論文98-35D-12-3

쌍적분 방정식을 이용한 완전도체쐐기의 점근해 유도, I : E-분극된 평면파 입사시

(Derivation of an Asymptotic solution for a Perfect Conducting Wedge by Using the Dual Integral Equation, Part I : E-Polarized Plane Wave Incidence)

河 憲 兌 *, 羅 正 雄 **

(Huen-Tae Ha and Jung-Woong Ra)

요 약

E-분극된 평면파가 입사되는, 임의의 쐐기각을 갖는 완전도체쐐기에 대해 파수영역에서의 쌍적분 방정식을 유도하였다. 급수전개된 완전도체쐐기의 정확한 경계면 전자파를 파수영역에서의 쌍적분 방정식에 대입하여 해석적으로 적분함으로써 점근해를 유도하였다. 가상공간에서 적분 결과가 0이 되는 것을 보임으로써 적분과정의 타당성을 보였다.

Abstract

Dual integral equation in the spectral domain is derived for an arbitrary angled perfect conducting wedge with E-polarized plane wave incidence. Analytic integration of the dual integral equation in the spectral domain with the exact boundary fields of the perfect conducting wedge, the well known series solution, gives the exact asymptotic solution. The validity of the integration is assured by showing that analytic integration gives the null fields in the complementary region.

I. 서 론

1864년 J.C. Maxwell이 변위전류밀도(Displacement current density)를 포함하는 소위 Maxwell 방정식을 완성한 이후 현재까지 알려진 산란문제의 해석해는 극히 소수에 불과하다[1]. 산란문제의 해석해 존재여부는 주로 주어진 산란체에 의한 산란 전자파가 변수분리 가능한가에 달려있다. 따라서 해석해 존재여부는 산란체의 구조에 의해 대부분 좌우되는데 현재까지 정확한 해석해가 알려진 구조중의 하나가 완전도체쐐기이다.

A. Sommerfeld는 평면파가 입사하는 완전도체쐐기에 대해 다중값 함수(Multivalued function)을 도입하고 영상법을 이용하여 Sommerfeld 적분 형태의 해를 얻음으로써 처음으로 완전도체쐐기에 의한 산란파의 해석해를 얻는데 성공하였다. A. Sommerfeld의 적분해는 다시 pole 특이점 기여도에 의한 기하광학해와 선적분 형태의 회절파로 나누어진다. 이 때 회절파는 쐐기각이 0°인 완전도체 반평판의 경우에는 Fresnel 적분으로 정확히 기술되지만 임의의 쐐기각을 갖는 경우에는 간결한 형태로 표현되어지지 않는다.

* 正會員, 三星電子 情報通信總括 情報通信開發센타
(Telecommunication R&D Center, Information&Communication Business, Samsung Electronics CO., LTD.)

** 正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字:1998年6月8日, 수정완료일:1998年11月23日

이에 대해 A. Sommerfeld는 임의의 쐐기각을 갖는 완전도체쐐기에 의한 회절파의 점근해에 대해 점근 급수로 근사적 표현을 구하는 시도를 하였으나 shadow boundary 근처에서는 유용한 해를 주는데 실패하였다[2].

W.Pauli는 이 회절파를 표현하는 선적분을 confluent hypergeometric 함수의 급수전개 형태로 표현할 수 있음을 보였다. 이 때 회절파의 점근해는 이 급수의 첫 항으로 근사될 수 있음을 보였는데 이 초항은 Fresnel 적분을 포함하고 있으며 shadow boundary에서도 연속적인 값을 준다[3]. W. Pauli가 제공한 완전도체쐐기에 의한 회절파의 점근해는 실험적으로도 그 정확성이 검토되어 그 타당성이 입증되었다[4-5].

한편 J.B. Keller는 GTD(Geometric theory of diffraction)를 발표하면서 완전도체쐐기에 의한 회절파 표현식을 이용하여 모서리를 갖는 유한구조에 의한 산란파를 매우 근사적으로 표현할 수 있음을 보였다[6]. 이 때 GTD 해의 오차 및 적용한계에 대한 판단은 완전도체쐐기에 대한 해석해 유도과정으로부터 도출될 수밖에 없다는 점에서 완전도체쐐기에 대한 해석해의 유도과정은 이론적 관점에서 뿐만아니라 응용적 관점에서도 중요한 의미를 갖는다. R.G. Kouyoumjian등은 GTD 해가 shadow boundary에서 해를 주지 못한다는 점에 착안하여 개량된 Pauli-Clemmow 적분을 도입하여 shadow boundary에서도 의미있는 값을 주는 UTD (Uniform theory of diffraction)을 발표하였다[7].

현재까지 완전도체쐐기에 대한 UTD 해를 구하는 방법은 다수 발표되었는데[1,8-10] 이들은 그 결과식에 가치가 있다기 보다는 그 유도과정이 갖고 있는 물리적의미 또는 수학도구의 활용 확인 측면에 의미가 있다. 본 논문에서는 E-분극된 평면파가 입사하는 완전도체쐐기에 대해 파수영역에서의 쌍적분 방정식을 유도하고 여기에 급수전개로 표현되는 정확한 경계면 전자파를 대입하여 해석적분함으로써 점근해를 구하였다. 해석적분의 과정에 대한 타당성은 가상공간에서 적분결과가 0이 됨을 보임으로써 입증하였다.

