

평면 곡선의 교점 계산에 있어 곡선 특성화, 분할, 근사, 음함수화 및 뉴턴 방법을 이용한 Mix-and-Match 알고리즘*

김덕수**, 이순용***, 유중현**, 조영송**

A Planar Curve Intersection Algorithm : The Mix-and-Match of Curve Characterization, Subdivision, Approximation, Implicitization, and Newton iteration

Deok-Soo Kim**, Soon-Woong Lee***, Jung-Hyun Ryu** and Young-Song Cho**

ABSTRACT

There are many available algorithms based on the different approaches to solve the intersection problems between two curves. Among them, the implicitization method is frequently used since it computes precise solutions fast and is robust in lower degrees. However, once the degrees of curves to be intersected are higher than cubics, its computation time increases rapidly and the numerical stability gets worse. From this observation, it is natural to transform the original problem into a set of easier ones. Therefore, curves are subdivided appropriately depending on their geometric behavior and approximated by a set of rational quadratic Bezier curves. Then, the implicitization method is applied to compute the intersections between approximated ones. Since the solutions of the implicitization method are intersections between approximated curves, a numerical process such as Newton-Raphson iteration should be employed to find true intersection points. As the seeds of numerical process are close to a true solution through the mix-and-match process, the experimental results illustrates that the proposed algorithm is superior to other algorithms.

Key words : Intersections, Planar curve, Bézier curve, Hodograph, Curve characterization, Implicitization, Newton-Raphson

1. 서 론

곡선 및 곡면의 교점 계산은 CAD/CAM 시스템, 컴퓨터 그래픽스 시스템, 지리정보 시스템, 계산 기하학에서의 많은 문제들 등과 같이 기하에 관련된 많은 응용에서 자주 사용되는 근본적이고 중요하지만 실질적으로 매우 어려운 문제이다.

좋은 교점 계산 알고리즘은 빠르게(efficiency of

the algorithm) 정확한 해를 구해야 하며(precision of the solution) 다양한 입력 데이터에서도 잘 수행되어야(robustness of the algorithm) 한다. 곡선 및 곡면간의 교점 계산을 위해 다양한 접근 방법에 기초하여 많은 알고리즘들이 개발되어 왔으나 이와 같은 세 가지의 요구 조건을 동시에 만족하는 알고리즘을 찾기는 쉽지 않다¹⁾.

본 논문은 두 개의 임의의 차수의 Bezier 곡선들간의 교점을 계산하는 Mix-&-Match 알고리즘이라 불리는 새로운 알고리즘을 소개한다. 본 논문에서는 평면 곡선을 그 대상으로 하며, 주어진 두 개의 곡선들이 접하거나 중첩되는 경우에 대해서는 논의의 대상에서 제외한다.

*본 연구는 1996년도 한국과학재단의 연구비(과제 번호:961-1007-062-2) 지원에 의하여 수행되었음.

**한양대학교 산업공학과

***(주) 삼성 코닝

본 논문에서 제안하는 Mix-&-Match 알고리즘의 이해를 돕기 위해서 2절에서는 문헌 조사를 통해서 기존의 알고리즘들의 장, 단점들을 설명한다. 3절은 본 논문의 본론으로서 제안하는 알고리즘에 관하여 상세히 설명하며, 4절에서는 본 논문에서 제안한 Mix-&-Match 알고리즘의 특징과 수행도에 대해서 다른 알고리즘과 비교 분석한 자료를 제시한다.

2. 문헌 조사

평면 곡선들 간의 교점 계산에 대한 연구들은 대체로 뉴턴-랩슨 순환법(Newton-Raphson iteration), 분할법(subdivision), 근사법(approximation), 음함수화법(implicitization) 등과 같이 분류될 수 있다.

잘 알려져 있듯이 뉴턴-랩슨 순환법은 좋은 초기 해가 주어지면 구하고자 하는 해에 아주 빠르게 수렴하지만, 초기 해가 좋지 않을 경우 엉뚱한 해로 수렴하거나 발산할 수도 있어 초기 해에 매우 의존적이다. 다만, 순환법의 변종이라고 할 수 있는 Bézier 클리핑의 경우는 초기 해를 필요로 하지 않는다^[10].

Bézier 분할법과 같은 분할법은 원래의 문제를 몇 개의 더 간단한 문제들로 분할한 다음에 이들 간의 교점 계산을 재귀적으로 수행하는 방법이다. 이 방법은 초기 해를 계산하는 과정을 필요로 하지 않지만, 수렴 속도가 느리고 기억 장소를 많이 필요로 한다^[6].

근사법은 개념적으로 가장 간단하며 프로그램으로 구현하기도 쉽다. 이 방법은 곡선들을 선분이나 원호와 같은 낮은 차수의 곡선으로 근사하여, 근사한 곡선들 간의 교점으로 원래 곡선에 대한 교점을 계산한다. 좋은 해를 갖기 위해서는 많은 계산과 기억 장소가 필요하다.

음함수화 방법은 두 곡선들간의 교점 계산의 문제를 하나의 변수를 갖는 다항식의 문제로 변환시킨다. Sederberg^[15]에 의하면, 이 방법은 4차 이하의 곡선의 경우 기존의 다른 알고리즘에 비해서 가장 빠른 방법이라고 한다. 그러나, m차의 곡선과 n차의 곡선에 대한 교점을 계산하는데, m*n차의 다항식이 만들어지므로^[14], 다항식의 차수는 교차하는 곡선들의 차수에 대해서 2차적으로 증가한다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, 차수가 각각 7과 8인 두 개의 곡선이 교차하는 경우에 교점에 대한 다항식의 차수는 무려 56차나 된다. 이 때문에 계산 시간이 매우 빠르게 증가할 뿐만 아니라, 수치 오차 또한 매우 커지게 된다. 또한, 종결식의 계산과 교점 다항식을 계산하

기 위한 연산의 전 과정을 통해서 다항식의 계수에 매우 큰 수치 오차가 누적되므로, 해의 질을 떨어뜨리는데 결정적인 영향을 미치게 된다.

