

수리가능한 아이템의 최적무상보증기간† - Optimum Free Warranty Interval for Repairable Items -

정 영 배*
Chung, Young Bae

Abstract

This paper proposes free warranty interval for repairable items when the failure types of item are considered. Failure types are classified into major failure and minor failure. If major failure occurs during warranty period, the item is replaced and if minor failure occurs during warranty period, the item is minimally repaired.

This paper determines the optimum free warranty interval which minimizes total expected cost of the free warranty cost model.

Numerical example is shown in which failure time of item has weibull distribution

1. 서론

소비자를 보호하는 정부의 시책이 기업위주에서 소비자보호위주로 전환됨에 따라 제조 및 서비스업체들에 대해 엄격한 품질기준을 요구할 뿐만 아니라, 제품의 하자로 소비자가 피해를 보았을 때 보상받을 수 있는 제도적 장치도 마련되어 있다.

또한 제품을 구입하는 소비자 역시 제품을 구입할 때 품질보증이 잘되는 기업을 선호하기 때문에, 기업에서는 더욱더 적극적인 품질보증활동을 위하여 제품의 제조과정에서도 품질관리를 철저히 함은 물론 제품의 판매후에도 판매한 제품에 대해 일정기간까지 발생한 고장이나 하자에 대해서는 제조회사가 책임을 지는 보증정책을 수립하고 있다.

보증정책에는 보증기간내에서 제품의 고장으로 인한 모든 비용과 서비스를 제조자가 완전히 책임을 지는 무상보증정책(free warranty policy), 제품의 고장시 그 제품의 수명에 비례해서 비율적으로 보증을 해주는 비율보증정책(prorata warranty policy), 어느 일정시점까지는 무상보증정책을 시행하고 일정기간 이후부터는 보증기간까지는 비율보증정책을 시행하는 혼합보증정책(hybrid warranty policy), 보증기간을 여러 단계로 나누어 각 단계에서 고장이 날 때마다 그 단계에 해당하는 비용을 제조자가 소비자에게 보상하는 단계별보증정책(stepdown warranty policy)이 있다.

* 인천대학교 산업공학과

† 본 연구는 96년도 인천대학교 연구비 지원에 의해 수행되었음

기존의 연구로는 Blischke와 Scheuer(1981)가 무상보증정책하에서 제품의 고장시 수리가 불가능하여 신품으로 교환해주는 경우에 생산자의 비용에 대한 연구를 하였으며, Glickman과 Berger(1976)는 무상보증정책하에서 제품의 고장시 수리가 가능하나 수리후의 상태가 신품과 같아지는 완전수리를 가정하고 생산자의 이익을 최대로 하는 보증기간과 제품가격의 결정방법을, Nguyen과 Murthy(1984)는 보증기간동안 판매된 제품에 대해 생산자입장에서 보증비용과 보증기간에 대해 연구하였다. Park 과 Yee(1984)는 무상보증정책하에서 제품의 고장시 고장나기 직전까지의 고장률로 최소수리를 해준다는 가정하에서 장래 발생할 보증비용의 현재가치를 계산하였으며, Son, Suh, Park(1994)은 수리가 가능한 경우 생산자입장에서의 보증비용과 소비자입장에서 최적사용기간을 결정하는 문제에 대해 연구하였다.

Menke(1969)는 비율보증정책하에서 제품이 고장나면 신품으로 교환하는 경우에 대해 사후보증비용을 고려한 제품의 가격결정에 관한 연구를 하였으며, Heschel(1971)은 혼합보증정책하에서 고장분포가 지수분포를 따르는 경우 수리가능한 제품에 대해 소비자 입장에서 보증비용을 계산하고 보증으로 인한 비용절감에 대해 연구하였다.

Kim(1988)은 단계별보증정책하에서 보증기간동안 발생하는 생산자의 기대비용에 대해 연구하였다.

현재의 기업들은 제품의 무상보증기간을 확대하고 있는 추세이고, 이같은 추세로 인해 제품의 무상보증정책이 제품의 판매할 때의 기본적인 조건이 될 뿐만 아니라, 제품의 판매를 선도하여 경쟁업체에 대해 우위를 점할 수 있는 판매전략으로서의 자리를 잡아가고 있고, 이에 따라 기업에서도 무상보증기간이 의사결정의 중요한 문제가 되어가고 있다.

그러나 이 무상보증기간은 길게하면 소비자의 입장에서는 제품을 구입하는 결정적인 요인으로 작용할 수 있으나, 제조자에게는 비용요인이 되기 때문에 기업의 입장에서는 이 무상보증정책하에서의 비용요인을 분석하여 보증기간을 결정함으로써 제품의 가격, 제품의 신뢰도향상 대책등의 자료로서 유용하게 사용하는 것이 바람직하다.