Ⅱ. 본 론

1. 파수영역에서의 쌍적분 방정식

그림 1과 같이 파수가 k인 배경매질 S_o에 놓여진, $(2-\nu)\pi$의 쐐기각을 갖고 z축과 평행한 완전도체쐐기(S_c) 기둥에 E-분극된 단위 크기의 평면파 E^i가 $-x$ 축과 ϕ'의 각을 가지며 입사할 경우 산란된 전체파 E는 다음과 같은 파수영역에서의 쌍적분 방정식을 만족한다[11].

$$E^i(\rho)+F^{-1}[g(\alpha,\beta)A(\alpha,\beta)]=\begin{cases}E(\rho), & \text{in } S_o,\\ 0, & \text{in } \overline{S_o}.\end{cases} \quad (1)$$

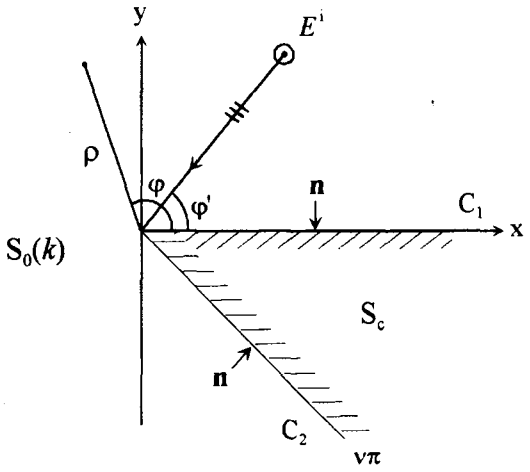

그림 1. E-분극된 평면파가 입사하는 완전도체쐐기 구조

Fig. 1. Geometry of a perfect conducting wedge with E-polarized plane wave incidence.

여기서 $g(\alpha,\beta)$는 $(\alpha^2+\beta^2-k^2)^{-1}$을 의미하는 것으로 S_o영역의 2차원 자유공간 Green 함수 표현식인

$$G(\rho,\rho')=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_{(\alpha,\beta)}e^{i\alpha(x-x')+i\beta(y-y')}d\alpha d\beta, \quad (2)$$

로부터 얻어진 것이고 $A(\alpha,\beta)$는

$$A(\alpha,\beta)=-Q(\alpha,\beta,0)+Q(\alpha,\beta,\nu\pi), \quad (3)$$

이며 이 때 $Q(\alpha,\beta,\theta)$는 다음과 같다.

$$Q(\alpha,\beta,\theta)=\int_0^{\infty}e^{-i(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)\rho}\frac{\partial E(\rho,\theta)}{\rho\partial\theta}d\rho. \quad (4)$$

한편 그림1의 구조에서 산란된 전체파의 급수 표현식[12]은

$$E(\rho,\phi)=\frac{4}{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}J_{\frac{n}{\nu}}(k\rho)\sin\left(\frac{n}{\nu}\phi\right)\sin\left(\frac{n}{\nu}\phi'\right)e^{-i\frac{n\pi}{2\nu}}, \quad (5)$$

로 주어지며 이를 식(4)에 대입하고, 식(2)에서 x방향

과 y방향의 파수를 의미하는 α와 β가 점근해의 관점에서 $|\alpha\cos\phi+\beta\sin\phi|$의 값이 배경매질의 파수 k보다 항상 작다는 성질을 이용하여 불연속 Weber-Schafheitlin 적분 공식[13] 인

$$\int_0^\infty \frac{\mu}{\rho} J_\mu(k\rho) e^{-i\alpha\rho} d\rho = e^{-i\mu\sin^{-1}(\frac{\alpha}{k})},\ 0\le|\alpha|\le k, \quad (6)$$

를 사용하고 cos 함수와 sin 함수를 지수함수로 나누어 정리하면 $Q(\alpha,\beta,0)$과 $Q(\alpha,\beta,\nu\pi)$는 각각 다음과 같이 된다.

$$Q(\alpha,\beta,0) = \frac{2}{\nu i}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{e^{-i\frac{n}{\nu}R_{\alpha,\beta}(-\phi',0)} - e^{-i\frac{n}{\nu}R_{\alpha,\beta}(\phi',0)}\right\}$$
$$= \frac{1}{\nu}\cot\left(\frac{R_{\alpha,\beta}(\phi',0)}{2\nu}\right) - \frac{1}{\nu}\cot\left(\frac{R_{\alpha,\beta}(-\phi',0)}{2\nu}\right), \quad (7.a)$$

$$Q(\alpha,\beta,\nu\pi) = \frac{2}{\nu i}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{-i\frac{n}{\nu}R_{\alpha,\beta}(-\phi',\nu\pi)} - e^{-i\frac{n}{\nu}R_{\alpha,\beta}(\phi',\nu\pi)}\right\}$$
$$= \frac{1}{\nu}\cot\left(\frac{R_{\alpha,\beta}(\phi',\nu\pi)}{2\nu}\right) - \frac{1}{\nu}\cot\left(\frac{R_{\alpha,\beta}(-\phi',\nu\pi)}{2\nu}\right) \quad (7.b)$$

여기서 $R_{\alpha,\beta}(\phi',\theta)$

$$R_{\alpha,\beta}(\phi',\theta) = \sin^{-1}\left(\frac{\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta}{k}\right)+\frac{\pi}{2}+\phi'-\theta, \quad (8)$$

로 정의되며 arcsin 함수에 대해서는 다음과 같은 관계가 성립해야 한다[13].