3. Mix-&-Match 알고리즘

본 논문에서 소개하는 Mix-&-Match 알고리즘은 곡선의 모양에 따라 곡선의 특성점을 찾아내서, 이들 점에서 곡선을 분할한다. 그 후, 각 곡선 조각을 유리 2차 Bézier 곡선으로 근사시킨 다음, 근사 곡선들 간의 교점 계산을 효율적으로 수행하여 초기해를 계산하고, 이 초기해를 이용해서 뉴턴-랩슨 순환법을 수행하여 원하는 교점을 계산한다.

근사 곡선간의 교점 계산을 효율적으로 수행하기 위하여 두 개의 유리 2차 Bézier 곡선간에는 음함수화법을 이용하여 교점을 구하며, 그 결과를 뉴턴-랩슨 순환법의 초기해로 사용한다.

본 논문에서 교점을 계산하고자 하는 평면 곡선인 n차의 Bézier 곡선은 다음과 같이 정의할 수 있다^[2,13].

$$C(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t) \quad (1)$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0, 1]$$

3.1 곡선의 분할

임의의 Bézier 곡선을 분할함에 있어 주어진 곡선을 일정한 파라미터 간격이나 현의 길이 등과 같은 기준으로 나누는 방법을 생각해 볼 수 있다. 이 방법은 얼마나 많은 조각들로 나눌 것인가에 대한 이론적인 배경이 없을 뿐만 아니라, 주어진 곡선을 보다 낮은 차수 - 예를 들어 선분 - 의 곡선으로 근사할 경우에 첩점 등과 같은 부위에서 매우 심각한 근사 오차를 유발할 가능성이 크다. 이 때문에 본 논문에서는 곡선의 형상 특성을 정의하고, 주어진 곡선의 형상 특성점을 찾아내어 그 점에서 곡선을 분할하여 주어진 곡선을 다수의 간단한 곡선 조각들의 집합으로 변환시키는 방법을 사용하였다.

곡선의 형상을 분석하는 기법은 기존에 여러 가지 문헌에서 보고되고 있으며^[3,17,18], 특히 본 논문에서는 Hodograph를 이용하여 곡선의 형상을 분석하는 방법을 사용하였다^[8]. 참고문헌 8은 주어진 Bézier 곡선의 형상을 그 곡선의 Hodograph와 원점과의 상대적인 위치를 이용하여 Bézier 곡선상에 존재하는 변곡점, 첩점, 그리고 켈레점과 같은 특성점의 존재를 판

단하고 계산하는 방법을 제시하고 있으며, 특히 3차 곡선의 경우에 대하여 자세히 논하고 있다. 만약에 어떤 곡선이 변곡점과 첨점이 없고, 곡선의 접선뿔(tangent cone)의 내각이 π 를 넘지 않는다고 하면, 그 곡선은 단순곡선이라고 정의된다.

임의의 매개 변수 곡선을 $c(t)=(x(t), y(t))$ 라면, 곡률 κ 는 다음과 같이 정의된다^[2].

$$\kappa = \frac{|c(t) \times c'(t)|}{|c'(t)|^3} \quad (2)$$

변곡점은 곡률이 사라지는 곡선상의 점으로 정의되기 때문에, 다음의 식

$$c(t) \times c'(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x(t) & y(t) & 0 \\ x'(t) & y'(t) & 0 \end{vmatrix} = \{x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)\} \vec{k} = \vec{0} \quad (3)$$

은 곡선 $c(t)$ 위의 변곡점이 되는 조건을 제공한다. 따라서, 다음과 같은 식을 정의하면

$$F(t) = x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t) \quad (4)$$

$F(t)=0$ 에 대한 해는 곡선 위의 변곡점을 정의하며^[3], 이 다항식을 다항식 해석기(polynomial solver)로 풀면 주어진 곡선상의 변곡점을 구하게 된다. 참고로 다항식 해석기는 Muller 방법을 이용한 것이며, 인터넷 상에서 내려 받기(down load)를 한 소스 코드(source code)로 구현하였다^[4].

첨점은 주어진 곡선의 일차 미분값이 사라지는 점으로 정의할 수 있다. 첨점을 갖는 곡선은 그 점에서 C^0 연속은 만족하지만, C^1 연속성은 보장되지 않는다. 따라서, 첨점을 가진 곡선을 몇 개의 낮은 차수의 곡선으로 근사하고자 할 때, 첨점에서 곡선을 분할한 후 각각을 근사화 하는 것이 전체 곡선의 근사 오차를 줄이는 데 효과적이다. 곡선 위의 첨점은 $x(t)=0$ 와 $y(t)=0$ 두 식을 동시에 만족하는 파라미터 값에서 발생하므로 주어진 곡선에서 최대한 $n-1$ 개가 있을 수 있다.

¹식 (4)에서 $F(t)$ 의 차수는 $x(t)$ 와 $y(t)$ 의 차수가 $n-1$ 이고 $x'(t)$ 와 $y'(t)$ 의 차수가 $n-2$ 이기 때문에 $2n-3$ 인 것같이 보이지만, 실질적으로 식을 전개하면 차수가 가장 높은 항이 없지기 때문에 항상 $2n-4$ 가 된다.