본 연구는 무상보증기간동안에 제품의 고장형태를 두가지형태로 분류하여 수리가 가능하더라도 비용등의 원인으로 인해 수리를 하는 것보다는 제품을 교환해주는 편이 더 나은 고장형태에 대해서는 제품교환을, 수리가 가능한 경미한 고장은 최소수리(minimal repair)를 해주는 무상보증정책에 대해 비용요인을 분석하여 비용모형을 설정하고 총기대무상보증비용을 최소화하는 최적무상보증기간을 결정한다.

2. 모형의 설정 및 기호설명

2.1 모형의 설정

본 연구에서는 제품의 수명분포를 가정하고, 무상보증기간내의 고장에 대해서는 고장형태(failure type)를 수리를 해주는 것보다는 비용등의 원인으로 인해 제품을 교환해 주어야하는 중고장(major failure)과 수리가 가능하여 고장나기 직전까지의 고장률로 최소수리를 해주는 경고장(minor failure)의 두가지 형태로 나눈다. 따라서 제품의 무상보증기간내에서 중고장이 발생하면 제품교환을, 경고장이 발생하면 최소수리를 해주는 비용모형을 설정하고, 이에 따라 발생하는 비용요인을 정리하면 다음과 같다.

(1) 제품교환비용(replacement cost)

무상보증기간내에서 중고장으로 인한 제품의 교환비용

(2) 최소수리비용(minimal repair cost)

무상보증기간내에서 경고장으로 인한 제품의 최소수리비용

2.2 가정 및 기호설명

2.2.1 가정

- (1) 제품의 교환은 신제품으로 이루어진다.
- (2) 최소수리는 제품의 고장률을 변화시키지 않는다.
- (3) 제품의 교환 및 수리에 소요되는 시간은 무시할만큼 작다.
- (4) 제품의 수명은 weibull분포를 따른다.
- (5) 제품의 고장률함수는 증가고장률(IFR)이다.
- (6) 고장은 확률적으로 독립이다.

2.2.2 기호설명

- X : 제품의 고장시간, 확률변수
 $f(t)$: 제품의 고장시간 X 의 확률밀도함수
 $F(t)$: 제품의 고장시간 X 의 확률분포함수, $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$
 $h(t)$: 제품의 고장시간 X 의 고장률함수
 $H(t)$: 제품의 고장시간 X 의 누적고장률함수
 $p(x)$: 고장시간 x 에서 중고장이 발생할 확률
 $\bar{p}(x)$: 고장시간 x 에서 경고장이 발생할 확률
 X_k : 중고장이 발생하지 않았을 때 k 번째 경고장까지의 고장시간
 $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$: 확률벡터 (X_1, X_2, \dots, X_k) 의 확률밀도함수
 P_k : $(0, t)$ 에서 중고장이 발생하지 않았을 때 경고장이 k 번 발생한 확률
 Y : 중고장이 발생한 시간, 확률변수
 $G(t)$: 제품의 중고장시간 Y 의 확률분포함수, $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$
 W : 제품의 무상보증기간
 W^* : 제품의 최적무상보증기간
 N : $\{0, \min(W, Y)\}$ 에서의 최소수리회수
 c_r : 제품의 교환비용
 c_m : 제품의 최소수리비용, (단, $c_r > c_m > 0$)
 $C(W)$: 무상보증기간에서의 기대비용
 $\bar{C}(W)$: 무상보증기간의 단위시간당 평균비용

3. 최적무상보증기간의 결정

본 장에서는 무상보증기간내의 고장에 대해서 고장형태에 따라 두가지 형태로 분류하여 수리가 불가능한 중고장인 경우에는 제품을 교환해주는 보증방침을, 수리가 가능한 경고장의 경우는 최소수리를 하는 보증방침에 따라 발생하는 무상보증기간내의 비용요인을 분석하여 비용모형을 설정하고 설정한 비용모형에 대해 총비용을 최소화하는 최적무상보증기간 W^* 를 구한다.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = h(x_1)h(x_2) \cdots h(x_{k-1})f(x_k) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & , 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k \\ & , k \geq 2 \end{aligned}$$

(0,t)에서 중고장이 발생하지 않았을 때 경고장이 k번 발생할 확률은

$$P_k(t) = \bar{F}(t) \int_0^t \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} \prod_{i=1}^k \bar{p}(x_i)h(x_i)dx, \tag{2}$$

$$= \frac{\bar{F}(t)}{k!} \left[\int_0^t \bar{p}(x)h(x)dx \right]^k$$

이므로

$$\bar{G}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \tag{3}$$

$$= \exp \left[- \int_0^t \bar{p}(x)h(x)dx \right]$$

이다.