$$-\sin^{-1}\left(\frac{\alpha\cos\phi+\beta\sin\phi}{k}\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{\alpha\cos\phi+\beta\sin\phi}{k}\right). \quad (9)$$

한편 식(1)의 $\rho=(x,y)$는 식(2)의 2차원 자유공간 Green 함수로 부터 나온 것이므로 직각 좌표계 (x,y)를 원통좌표계로

$$x=\rho\cos\phi, \quad (10.a)$$

$$y=\rho\sin\phi, \quad (10.b)$$

와 같이 표현할 경우 자유공간을 표현하는 ϕ는 $(-2\pi,0)$, $(-\pi,\pi)$, $(0,2\pi)$등 여러가지가 있을 수 있다. ϕ 범위의 선택은 자유인데 임의로 ϕ의 범위를 $(0,2\pi)$로 정할 경우 S_o 및 $\overline{S_o}$에서의 ϕ는 다음을 만족하게 된다.

$$\phi \in (0,\nu\pi), \quad \text{in } S_o, \quad (11.a)$$

$$\phi \in (\nu\pi,2\pi), \quad \text{in } \overline{S_o}. \quad (11.b)$$

2. S_o 영역에서의 계산 : $\phi \in (0,\nu\pi)$

(1) $I_1 = F^{-1}[g(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta,0)]$의 계산

식(1)에서 $I_1 = F^{-1}[g(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta,0)]$을 I_1이라 정의할 때 I_1은 식(1), (3), 및 (7.a)로부터 다음과 같이 정의되는 I_1^a와 I_1^b의 합으로 쓸 수 있다.

$$I_1^a = \frac{1}{\nu(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\beta y)}}{\alpha^2+\beta^2-k^2}\cot\left(\frac{R_{\alpha,\beta}(\phi',0)}{2\nu}\right)d\alpha d\beta, \quad (12.a)$$

$$I_1^a = -\frac{1}{\nu(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\beta y)}}{\alpha^2+\beta^2-k^2}\cot\left(\frac{R_{\alpha,\beta}(-\phi',0)}{2\nu}\right)d\alpha d\beta. \quad (12.b)$$

식 (12.a)의 I_1^a에서 피적분 함수는 β에 대해 pole 특이점만을 갖고 있다. 그림 2는 I_1^a에서 변수 β에 대한 적분을 위한 적분경로 및 pole의 위치를 나타낸 것이다.

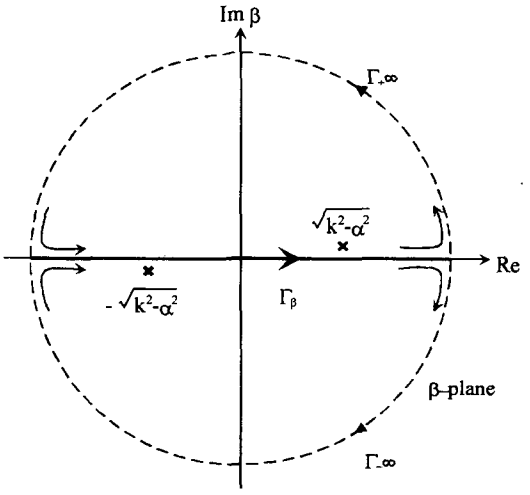

그림 2. I_1^a의 계산을 위한 복소 β-평면에서의 적분경로와 pole 특이점

Fig. 2. Integration paths and pole singularities in the complex β-plane for evaluating I_1^a.

식(12.a)에서 피적분항의 pole인 $\beta_p=\pm\sqrt{k^2-\alpha^2}$이 순수한 실수값인 경우 I_1^a는 정재파를 갖게되어 복사조건을 만족하지 않게 된다. 이러한 어려움을 극복하기 위해 $Im\{\sqrt{k^2-\alpha^2}\}>0$인 손실 매질에서의 복사조건을 도입한다[14-15]. $y>0$일 때는 그림 2의 $\Gamma_{+\infty}$를, $y<0$일 때는 $\Gamma_{-\infty}$를 각각 적분경로로 택하여 Jordan lemma와 residue 정리를 이용하면 I_1^a는 다음과 같이

쓸 수 있다.

$$I_1^a=\frac{i}{4\pi\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\sqrt{k^2-\alpha^2}y)}}{\sqrt{k^2-\alpha^2}}\cot\left\{\frac{\sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{k}\right)+\frac{\pi}{2}+\phi'}{2\nu}\right\}d\alpha,\quad y\gtrless 0. \tag{13}$$

식(13)의 적분자 α에 대해 $\alpha=k\cos w$의 cos 변환을 하고 공간좌표계 (x,y) 대신 원통좌표계인 식(10)을 대입한 뒤 하나의 적분 경로를 선정하기 위해

$$\sqrt{1-\cos^2 w}=\pm\sin w,\qquad y\gtrless 0, \tag{14}$$

의 조건을 부과하면 I_1^a는 다음과 같이 된다.

$$I_1^a=-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_{0,1}}\cot\left\{\frac{\sin^{-1}(\cos w)+\frac{\pi}{2}+\phi'}{2\nu}\right\}e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw,\quad y\gtrless 0. \tag{15}$$