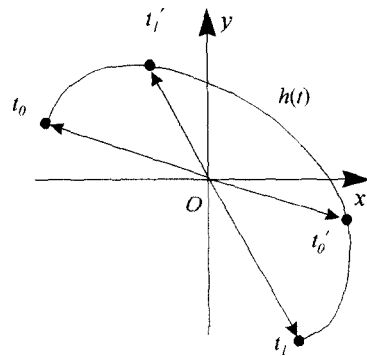


Fig. 1. Conjugate tangent vectors in the hodograph of a curve.

주어진 곡선이 변곡점이나 첨점을 갖지 않더라도 곡선의 접선뿔(Tangent cone)^[5]의 내각이 π 를 넘게 되면, 매개변수의 유효 영역이 $[0, 1]$ 인 유리 2차 Bézier 곡선으로 근사시키기 어렵게 되어, 차후에 유리 2차 곡선간의 교점을 계산하는 데 있어 문제점을 야기시킬 수 있게 된다. 따라서, 이와 같은 곡선의 경우도 곡선을 분할하여 각 곡선 조각들이 매개변수의 영역을 $[0, 1]$ 로 가지는 유리 2차 Bézier 곡선으로 근사시킬 수 있게 한다. 이는 곡선 위의 켈레점을 찾는 문제와 같다.

켈레점이란 주어진 곡선에서 한 끝점에서의 접선 벡터와 평행한 접선벡터가 발생하는 점으로 정의된다. 따라서, 주어진 곡선의 접선뿔의 각도가 π 를 넘을 때는 켈레점이 존재하게 된다. 따라서, 변곡점과 첨점이 없는 곡선의 양 끝점의 켈레점을 모두 찾고 그 점에서 곡선을 분할하면 각 곡선 조각들은 단순 곡선이 된다. 변곡점과 첨점이 없으면서 접선뿔의 내각이 π 보다 큰 곡선의 Hodograph, $h(t)$, 가 Fig. 1과 같이 주어진다고 가정할 경우, $h(t_0)$ 점에 대응하는 켈레점은 $h(t_0)$ 와 원점 O를 지나는 직선과 $h(t)$ 와

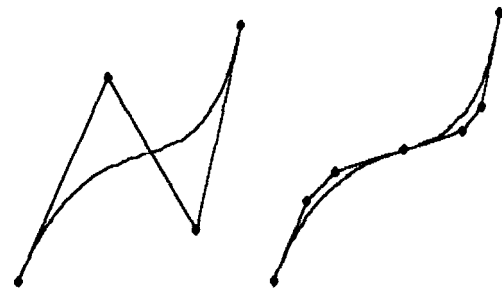


Fig. 2. A cubic Bézier curve with one inflection point is subdivided at the inflection point.

의 교점 $h(t_0)$ 로써 주어진다. $h(t_1)$ 에 대응하는 컬레점도 유사하게 구할 수 있다.

Fig. 2는 하나의 변곡점을 갖는 3차 Bézier 곡선을 보여 주고 있다. 이 곡선의 변곡점에서 분할이 수행된다면 2개의 단순곡선으로 나누어 진다.

3.2. 유리 2차 Bézier 곡선으로의 근사

변곡점과 첨점, 그리고 컬레점들과 같은 특성점들의 매개 변수값은 그 곡선의 Hodograph로부터 쉽게 계산할 수 있다. 이론적으로는 De Casteljau 알고리즘과 같은 직접적인 방법을 적용하여 이들 특성점에서 곡선을 분할해서 단순 곡선들의 집합으로 만들 수 있다. 그러나, 본 알고리즘에서는 주어진 곡선이 어디서 분할되면 원래의 곡선이 단순 곡선의 집합으로 나타날 것인가의 정보만을 필요로 하므로, 주어진 곡선 상의 특성점에 해당되는 매개 변수 값만을 저장하는 방법을 택하여 계산의 효율이 높도록 설계하였다.

유리 2차 Bézier 곡선은 다음과 같이 정의할 수 있다^[2-13].

$$Q(t) = \frac{w_0 b_0 B_0^2(t) + w_1 b_1 B_1^2(t) + w_2 b_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)} \quad (5)$$

$$t \in [0, 1]$$

Fig. 3에서 보이듯이 단순곡선은 유리 2차 Bézier 곡선으로 쉽게 근사될 수 있다. 원래 곡선의 양끝 조정점을 그대로 유리 2차 곡선의 끝 조정점으로 사용하고, 중간 조정점은 양 끝점에서의 접선간의 교점으로 계산한다. 근사하고자 하는 유리 곡선을 표준형으로 볼 수 있기 때문에 양끝의 가중치, w_0 와 w_2 는 1로 둘 수 있으며, w_1 은 근사하고자 하는 곡선 위를 지나는 점 P 를 이용하여 구할 수 있다^[2].

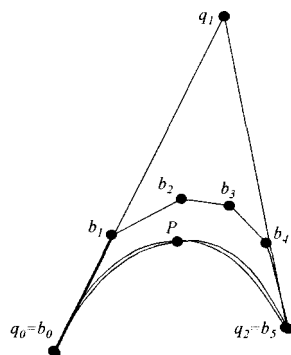


Fig. 3. Approximation of a simple Bézier curve of degree 5 using a rational quadratic Bézier curve.