무상보증기간내에서 중고장이 발생하여 제품을 교환할 때까지의 경고장에 의한 평균수리회수는

$$E(N | Y < W) = \frac{1}{G(W)} \sum_{k=0}^{\infty} k Pr\{(N=k) \cap (Y < W)\} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{G(W)} \sum_{k=0}^{\infty} k \int_0^W \int_0^{x_{k+1}} \cdots \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} \prod_{i=1}^k \bar{p}(x_i)h(x_i)dx_i P(x_{k+1})dF(x_{k+1})$$

$$= \frac{1}{G(W)} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{k!} \int_0^W \left[\int_0^t \bar{p}(x)h(x)dx \right]^k p(t)dF(t)$$

$$= \frac{1}{G(W)} \int_0^W \int_0^t \bar{p}(x)h(x)dx dG(t)$$

이고, 무상보증기간내에서 중고장이 발생하지 않았을 때의 경고장에 의한 평균수리회수는

$$E(N | Y \geq W) = \frac{1}{G(W)} \sum_{k=0}^{\infty} k Pr\{(N=k) \cap (Y \geq W)\} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{G(W)} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\bar{F}(t)}{k!} \left[\int_0^t \bar{p}(x)h(x)dx \right]^k$$

$$= \int_0^{W-} \bar{p}(x)h(x)dx$$

이므로, 무상보증기간 [0,W]에서의 기대비용은

$$C(W) = [c_r + c_m E(N | Y < W)]G(W) + c_m E(N | Y \geq W)\bar{G}(W) \tag{6}$$

$$= (c_r - c_m)G(W) + c_m \int_0^{W-} \bar{G}(t)h(t)dt$$

이고, 단위시간당 평균비용은

$$\bar{C}(W) = \left[(c_r - c_m)G(W) + c_m \int_0^W \bar{G}(t)h(t)dt \right] / \int_0^W \bar{G}(t)dt \quad (7)$$

이다. 따라서 무상보증기간동안의 총비용을 최소로 하는 최적무상보증기간은

$$D(W) = \frac{d\bar{C}(W)}{dW} = 0 \quad (8)$$

을 만족하는 W^* 이다.

식(7)을 미분해서 정리하면 다음 식(9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} D(W) &= [(c_r - c_m)g(W) + c_m \bar{G}(W)h(W)] \int_0^W \bar{G}(t)dt \\ &\quad - \left[(c_r - c_m)G(W) + c_m \int_0^W \bar{G}(t)h(t)dt \right] \bar{G}(W) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

또한,

$$p(W)h(W) = g(W) / \bar{G}(W) \quad (10)$$

이므로

$$p(W)h(W)\bar{G}(W) = g(W) \quad (11)$$

이고, 식(11)을 식(9)에 대입하고, 양변을 $\bar{G}(W)$ 로 나누면

$$\begin{aligned} D(W) &= [(c_r - c_m)P(W)h(W) + c_m h(W)] \int_0^W \bar{G}(t)dt \\ &\quad - (c_r - c_m)G(W) - c_m \int_0^W \bar{G}(t)h(t)dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

가 되고, 이 식(12)를 만족하는 W^* 가 무상보증기간동안 총기대비용을 최소로 하는 유한하고 유일한 최적무상보증기간이고, 이때의 단위시간당 평균비용은 다음 식(13)과 같다.

$$\bar{C}(W^*) = (c_r - c_m)P(W^*)h(W^*) + c_m \bar{P}(W^*)h(W^*) \quad (13)$$

식(12)를 만족하는 유한하고 유일한 W^* 가 존재함을 보이기 위해 $D'(W) > 0$ 임을 증명한다.

$$D'(W) = [(c_r - c_m)P(W)h(W) + (c_r - c_m)P(W)h'(W) + c_m h'(W)] \int_0^W \bar{G}(t) dt + (c_r - c_m)P(W)h(W)\bar{G}(W) - (c_r - c_m)G(W) \tag{14}$$

이고, $G'(W) = g(W)$ 이고 식(10),(11)을 대입해서 정리하면

$$D'(W) = [(c_r - c_m)P(W)h(W) + (c_r - c_m)P(W)h'(W) + c_m h'(W)] \int_0^W \bar{G}(t) dt \tag{15}$$

이다.

식(15)에서 순간고장률함수 $h(t)$, 중고장 발생률함수 $P(t)$ 가 단조증가하고, 연속이므로 $h'(W) > 0, P'(W) > 0$ 이고, $c_r > c_m > 0$ 이므로 $D'(W) > 0$ 이다. 따라서 식(12)를 만족하는 유일한 W^* 가 존재한다.

