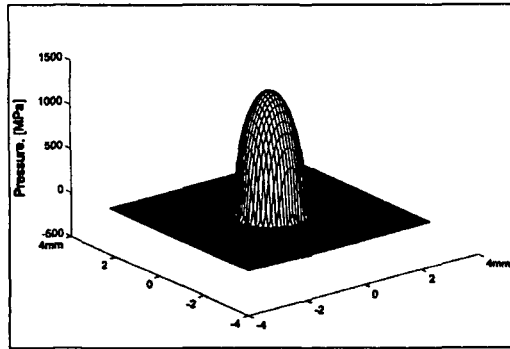


Fig. 6. 3-D View of contact pressure in Hertzian contact.

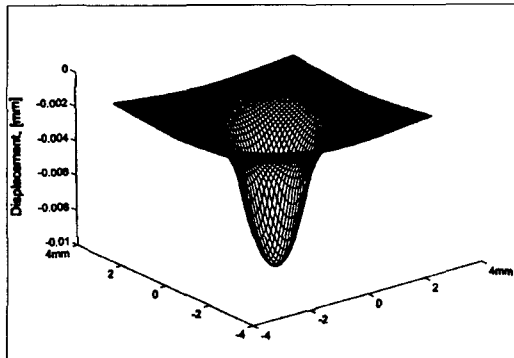


Fig. 7. 3-D View of displacement in Hertzian contact.

접촉에 대한 접촉압력과 변위의 3차원 분포 형태를 Fig. 6, 7에 각각 도시하였다.

기존의 접촉해석방법과 FFT해석에 의한 방법을 비교평가 하기 위하여 기존의 방법으로서 Bhushan의 방

Table 1. Comparison of computing time

Loading conditions	by Bhushan	by FFT analysis	Ratio
Point load	7030 sec	2 sec	1/3515
Hertzian contact of sphere	3600 sec	50 sec	1/72

Table 2. Maximum error to exact solutions

Loading conditions	Items	by Bhushan	by FFT analysis
Point load	Maximum displacement	1.02%	1.02%
Hertzian contact of sphere	Maximum pressure	0.08%	0.07%

법을 사용하여 집중하중과 구의 Hertz 접촉에 대하여 각각 해석을 수행하였다. Table 1에 FFT해석과 Bhushan의 방법에 대한 계산 소요시간을, Table 2에 오차의 범위를 각각 비교하여 나타내었다.

Bhushan의 방법은 표면의 크기가 $N \times N$ 이고 접촉점 개수가 M 인 표면을 해석할 때 $M \times M$ 크기의 influence matrix를 구성하게 되어 최대 matrix의 크기는 $N^2 \times N^2$ 으로 급증하고 계산과정에 구속조건을 만족하는 접촉점들에 대하여 반복적으로 influence matrix를 재구성해야 하므로 계산시간이 많이 소요되고 있다.

상기의 여러 경우에서 나타난 바와 같이 FFT해석은 기존의 방법에 비하여 보다 짧은 시간에 정확해에 가까운 계산결과를 얻을 수 있는 방법임을 알 수 있다.

계산시간이 현저하게 단축됨에 따라 여러 가지 이점을 유추할 수 있다. 즉, 본 연구에서 개발된 알고리즘을 부분 탄성유체 윤회해석에 적용하면 접촉부분의 형상에 대하여 보다 정확한 해를 기대할 수 있고, 기존의 방법으로는 해석이 어려운, 형상이 복잡한 실제의 랜덤 표면에 대해서도 정밀한 해석이 가능할 것으로 본다.

한편, 본 연구에서 사용한 필터링 기법은 다른 분야에도 응용이 가능 할 것이다. 예를 들면, 모재와 다른 물질로 코팅된 면에 하중이 작용할 경우에 하중에 대한 변위의 응답이 알려져 있다면 필터링 기법을 적용하여 변위를 구할 수 있다.

5. 결 론

Boussinesq의 식을 응답함수로 사용하고, 공간영역

의 신호인 접촉압력 또는 변위의 데이터를 FFT에 의하여 주파수영역의 값으로 변환하고 신호처리의 필터링 기법을 적용하여 접촉해석을 수행한 바, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) FFT해석으로부터 정확해에 가까운 정밀한 계산 결과를 얻을 수 있다.

(2) 기존의 방법에 비하여, FFT해석은 계산시간을 현저하게 단축시킬 수 있다.

(3) Boussinesq의 식은 접촉해석에 합당한 응답함수이다.

(4) 비주기적 표면의 접촉해석에도 FFT를 이용한 필터링 기법을 적용할 수 있다.

(5) 본 연구를 통하여 접촉해석에 필터링 기법의 적용 가능성이 재입증되었다.

후 기

FFT 해석에 관하여 많은 조언을 해준 Northwestern University의 H. S. Cheng 교수와 Xiaofei Jiang군에게 감사드립니다.

기호설명

E	: modulus of elasticity
G	: shear modulus of elasticity
I, J, k, l	: index for pressure, displacement
j	: imaginary unit
P	: concentrated load
p	: distributed load
u	: displacement
x, y, z	: coordinates for pressure and displacement
ξ, η	: coordinates for distributed load
ν	: Poisson's ratio
σ	: contact pressure
ω	: frequency index

참 고 문 헌

- Greenwood, J. A. and Williamson, J. B. P., "Contact of Nominally Flat Surfaces," Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A295, pp. 300-319, 1966.
- Lai, W. and Cheng, H. S., "Computer Simulation of Elastic Rough Contacts," ASLE Transactions, Vol. 28, No. 2, pp. 172-180, 1984.
- Ogilvy, J. A., "Numerical simulation of friction between contacting rough surfaces," J. Phys. D: Appl. Phys., Vol. 24, pp. 2098-2109, 1991.
- Tian, X. and Bhushan, B., "A Numerical Three-Dimensional Model for the Contact of Rough Surfaces by Variational Principle," ASME Journal of Tribology, Vol. 118, pp. 33-42, 1996.
- Ren, N. and Lee, S. C., "Contact Simulation of Three-Dimensional Rough Surfaces Using Moving Grid Method," ASME Journal of Tribology, Vol. 115, pp. 597-601, 1993.
- Ju, Y. and Farris, T. N., "Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems," ASME Journal of Tribology, Vol. 118, pp. 320-328, 1996.
- Stanley, H. M. and Kato, T., "An FFT-Based Method for Rough Surface Contact," ASME Journal of Tribology, Vol. 119, pp. 481-485, 1997.
- Westergaard, H. M., "Bearing Pressures and Cracks," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 6, pp. A 49-A53, 1939.
- Hu, Y. Z. and Tonder, K., "Simulation of 3-D Random Rough Surface by 2-D Digital Filter and Fourier Analysis," Int. J. Mach. Tools Manufact., Vol. 32, No. 1/2, pp. 83-90, 1992.
- Johnson, K. L., Contact mechanics, Chap. 3, pp. 45-54, Chap. 4, pp. 83-94.