3.3 유리 2차 Bézier 곡선들 간의 교점 계산

교점을 계산하고자 하는 곡선 $C_1(s)$ 와 $C_2(t)$ 이 각각 $Q_1=\{Q_{1i}(u_i) | 1 \leq i \leq n_1, i \text{는 정수}\}$ 과 $Q_2=\{Q_{2j}(v_j) | 1 \leq j \leq n_2, j \text{는 정수}\}$ 로 근사 되었다고 하자. 이때 n_1 과 n_2 는 각 곡선의 기하학적인 복잡도에 따라 결정되는 유한한 정수이다. 따라서, 유리 2차 곡선 집합 Q_1 과 Q_2 로부터 구한 모든 교점들은 원래 곡선 $C_1(s)$ 와 $C_2(t)$ 간의 교점을 구하기 위한 초기 해를 만들게 된다.

일반적으로 매개 변수 곡선은 항상 음함수식으로 변환될 수 있으며, 이 과정을 음함수화(implicitization)라고 부른다^[11,12,14]. 1차나 2차의 다항식인 경우에는 직접적인 방법으로 음함수화가 쉽게 가능하며, 고차 다항식의 경우는 종결식 (resultant)을 이용하여 기계적으로 구하는 방법이 알려져 있다^[4,5]. 음함수화 방법을 유리 2차 Bézier 곡선들 간의 교점 계산에 적용하면, 4차의 교점에 관한 다항식을 만들어 낸다. 4차의 다항식에 대해서는 Ferrari 방정식으로 알려진 일반적인 해법이 존재하며, 이 방법은 수치적인 과정이 아니기 때문에 4차 방정식의 해를 신뢰성 있고, 빠르게 얻을 수 있다^[10].

교차하는 두 개의 유리 2차 Bézier 곡선들을 각각 $Q_1(u)$ 와 $Q_2(v)$ 라고 하자. 이 때, $Q_1(v)$ 가 식 (5)와 같이 주어진다면 이를 이용하여 아래의 식을 만들 수 있다.

$$x(v) = w_0 x_0 - 2w_1 x_1 + w_2 x_2 v^2 + 2(-w_0 x_0 + w_1 x_1)v + w_0 x_0$$

$$y(v) = w_0 y_0 - 2w_1 y_1 + w_2 y_2 v^2 + 2(-w_0 y_0 + w_1 y_1)v + w_0 y_0$$

$$w(v) = (w_0 - 2w_1 + w_2)v^2 + 2(-w_0 + w_1)v + w_0 \quad (6)$$

만일

$$V_x(x, v) = w(v)x - x(v)$$

$$V_y(y, v) = w(v)y - y(v) \quad (7)$$

라면, $x=x(v)/w(v)$ 이고, $y=y(v)/w(v)$ 일때 $V_x(x, v)=V_y(y, v)=0$ 가 항상 성립한다. 이것은 x, y 의 값이 곡선 $Q_2(v)$ 상에 있을 경우에는 항상 V_x 와 V_y 가 공통근을 가진다는 것을 의미한다. 식 (6)은 모두 v 에 관한 2차 다항식이기 때문에 식 (7)은 아래와 같이 재정리될 수 있다.

$$V_x(x, v) = \varphi_2 v^2 + \varphi_1 v + \varphi_0$$

$$V_y(y, v) = \gamma_2 v^2 + \gamma_1 v + \gamma_0 \quad (8)$$

식 (8)의 두 다항식의 종결식은 다음과 같이 주어진다.

$$R(V_x, V_y) = \begin{vmatrix} (\varphi_2 \gamma_1) & (\varphi_2 \gamma_0) \\ (\varphi_1 \gamma_0) & (\varphi_0 \gamma_1) \end{vmatrix}$$

$$(\varphi_i \gamma_j) \equiv \varphi_i \gamma_j - \varphi_j \gamma_i \quad (9)$$

여기서 ϕ_i 와 γ_j 가 각각 x 와 y 에 대한 선형식이기 때문에, 식 (9)는 적당한 계수 $k_i, i=1, \dots, 6$, 에 대해서 다음과 같은 2차 방정식으로 변환이 될 수 있다.

$$R(V_x, V_y) = k_1x^2 + k_2xy + k_3y^2 + k_4x + k_5y + k_6 \quad (10)$$

$V_x(x, v)$ 와 $V_y(y, v)$ 가 공통근을 갖기 위해서는 종결 식이

$$R(V_x, V_y) = 0 \quad (11)$$

조건을 만족하여야 하며, 이 때 식 (11)이 $Q_2(v)$ 의 음함수 표현이다. 음함수화된 $Q_2(v)$ 의 각 항에 매개 변수로 표현된 $Q_1(u)$ 를 적절히 대입하면 아래와 같은 다항식을 얻을 수 있다.

$$k_1 \left[\frac{x(u)}{w(u)} \right]^2 + k_2 \left[\frac{x(u)}{w(u)} \right] \left[\frac{y(u)}{w(u)} \right] + k_3 \left[\frac{y(u)}{w(u)} \right]^2 + k_4 \left[\frac{x(u)}{w(u)} \right] + k_5 \left[\frac{y(u)}{w(u)} \right] + k_6 = 0 \quad (12)$$

여기서 $w(u), x(u), y(u)$ 가 모두 u 에 관한 2차 다항 식이고, $w(u) \neq 0$ 이기 때문에, 식 (12)는 u 에 관한 4차 방정식이 되며 이 식의 근은 2차 곡선 $Q_1(u)$ 와 $Q_2(v)$ 의 교점을 의미한다. 이 식으로부터 구한 u 가 유효 범위 내에 존재한다면 그 결과는 $Q_1(u)$ 곡선상의 윗은 교점이 된다. 계산된 교점의 $Q_1(v)$ 상의 매개 변수 v 의 값을 찾는 것은 inversion 프로세스²를 통해서 이루어 진다.