식(15)의 피적분 함수중 지수함수의 $q(w)=i\cos(w-\phi)$는 $q'(\phi)=0$, $q''(\phi)\neq 0$이므로 식(15)는 $w=\phi$에서 first order saddle point 를 갖게 되는데 ϕ가 $0<\phi<\nu\pi$이므로 식(15)의 적분경로로 P_0 및 P_1을 각각 그림 3.(a) 및 3.(b)와 같이 선택하였다[8].
적분경로 P_0 및 P_1이 그림 3.(a) 및 3.(b)와 같이 결정되었으므로 식(15)의 $\sin^{-1}(\cos w)$는 식(9)로 부터

$$\sin^{-1}(\cos w)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-w, & y>0,\\ -\frac{3\pi}{2}+w, & y<0,\end{cases} \tag{16}$$

와 같이 되는데 이를 식(15)에 대입하면 I_1^a는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_1^a=\begin{cases}\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_0}\cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw, & y>0,\\ -\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_1}\cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw, & y<0.\end{cases} \tag{17}$$

한편 식(12.b)의 I_1^b는 식(12.a)의 I_1^a와 비교할 때 ϕ' 대신 $-\phi'$이 대입하고 전체부호를 반대부호로 두면 되므로 식(17)로 부터

$$I_1^b=\begin{cases}-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_0}\cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw, & y>0,\\ \frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_1}\cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw, & y<0\end{cases} \tag{18}$$

로 쓸 수 있으므로 $I_1=I_1^a+I_1^b$는 식(17)과 (18)로 부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}I_1=&-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_{0,1}}\cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw\\&+\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_{0,1}}\cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw,\quad y\gtrless 0.\end{aligned} \tag{19}$$

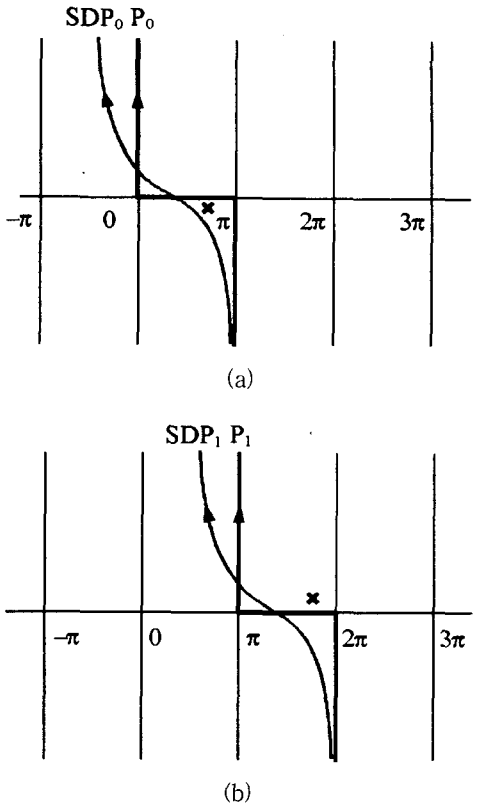

그림 3. I_1^a의 계산을 위한 복소 w-평면에서의 적분경로와 pole 특이점 (a) $y>0$ $(0<\phi<\pi)$ 일 때 (b) $y<0$ $(\pi<\phi<\nu\pi)$ 일 때

Fig. 3. Integration paths and pole singularities in the complex w-plane for evaluating I_1^a. (a) for $y>0$ $(0<\phi<\pi)$ (b) for $y<0$ $(\pi<\phi<\nu\pi)$

steepest descent path(SDP)는 saddle point인 $w=\phi$에서 식(19)의 지수함수가 최대가 되고 경로를 따라 이동함에 따라 급격히 감소하는 경로이므로 $k\rho$가 충분히 큰 경우 saddle point인 $w=\phi$ 근방에서만 계산해 주어도 충분한 근사가 된다. 이러한 이유로 식(19)의 적분 경로 P_0 및 P_1을 SDP로 변형하여 SDP 상에서 적분을 하려 하는데 이 때 saddle point인 $w=\phi$를 통과하는 SDP는 $Im\{q(w)\}=Im\{q(\phi)\}=1$을 만족하는 궤적으로써 그림3에 나타난 바와 같다.

적분 경로 $P_{0,1}$에서 $SDP_{0,1}$로의 변형은 residue 정리에 의하여 이루어진다. 식(19)의 우변 첫번째 적분항에서 피적분 함수의 pole 특이점 w_p^a는 $w_p^a=$

$\pi-\phi'<\pi$ 이고, 우변 두번째 적분항에서 피적분 함수가 pole 특이점 w_p^b는 $w_p^b=\pi+\phi'>\pi$ 인데 복사조건을 만족하기 위해서는 w_p^a 및 w_p^a에 대해 그림3과 같이 $Im\{w_p^a\}<0$ 및 $Im\{w_p^b\}>0$ 의 손실매질에서의 복사조건이 부과되어야 한다. 식(19)의 I_1은 pole 특이점에 의한 contribution I_{1g}와 SDP 상의 경로 적분항 I_{1SDP}의 합으로 주어지는데.

$$I_1=I_{1g}+I_{1SDP}. \tag{20}$$

이 때 I_{1g}와 I_{1SDP}는 각각 다음과 같다.

$$I_{1g}=H_\phi(0,\pi-\phi')\,e^{-ik\rho\cos(\phi+\phi')}+H_\phi(\pi+\phi',\nu\pi)\,e^{-ik\rho\cos(\phi-\phi')}, \tag{21.a}$$

$$I_{1SDP}=-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_{0,1}}\cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw + \frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_{0,1}}\cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw,\quad y\gtrless 0. \tag{21.b}$$

여기서 $H_\phi(\alpha,\beta)$는 $\alpha<\phi<\beta$일 때는 1, 그 외는 0이 되는 함수이다.