4. 수치예

본 절에서는 무상보증기간동안 발생하는 고장에 대해 고장형태에 따라 제품교환 또는 최소수리등의 방침을 적용했을 때의 비용모형을 최소로 하는 최적무상보증기간을 결정하는 수치예를 보인다.

제품의 고장시간의 분포는 weibull분포를 가정하고, 그 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} \exp(-(\lambda t)^\beta) \tag{16}$$

$, \lambda > 0, \beta > 0, t > 0$

제품의 중고장발생률함수는

$$p(t) = 1 - \exp(-2t), \quad t > 0 \tag{17}$$

로 가정한다.

본 수치예에서는 $\lambda = 1, \beta = 3, c_r = 10, c_m = 1$ 인 경우에 식(12)를 만족하는 최적무상보증기간과 식(13)을 이용하여 단위시간당 평균비용을 구했다.

최적무상보증기간 $W^* = 0.007$ 이고, 이때의 단위시간당 평균비용 $\bar{C}(W^*) = 0.00013$ 이다.

5. 결론

본 연구는 무상보증기간동안의 제품의 고장형태를 두가지형태로 분류하여 그 고장의 형태에 따라 제품을 교환해주거나, 제품을 최소수리를 해주는 보증방침에 대해 기대비용을 최소로 하는 무상보증기간을 결정하였다. 본 연구는 기존의 연구에서는 수리가 가능할 때는 항상 최소수리등의 수리를 해주는 보증정책을 연구한 것과는 달리 수리가 가능하더라도 비용등의 원인으로 인해 수리를 하는 것보다는 제품을 교환해주는 편이 더 나은 고장형태와 수리가 가능한 경미한 고장형태로 나누어 각각 제품교환 또는 최소수리를 해주는 무상보증정책을 고려함으로써 더욱더 현실적인 보증정책을 제시하였다고 할 수 있다. 따라서 이러한 고장형태에 따른 비용요인을 고려한 무상보증기간의 결정은 생산자 입장에서는 제품의 가격의 결정이나 신뢰도향상 대책의 유용한 자료로서 활용이 가능할 뿐만 아니라 경쟁업체에 대해 우위를 점할 수 있는 판매전략에도 유용하게 활용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Barlow,R.E. and Hunter,L.C.(1960), "Optimum Preventive Maintenance Policies", *Operations Research*, Vol.8, No.1, pp.59-63.
- [2] Beichelt.F. and Fischer,K.(1980), "General Failure Model Applied to Preventive Maintenance Policies", *IEEE Trans. Reliability*, Vol.R-29, No.1, pp.39-41.
- [3] Blischke,W.R. and Scheuer,EM.(1981), "Application of Renewal Theory in Analysis of the Free Replacement Warranty", *Naval Reseach Logistics Quaterly*, Vol.28, pp.193-205.
- [4] Chung,Y.B.(1993), "Age Replacement Policy for A System Considering Failure Characteristics of Components", *Journal of the KSQC*, Vol.21, No.2, pp.109-120.
- [5] Glickman,T.S. and Berger,P.D.(1976), "Optimal Price and Protection Period Decisions for A Product under Warranty", *Management Science*, Vol.22, No.12, pp.1381-1390.
- [6] Heschel,M.S.(1971), "How Much Is Guarantee Worth?", *Journal of Industrial Engineering*, pp.14-15.
- [7] Kim,W.J.(1988), "A Study on Stepdown Warranty Policy, Ph. D. Thesis, Hanyang University.
- [8] Lie,C.H. and Chun,Y.H.(1986), "An algorithm for preventive maintenance policy", *IEEE Trans.Reliability*, Vol.R-35, No.1, pp.71-75.
- [9] Menke,W.W.(1969), "Determination of Warranty Reserve", *Management Science*, Vol.15, pp.242-249.
- [10] Nguyen,D.G. and Murthy,D.N.P.(1984), "A General Model for Estimating Warranty Costs for Repairable Products", *IIE Trans.*, Vol.16, No.4, pp.379-386.
- [11] Park,K.S. and Yee,S.R.(1984), "Present Worth of Service Cost for Consumer roduct Warranty", *IEEE Trans. on Reliability*, Vol.R-33, No.5, pp.424-426.
- [12] Ritchken,P.H. and Fuh,D.(1986), "Optimal Replacement Policies for Irreparable Warrantied Items", *IEEE Trans. on Reliability*, Vol.R-35, No.5, pp.621-623.
- [13] Son,E.L.,Suh,Y.S. and Park.Y.T.(1994), "Warranty Cost Analysis and Its Application to Replacement Policy for a Repairable Warranted Item", *Journal of the KSQM*, Vol.22, No.3, pp.54-65.