$Q_1(u)$ 와 $Q_2(v)$ 간의 교점을 계산하는 과정을 간단히 정리하면 다음과 같다.

단계 1. 종결식을 이용해서 곡선 $Q_2(v)$ 의 음함수식 $R(x, y)=0$ 을 구한다.

단계 2. 매개 변수식 $Q_1(u)=(x(u), y(u))$ 를 음함수식 $R(x, y)=0$ 에 대입해서 $R(x(u), y(u))=0$ 를 얻는다.

단계 3. Ferrari 방정식을 이용해서 다항식 $R(x(u), y(u))$ 의 모든 실근을 구한다. 이들 근은 $Q_1(u)$ 상의 교점의 매개 변수값을 의미한다.

단계 4. 단계 3에서 계산한 매개 변수에 대응되는 $Q_1(u)$ 상의 교점의 좌표값을 계산한다.

단계 5. Inversion 프로세스를 이용하여 곡선 $Q_2(v)$

²매개 변수 t_0 가 주어졌을 때, $x(t)/w(t), y(t)/w(t)$ 에 대한 식은 곡선 $C(t)$ 위의 이에 대응되는 좌표값 (x_0, y_0) 를 쉽게 계산할 수 있다. 종결식을 이용하면 반대의 작업도 가능하다. 즉, 곡선 $C(t)$ 위의 어떤 점 (x_0, y_0) 이 주어졌을 때, 이에 대응되는 매개 변수값 t_0 를 계산할 수 있다. 이 과정을 inversion 프로세스라고 한다.

상의 대응되는 매개 변수값을 구한다.

3.4. 필터링 과정

주어진 곡선간의 교점수가 많지 않을 경우에도 그 곡선들의 형상이 복잡하다면 많은 수의 유리 2차 곡선으로 근사 될 수 있다. 이 경우에 모든 초기 해를 계산해야 하는 유리 2차 곡선간의 교점 계산을 위한 조합의 수는 매우 커지게 되고 교점 계산에 드는 비용도 그만큼 많이 들어 간다.

따라서, 두 개의 유리 2차 곡선을 포함하는 바운딩 박스들의 중첩 여부에 관한 검증을 실제 교점 계산 이전에 수행하는 것이 도움이 될 경우가 많다. 만약에 바운딩 박스가 중첩이 되지 않으면 두 개의 유리 2차 Bézier 곡선들 간의 교점을 계산할 필요가 없게 된다. 계산의 효율을 위하여 바운딩 박스를 만드는 방법을 다음과 같이 개발하였다.

유리 2차 Bézier 곡선이 표준형($w_1=w_2=1$)으로 되어 있다고 가정하자. Fig. 4에서 보듯이, 가중치 점 a_0 와 a_1 이 알려져 있으면, 표준형에서 중간 가중치 w_1 는 쉽게 구할 수 있다³. 반대로 w_1 이 알려져 있으면 a_0 와 a_1 을 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다. 점 a_0 와 a_1 을 선분 q_0q_1 과 선분 q_2q_1 을 $t:1-t$ 로 각각 분할하는 점이라고 가정을 하자. 그러면 다음의 식들이 만족된다.

$$a_0 = (1-t)q_0 + tq_1 \quad (13)$$

$$a_1 = (1-t)q_2 + tq_1 \quad (14)$$

$$\text{ratio}(q_0, a_0, q_1) = \text{ratio}(q_2, a_1, q_1) = w_1 \quad (15)$$

이기 때문에, t 의 값은 다음과 같이 계산된다.

$$t = \frac{w_1}{1+w_1} \quad (16)$$

선분 q_0q_2 에 평행하고 곡선에 접하는 선분 a_0a_1 을 구하면 사각형 $q_0a_0a_1q_2$ 를 포함하는 x, y 좌표계에 평행한 바운딩 박스를 손쉽게 만들 수 있다.

이와 같은 필터링 과정을 통하여 바운딩 박스가

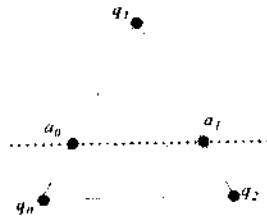


Fig. 4. A bounding box using the rectangle q_0, a_0, a_1, q_2 includes the rational quadratic Bézier curve.

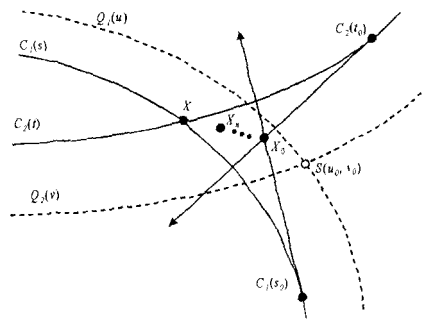


Fig. 5. Newton-Raphson iteration.

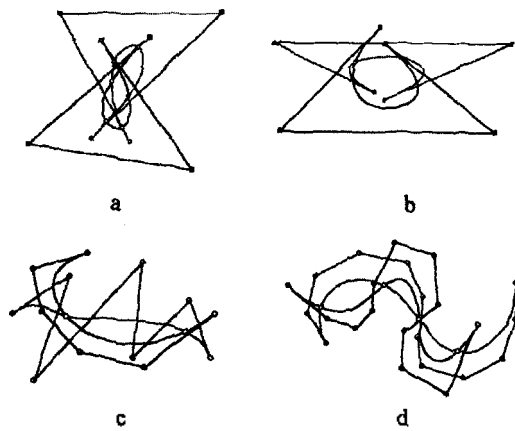


Fig. 6. Examples of intersection points computation between two cubic curves: a) 6 intersections, b) 4 intersections, c) 2 intersections, and d) 4 intersections.