SDP 상에서는 $w=\phi$인 saddle point에서 $q(w)=i\cos(w-\phi)$가 최대가 되어야 하고 또한 $Im\{q(w)\}=Im\{q(\phi)\}=1$을 만족하므로 $q(w)$를 다음과 같이 치환할 수 있다[8].

$$q(w)=i\cos(w-\phi)=-s^2+i \tag{22.a}$$

또는

$$s=e^{-i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}\sin\left(\frac{w-\phi}{2}\right). \tag{22.b}$$

식(22)를 식(21.b)에 대입하면 I_{1SDP}는

$$I_{1SDP}=+\frac{e^{i(k\rho+\frac{\pi}{4})}}{2\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right)\sec\left(\frac{w-\phi}{2}\right)e^{-k\rho s^2}ds - \frac{e^{i(k\rho+\frac{\pi}{4})}}{2\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right)\sec\left(\frac{w-\phi}{2}\right)e^{-k\rho s^2}ds \tag{23}$$

가 되는데 이를 개량된 Pauli-Clemmow 적분방법[7,16]으로 근사하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_{1SDP}=-\frac{e^{i(k\rho+\frac{\pi}{4})}}{2\nu\sqrt{2\pi k\rho}}\cot\left[\frac{\pi-(\phi+\phi')}{2\nu}\right]F\left[2k\rho\cos^2\left(\frac{\phi+\phi'}{2}\right)\right] + \frac{e^{i(k\rho+\frac{\pi}{4})}}{2\nu\sqrt{2\pi k\rho}}\cot\left[\frac{\pi-(\phi-\phi')}{2\nu}\right]F\left[2k\rho\cos^2\left(\frac{\phi-\phi'}{2}\right)\right]. \tag{24}$$

이 때 uniform transition function $F(x)$는 다음과 같이 정의되어지는 함수이다.

$$F(x)=-i2\sqrt{x}e^{-ix}\int_{\sqrt{x}}^{\infty}e^{i\mu^2}d\mu. \tag{25}$$

(2) $I_2=F^{-1}[g(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta,\nu\pi)]$의 계산

식(1)에서 $I_2=F^{-1}[g(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta,\nu\pi)]$를 I_2라 정의할 때 I_2는 식(1), (3), 및 (7.b)로부터 다음과 같이 정의되는 I_2^a와 I_2^b의 합으로 쓸 수 있다.

$$I_2^a=\frac{1}{\nu(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\beta y)}}{\alpha^2+\beta^2-k^2}\cot\left(\frac{R_{\alpha,\beta}(\phi',\nu\pi)}{2\nu}\right)d\alpha d\beta, \tag{26.a}$$

$$I_2^b=-\frac{1}{\nu(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\beta y)}}{\alpha^2+\beta^2-k^2}\cot\left(\frac{R_{\alpha,\beta}(-\phi',\nu\pi)}{2\nu}\right)d\alpha d\beta. \tag{26.b}$$

식(26.a)의 I_2^a에서 공간영역의 좌표계 (x,y) 및 파수영역의 좌표계 (α,β)를 각도 $\nu\pi$ 만큼 회전시킨 좌표계를 각각 (x_o,y_o) 및 (ζ,η)로 정의하고

$$\begin{pmatrix}x_o\\y_o\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\nu\pi & \sin\nu\pi\\ -\sin\nu\pi & \cos\nu\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \tag{27.a}$$

$$\begin{pmatrix}\zeta\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\nu\pi & \sin\nu\pi\\ -\sin\nu\pi & \cos\nu\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \tag{27.b}$$

이를 식(26.a)에 대입하면 I_2^a는 다음과 같이 된다.

$$I_2^a=\frac{1}{\nu(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\zeta x_o+\eta y_o)}}{\zeta^2+\eta^2-k^2}\cot\left(\frac{R_{\zeta,\eta}(\phi',0)-\nu\pi}{2\nu}\right)d\zeta d\eta. \tag{28}$$

식(28)과 식(12.a)를 비교할 때 형태상으로는 거의 동일하며 단지 직각좌표계 (x_o,y_o)를 원통좌표계로 표현할 때

$$x_o=\rho\cos\Phi, \tag{29.a}$$

$$y_o=\rho\sin\Phi, \tag{29.b}$$

의 Φ가 식(10)의 ϕ와 $\Phi=\phi-\nu\pi$의 관계를 갖게 되어 Φ의 범위가 $(-\nu\pi,0)$에 속하는 것이 다르므로 I_2^a는 식(15)로 부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2^a=-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_{2,-1}}\cot\left(\frac{\sin^{-1}(\cos w)+\frac{\pi}{2}+\phi'-\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\Phi)}dw,\quad y_o\gtrless 0. \tag{30}$$

식(30)의 피적분 함수는 $w=\Phi$에서 first order

saddle point를 갖는데 ϕ가 $-\nu\pi<\phi<0$을 만족하므로 식(30)의 적분 경로 P_{-2} 및 P_{-1}을 각각 그림 4.(a) 및 4.(b)에 나타낸 바와 같이 선택하였다.