중첩하지 않는 경우를 무시하면 실제로 교차하지 않는 곡선들 간의 교점 계산에 드는 시간을 상당량 줄여 주게 된다.

3.5 뉴턴-랩슨 순환법의 적용

Bézier 곡선들 간의 실제 교점은 유리 2차 곡선들 간의 교점을 초기 해로 놓고 뉴턴-랩슨 순환을 이용하여 구하게 된다. 뉴턴-랩슨 순환은 잘 알려져 있으므로 간단히 언급하면, 초기해 $S(u_0, v_0)$ 에서부터 교점 $X_n \approx X$ (X 는 실제 교점)으로 접근하는 과정은 Fig. 5와 같다.

Fig. 6은 알고리즘의 구현의 결과를 보여 준다. Bézier 곡선들 간의 교점에 대한 다양한 예들이다.

4. 알고리즘의 수행도 평가

4.1 Mix-&-Match 알고리즘 자체에 관한 분석

본 논문에서 제안한 알고리즘의 특성과 수행도를 알아 보기 위해서 3차 곡선을 대상으로 몇 가지 실험을 해 보았다. 실험 대상이 되는 곡선은 난수로 발생시킨 200 쌍의 Bézier 곡선들이다. 실험은 다음의 세 가지 질문에 답할 수 있게 설계되었다.

- 1) 초기해 S와 교점 X_n 사이의 거리
- 2) 초기 해로부터 교점 X_n 으로 수렴하는 반복 횟수 (tolerance $10e-6$)
- 3) 초기 해의 계산과 초기 해로부터 뉴턴-랩슨 순환법이 진짜 해를 구하는 것의 비율

1)의 결과는 1.474로 나왔는데, 200 쌍의 3차 Bézier 곡선들에 대한 조정 다각형의 평균 길이가 280.73임을 감안할 때, 초기해와 X_n 의 거리는 아주 미미하다는 것을 알 수 있다.

2)는 3.195회로 초기해 S로부터 거의 3회 정도의 반복만 수행하면 만족하는 범위 내의 교점을 계산할 수 있다는 것이다. 이것은 제안한 알고리즘으로 계산한 초기 해가 매우 좋음을 의미한다고 볼 수 있다.

3)은 전체시간 중에서 초기해를 계산하는 데 걸리는 시간이 81.9%로 나왔다. 3회 만에 교점에 접근할 수 있는 좋은 해를 만들기 위해서 걸리는 시간이 그만큼 많이 걸린다는 것을 알 수 있으며, 전체적인 계산 시간을 줄이기 위해서는 비중을 많이 차지하는 초기해를 계산하는 부분을 줄여야 할 것이다.

4.2 기존 알고리즘들과의 상대 분석

교점 계산 알고리즘의 수행도 평가에 대한 Sederberg의 보고^[15]에 따르면 Bézier 분할 방법(Bézier subdivision method), 간격 분할 방법(interval subdivision method), 그리고 음함수화 방법(implicitization approach) 중에서 음함수화 방법이 5차 미만의 경우에서는 가장 빠르다고 했다. Sederberg는 계산 시간만으로 다른 알고리즘들과 비교했으나, 여기서는 교점의 수와 곡선의 기하학적 복잡도를 기준으로 알고리즘의 수행도의 측면에서 다른 알고리즘과 비교할 수 있도록 하였다.

실험을 수월하게 하기 위해서 대상이 되는 곡선의 차수를 3, 4, 그리고 5차로 제한하기로 한다. Bézier 곡선들의 쌍들은 그 점들의 좌표값이 100에서 300사이의 일양 분포(uniform distribution)를 따르는 난수를 사용해서 만들었다. 실험에서 고려된 교점의 수는 1, 2, 3, 4이고, 곡선의 복잡도를 나타내기 위해서는 주어진 곡선의 쌍에 대한 단순곡선 절편의 조합의 수가 1, 2, 3, 4, 6, 9인 것을 사용했다. 각각의 경우에 대해서 20개의 Bézier 곡선들의 쌍을 생성하였다.

실험 결과를 보면, 실행시간의 관점에서는 Fig. 7에서 보이듯이, 제안된 알고리즘은 3차에서는 음함

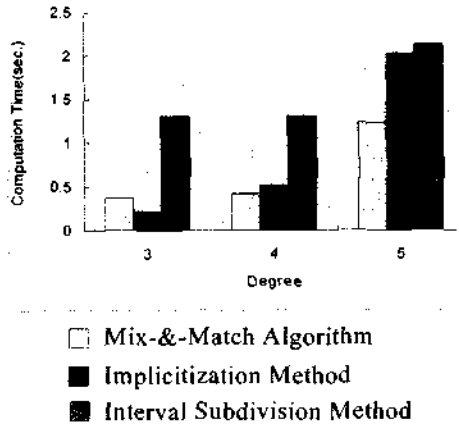


Fig. 7. Computation time for the each degree.

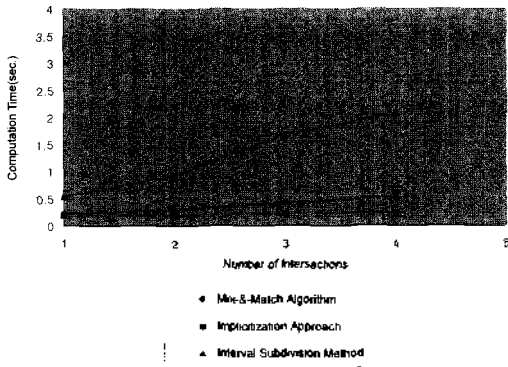


Fig. 8. Case of intersection computation between cubic Bézier curves.

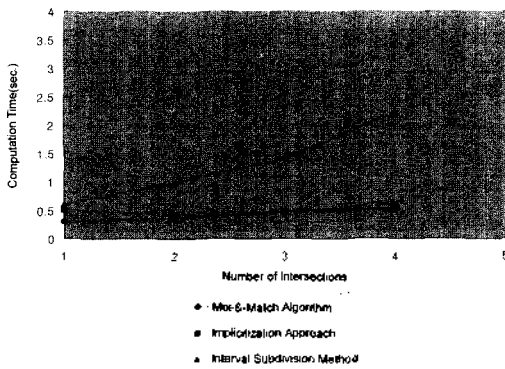


Fig. 9. Case of intersection computation between quartic Bézier curves.

수화 방법에 비해서 약간 뒤지지만, 3차 이상에서는 간격 분할법은 물론이고, 음함수화 방법을 따라 잡게 된다. 음함수화 방법의 계산 시간은 차수에 따라 급속하게 증가하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 8, 9, 10은 3차, 4차 및 5차 Bézier 곡선에서의 교점 개수와 계산 시간과의 관계를 보여주는 그림이다. 이 실험의 결과는 본 알고리즘과 음함수를 이용한 알고리즘의 수행도는 교점을 구하는 곡선들의 차수가 증가하면서 계산 시간이 다소 증가하지만, 실제적인 교점의 개수에 무관하게 거의 일정하다는 것을 알 수 있다. 이것은 전체 계산 시간에 대해서 초기해를 계산하는 과정이 지배적이고 교점의 수에 관계없이 일정한 계산 시간이 소요되기 때문에, 교점의 수에 다소 선형적인 계산 시간이 소요되는 반복적인 작업은 무시할 만하다는 의미로 해석할 수 있다.

한편, 간격 분할의 수행도는 개략적으로 교점의

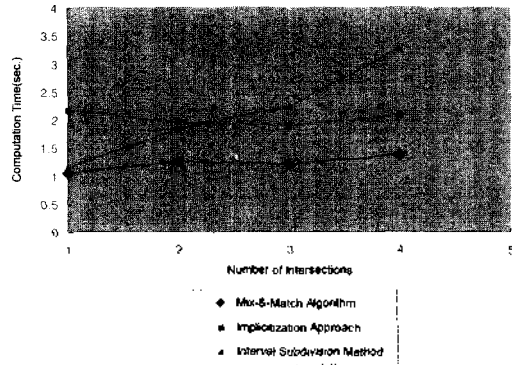


Fig. 10. Case of intersection computation between quintic Bézier curves.

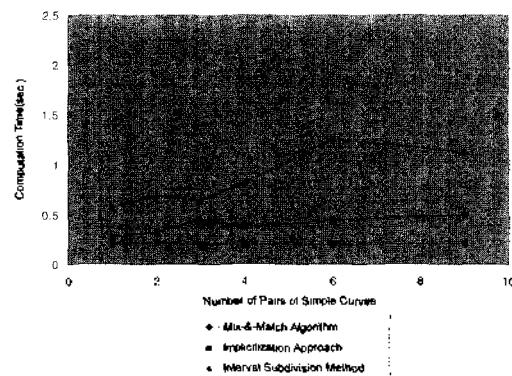


Fig. 11. Case of intersection computation between cubic Bézier curves.

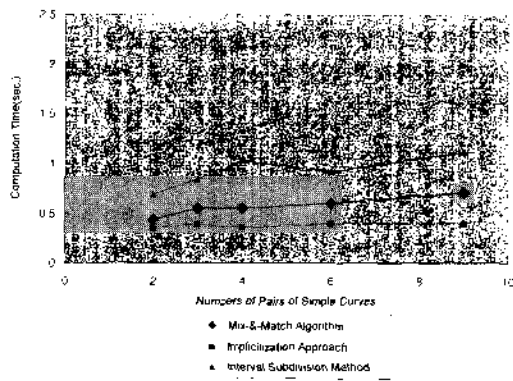


Fig. 12. Case of intersection computation between quartic Bézier curves.

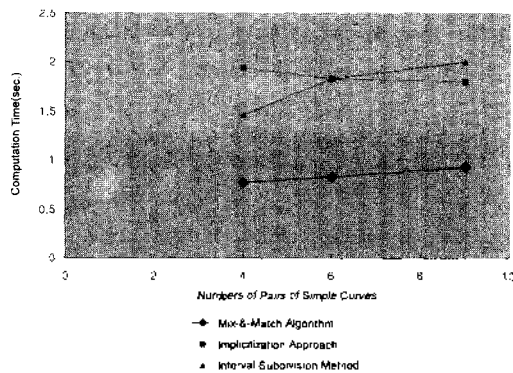


Fig. 13. Case of intersection computation between quintic Bézier curves.

수에 선형관계를 갖고 있다고 말할 수 있다. 이것은 각각의 반복적인 분할에서 하나의 해를 찾게 되고, 각각의 반복 작업에는 많은 시간이 소요되기 때문이라고 볼 수 있다.