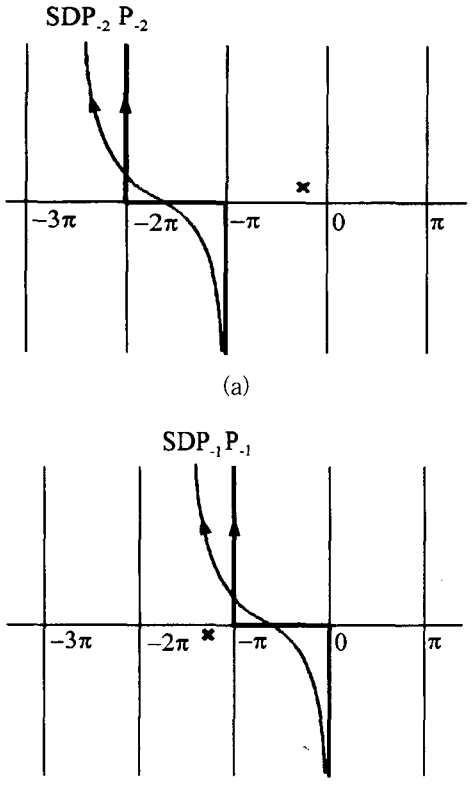

그림 4. I_2^a의 계산을 위한 복소 w-평면에서의 적분 경로와 pole 특이점
(a) $y_o>0$ $(-\nu\pi<\phi<-\pi)$ 일 때 (b) $y_o<0$ $(-\pi<\phi<0)$ 일 때

Fig. 4. Integration paths and pole singularities in the complex w-plane for evaluating I_2^a.
(a) for $y_o>0$ $(-\nu\pi<\phi<-\pi)$ (b) for $y_o<0$ $(-\pi<\phi<0)$

적분 경로 P_{-2} 및 P_{-1}이 그림4.(a) 및 4.(b)와 같이 결정되었으므로 식(30)의 $\sin^{-1}(\cos w)$는 식(9)로부터

$$\sin^{-1}(\cos w)=\begin{cases}-\dfrac{3\pi}{2}-w, & y_o>0,\\ \dfrac{\pi}{2}+w, & y_o<0,\end{cases} \tag{31}$$

가 되는데 이를 식(30)에 대입하면 I_2^a는 다음과 같이 된다.

$$I_2^a=\begin{cases}\dfrac{i}{4\pi\nu}\displaystyle\int_{P_{-2}}\cot\left(\frac{w-\phi'+\pi+\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(w-\phi)}dw, & y_o>0,\\ -\dfrac{i}{4\pi\nu}\displaystyle\int_{P_{-1}}\cot\left(\frac{w+\phi'+\pi-\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(w-\phi)}dw, & y_o<0.\end{cases} \tag{32}$$

한편 식(26.b)의 I_2^b는 식(26.a)의 I_2^a와 비교할 때 ϕ' 대신 $-\phi'$를 대입하고 전체부호를 반대부호로 두면 되므로 식(32)로 부터 I_2^b는

$$I_2^b=\begin{cases}-\dfrac{i}{4\pi\nu}\displaystyle\int_{P_{-2}}\cot\left(\frac{w+\phi'+\pi+\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(w-\phi)}dw, & y_o>0,\\ \dfrac{i}{4\pi\nu}\displaystyle\int_{P_{-1}}\cot\left(\frac{w-\phi'+\pi-\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(w-\phi)}dw, & y_o<0,\end{cases} \tag{33}$$

가 되는데 cotangent 함수가 π의 주기를 갖는다는 성질을 이용하면 $I_2=I_2^a+I_2^b$는 식(32)와 (33)으로 부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}I_2=&-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_{-1,-2}}\cot\left(\frac{w+\phi'+\pi-\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(w-\phi)}dw\\&+\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_{-1,-2}}\cot\left(\frac{w-\phi'+\pi+\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(w-\phi)}dw,\quad y_0\gtrless 0.\end{aligned} \tag{34}$$

식(34)의 적분 경로 P_{-2} 및 P_{-1}에서 그림4의 SDP_{-2} 및 SDP_{-1}로 적분 경로를 변경할 경우 식(34)의 우변 첫번째 적분항의 피적분 함수의 pole 특이점 w_p^a는 $w_p^a=-\pi-\phi'+\nu\pi>-\pi$이고, 우변 두번째 적분항의 피적분 함수의 pole 특이점 w_p^b는 $w_p^a=-\pi+\phi'-\nu\pi<-\pi$인데 이 때 $Im\{w_p^a\}>0$, $Im\{w_p^b\}<0$인 이유는 I_1을 계산할 때와 동일하다. 식(34)의 I_2는 pole 특이점에 의한 contribution I_{2g}와 SDP 상의 경로 적분항 I_{2SDP}의 합으로 주어지는데

$$I_2=I_{2g}+I_{2SDP}\ . \tag{35}$$

이 때 I_{2g}와 I_{2SDP}는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}I_{2g}=&-H_\phi(-\pi-\phi'+\nu\pi,0)\,e^{-ikp\cos(\phi+\phi'-\nu\pi)}\\&-H_\phi(-\nu\pi,-\pi+\phi'-\nu\pi)\,e^{-ikp\cos(\phi-\phi'+\nu\pi)},\end{aligned} \tag{36.a}$$

$$\begin{aligned}I_{2SDP}=&-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_{-1,-2}}\cot\left(\frac{w+\phi'+\pi-\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(w-\phi)}dw\\&+\frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_{-1,-2}}\cot\left(\frac{w-\phi'+\pi+\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(w-\phi)}dw,\quad y_0\gtrless 0.\end{aligned} \tag{36.b}$$

식(36.b)의 I_{2SDP}는 개량된 Pauli-Clemmow 적분방법을 이용하여 근사하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_{2SDP}=\frac{e^{i(k\rho+\frac{\pi}{4})}}{2\nu\sqrt{2\pi k\rho}}\cot\left(\frac{\Phi+\phi'+\pi-\nu\pi}{2\nu}\right)F\left[2k\rho\cos^2\left(\frac{\Phi+\phi'-\nu\pi}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{e^{i(k\rho+\frac{\pi}{4})}}{2\nu\sqrt{2\pi k\rho}}\cot\left(\frac{\Phi-\phi'+\pi+\nu\pi}{2\nu}\right)F\left[2k\rho\cos^2\left(\frac{\Phi-\phi'+\nu\pi}{2}\right)\right]. \quad (37)$$

식(36.a) 및 (37)에 $\Phi=\phi-\nu\pi$의 관계를 대입하면 I_{2g} 및 I_{2SDP}는 ϕ의 함수로 각각 다음과 같이 된다.

$$I_{2g}=-H_\phi(2\nu\pi-\pi-\phi',\nu\pi)\,e^{-ik\rho\cos(\phi+\phi'-2\nu\pi)}$$
$$-H_\phi(0,-\pi+\phi')\,e^{-ik\rho\cos(\phi-\phi')}, \quad (38.a)$$

$$I_{2SDP}=\frac{e^{i(k\rho+\frac{\pi}{4})}}{2\nu\sqrt{2\pi k\rho}}\cot\left[\frac{\pi+(\phi+\phi')}{2\nu}\right]F\left[2k\rho\cos^2\left(\frac{\phi+\phi'-2\nu\pi}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{e^{i(k\rho+\frac{\pi}{4})}}{2\nu\sqrt{2\pi k\rho}}\cot\left[\frac{\pi+(\phi-\phi')}{2\nu}\right]F\left[2k\rho\cos^2\left(\frac{\phi-\phi'}{2}\right)\right]. \quad (38.b)$$

식(20)의 I_1과 식(35)의 I_2를 식(1)의 좌변에 대입하면 E-분극된 평면파 입사시의 산란파의 점근식을 구할 수 있는데 이는 기존의 UTD 해[7]와 정확히 일치한다.

3. $\overline{S_0}$ 영역에서의 계산 : $\phi\in(\nu\pi,2\pi)$

(1) $I_1=I_1^a+I_1^b$의 계산

ϕ가 $\nu\pi<\phi<2\pi$일 때 식(12)의 I_1^a 및 I_1^b의 계산과정은 식(19)의 적분 경로 P_1이 saddle point ϕ를 통과하는 SDP와 폐적분 경로를 이룰수 있으므로 ϕ가 $0<\phi<\nu\pi$일 때의 계산과정과 완전히 동일하다. 따라서 ϕ가 $\nu\pi<\phi<2\pi$일 때의 $I_1=I_1^a+I_1^b$는 식(21)로부터

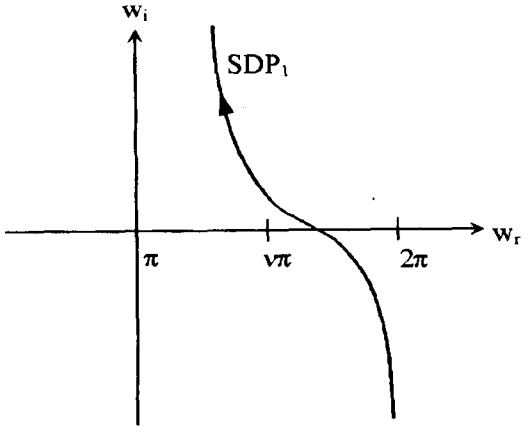

그림 5. I_1의 계산을 위한 복소 w-평면에서의 SDP
Fig. 5. SDP in the complex w-plane for evaluating I_1.

$$I_1=H_\phi(\pi+\phi',2\pi)\,e^{-ik\rho\cos(\phi-\phi')}$$
$$-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_1}\cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw \quad (39)$$
$$+\frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_1}\cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\phi)}dw$$

로 주어지며 이 때의 적분 경로 SDP_1은 그림 5에 나타낸 바와 같다.

(2) $I_2=I_2^a+I_2^b$의 계산

하지만 식(20)의 I_2^a 및 I_2^b의 계산시에는 ϕ가 $\nu\pi<\phi<2\pi$일 때 식(29)의 Φ가 $0<\Phi<2\pi-\nu\pi$가 되어 식(34)의 적분 경로 P_{-2}가 saddle point Φ를 통과하는 SDP와 폐적분 경로를 이룰 수 없게 된다. 따라서 식(34)의 적분 경로 P_{-2} 대신 다른 적분경로를 선택해야 하는데 폐적분 경로를 이룰 수 있도록 그림3의 P_0를 선택하고 cotangent 함수의 주기가 π라는 성질을 이용하면 $I_2=I_2^a+I_2^b$ 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2=-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_0}\cot\left(\frac{\sin^{-1}(\cos w)+\frac{\pi}{2}+\phi'-\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\Phi)}dw$$
$$+\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_0}\cot\left(\frac{\sin^{-1}(\cos w)+\frac{\pi}{2}-\phi'-\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\Phi)}dw. \quad (40)$$

식(16)으로부터 식(40)의 $\sin^{-1}(\cos w)$가 $\sin^{-1}(\cos w)=\pi/2-w$가 되므로 I_2는 다음과 같이 된다.

$$I_2=\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_0}\cot\left(\frac{w-\phi'-\pi+\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\Phi)}dw$$
$$-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{P_0}\cot\left(\frac{w+\phi'-\pi+\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\Phi)}dw. \quad (41)$$

residue 정리를 이용하여 적분경로 P_0를 그림3의 SDP_0으로 변형할 때 식(41) 우변 첫번째 적분항의 pole 특이점 w_p^a는 $w_p^a=\pi+\phi'-\nu\pi<\pi$이고, 우변 두번째 적분항의 특이점 w_p^b는 $w_p^b=\pi-\phi'+\nu\pi>\pi$이므로 I_2는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2=-H_\Phi(0,\pi+\phi'-\nu\pi)\,e^{-ik\rho\cos(\Phi-\phi'+\nu\pi)}$$
$$+\frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_0}\cot\left(\frac{w-\phi'-\pi+\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\Phi)}dw \quad (42)$$
$$-\frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_0}\cot\left(\frac{w+\phi'-\pi-\nu\pi}{2\nu}\right)e^{ik\rho\cos(w-\Phi)}dw.$$

식(42)에서 Φ 대신 $\phi-\nu\pi$를 대입하고 w에 대해 $w=t-\nu\pi$의 변수변환하면 I_2는

$$I_2 = -H_\phi(\nu\pi, \pi+\phi')\, e^{-ikp\cos(\phi-\phi')} + \frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_1}\cot\left(\frac{t-\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(t-\phi)}dt - \frac{i}{4\pi\nu}\int_{SDP_1}\cot\left(\frac{t+\phi'-\pi}{2\nu}\right)e^{ikp\cos(t-\phi)}dt \quad (43)$$

와 같이 되는데 이 때 SDP_1은 그림5에 나타낸 것과 동일하다. 식(39)의 결과와 식(43)의 결과를 식(1)에 대입하면 그 좌변은 정확히 0이 된다.

Ⅲ. 결 론

본 논문에서는 E-분극된 평면파가 입사되는 임의의 쐐기각을 갖는 완전도체쐐기에 대해 파수영역에서의 쌍적분 방정식을 유도하고, 경계면 전자파로 정확한 해가 알려진 급수전개 표현식을 대입하여 해석적으로 점근적분함으로써 물리공간에서는 UTD해를, 가상공간에서는 0이 되는 결과를 얻었다. 이 적분 결과로부터 쌍적분 방정식에 대한 적분 과정의 타당성은 입증되었다.

완전도체쐐기에 의한 회절파는 식(24)와 (39)에서 보듯이 2π 주기를 갖지 않으므로 그 결과식만을 놓고 볼 때 관측점의 좌표각 ϕ를 $(-2\pi,0)$, $(-\pi,\pi)$, 및 $(0,2\pi)$등을 선택할 때 마다 각각 다른 값을 얻는 것처럼 보인다. 식(24) 및 (39)의 회절파 표현식이 2π 주기를 갖지 않는 것은 완전도체쐐기 경계면 전자파 표현식이 2π 주기를 갖지 않기 때문이다. ϕ를 $(-2\pi,0)$, $(-\pi,\pi)$, 및 $(0,2\pi)$등으로 선택할 경우 2π 주기가 아니기 때문에 생기는 branch cut 때문에 $\sin^{-1}(\cos w)$가 식(16) 및 (31)과는 달리 정의되므로 결국 회절파의 표현식은 달라지지만 그 결과는 동일하게 된다.

참 고 문 헌

[1] J.J. Bowman, T.B.A. Senior, and P.L.E. Uslenghi, Eds, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shape*, North-Holland Pub. Amsterdam Netherlands, 1969.

[2] A. Sommerfeld, *Optics*, Academic Press : New York, 1967.

[3] W. Pauli, "On asymptotic series for functions in the theory of diffraction of light," *Phy. Rev.*, vol. 54, pp. 924-931, 1938.

[4] R.B. Watson and C.W. Horton, "On the diffraction of a radar wave by a conducting wedge," *J. Appl. Phys.*, vol. 21, pp. 802-804, 1950.

[5] W.W. Grannemann and R.B. Watson, "Diffraction of electromagnetic waves by a metallic wedge of acute dihedral angle," *J. Appl. Phys.*, vol. 26, pp. 392-393, 1954.

[6] J.B. Keller, "Geometrical theory of diffraction", *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 52, pp. 116-130, 1962.

[7] R.G. Kouyoumjian and P.H. Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface," *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 1448-1461, 1974.

[8] L.B. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall, 1973.

[9] C.A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York : Wiely, 1989.

[10] L. Lewin, "Wedge-diffraction functions and their use in quasioptics," *Proc. IEE*, vol. 116, pp. 71-76, 1969.

[11] 하 헌태, 나 정웅, "Wiener-Hopf 적분방정식으로 부터 파수영역에서의 쌍적분 방정식 유도에 관한 검토," 대한전자공학회논문지, 제 35권, D편, 제 6호, pp. 8-14, 1998

[12] R.F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill, New York, 1961.

[13] G.N. Watson, *The Theory of Bessel Function. Cambridge.* U.K.:Cambridge University, 1944.

[14] 나 정웅, *전자기 이론*, 대영사, 1987

[15] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th ed., Academic Press, Inc., 1995.

[16] G.L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*, Rev. Ed., IEE Electromagnetic Waves Series 1, London, 1980.

저 자 소 개

河 憲 兌(正會員) 第 35卷 第 6號 參照

羅 正 雄(正會員) 第 35卷 第 6號 參照