Fig. 11, 12, 13은 3차, 4차 및 5차 Bézier 곡선에서의 곡선의 복잡도와 계산 시간과의 관계를 보여주는 그림이다. 제안한 알고리즘의 계산 시간은 곡선의 복잡도가 증가할수록 선형적으로 증가한다. 이것은 모든 교점들의 계산이 단순 곡선 절편들 간의 가능한 조합만큼 이루어 지기 때문이다. Fig. 11, 12, 13에서 보듯이, 계산 시간에 대한 증가율은 필터링 프로세스를 인해서 다소 꺾이는 것을 볼 수 있다. 음함수화 방법의 수행도는 일정하게 머물러 있다는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문은 평면 Bézier 곡선들 간의 교점 계산에 대해서 다루고 있다. 본 논문에서 제안한 알고리즘은 2차와 3차와 같은 낮은 차수에서 가장 빠른 음함수화 방법에 기초하고 있다. 음함수화 방법은 차수가 높아짐에 따라 계산 시간이 급속하게 증가할 뿐만 아니라, 수치적으로도 불안정해진다. 음함수화 방법의 이러한 단점을 보완하기 위해서 곡선의 특성화, 분할, 유리 2차 Bézier 곡선을 사용하는 근사의 방법이 적용된다. 여기서는 좀더 정확한 교점을 얻기 위해서 뉴턴-랩슨과 같은 수치적 방법이 동원하였다.

실험을 통하여 내릴 수 있는 결론은 다음과 같다. 본 논문에서 제안된 Mix-&-Match 알고리즘은 3차 곡선 간의 교점 계산 시에는 가장 빠른 수행도를 보인다고 알려진 음함수화 방법과 비슷한 수행도를 보이며, 고차 곡선 간의 교점 계산에 있어서는 가장 우수한 수행도를 보인다. 또한 초기해로부터의 수렴과해를 찾는 것에 있어서는 존재하는 다른 뉴턴-랩슨 알고리즘보다도 우수하다. 특히, 본 알고리즘은 음함수화 방법에 비해서 수치적 안정성이 매우 뛰어나다고 판단된다.

한편, 좀더 경쟁력 있는 알고리즘을 구현하기 위해서는 단순 곡선 절편을 유리 2차 Bézier 곡선으로 근사하는 과정이 중요한 과정이 될 것이다. 원래 곡선 위를 지나는 점의 위치와 유리 2차 곡선의 조정 점에 대한 매개 변수화는 전체 알고리즘에서 가장 본질적인 문제이기 때문에 이러한 문제는 차후에 좀더 연구해야 할 대상이다.

또한 B-스플라인으로의 Mix-&-Match 알고리즘의 확장은 현재의 알고리즘의 경우와 크게 다르지 않을 것이라 본다.

참고문헌

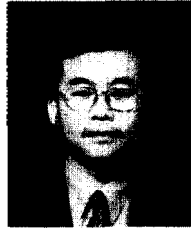
1. Boehm, W. and Prautzsch, H., *Geometric Concepts for Geometric Design*. A K Peters, 1994.
2. Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 3rd Ed., Academic press, 1993.
3. Forrest A.R., "The Twisted cubic curve: a computer-aided geometric design approach". *Computer-Aided Design*, Vol. 12, No. 4, pp. 165-172, July 1980.
4. Goldman, R.N. and Sederberg, T.W., "Some applications of resultants to problems in computational geometry". *The Visual Computer*, No. 1, pp. 101-107, 1985.
5. Goldman, R.N. and Sederberg, T.W., "Analytic ap-

proach to intersection of all piecewise parametric rational cubic curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 19, No. 6, pp. 282-292, July/Aug. 1987.

6. Lane, J.M. and Riesenfeld, R.F., "A theoretical development for the computer display and generation of piecewise polynomial surface", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 2, No.1, pp. 35-46, 1980.
7. Koparkar, P.A. and Mudur, S.P., "A new class of algorithms for processing of parametric curves", *Computer-Aided Design*, Vol 15, No. 1, pp. 41-45, 1983.
8. Kim, Deok-Soo, "Hodograph approach to geometric characterization of parametric cubic curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 25, No. 10, pp. 644-654, Oct. 1993.
9. Kim, Deok-Soo, Papalambros, Panos Y. and Woo, Tony C., "Tangent, normal, and visibility cones on Bezier surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 305-320, 1995.
10. Kim, Deok-Soo, Lee, Soon-Woong and Lee, Dong-Gyou, "On the Intersection Algorithm of Planar Parametric Curve: Quadratic and Cubic Cases", *Society of CAD/CAM Engineers Conference Proceeding*, Society of CAD/CAM Engineers, Seoul, Korea, pp. 86-91 (in Korean), 14. Feb. 1997.
11. Kim, Deok-Soo, Lee, Soon-Woong and Jang, Tae-Bum, "Cocktail algorithm for planar curve intersections" (submitted to *Computer-Aided Design*).
12. Lasser, D. and Hoschek, J., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A K Peters, 1993.
13. Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer, 1995.
14. Sederberg, T.W., Anderson, D.C. and Goldman, R. N., "Implicitization, Inversion, and Intersection of Planar Rational Cubic Curves", *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 31, pp. 89-102, 1985.
15. Sederberg, T.W. and Parry, S.R., "Comparison of three curve intersection algorithms", *Computer-Aided Design*, Vol. 18, No. 1, pp. 58-63, Jan. 1986.
16. Sederberg, T.W. and Nishita, T., "Curve intersection using Bezier clipping", *Computer-Aided Design*, Vol. 22, No. 9, pp. 538-549, Nov. 1990.
17. Stone M.C., Parc X. and Derose T.D., "A Geometric characterization of parametric cubic curves", *ACM Transaction on Graphics*, Vol. 8, No. 3, pp. 147-163, July 1989.
18. Wang C.Y., "Shape classification of the parametric cubic curve and parametric B-spline cubic curve",

Computer-Aided Design, Vol. 13, No. 4, pp. 199-206, July 1981.

19. Polynomial Root Finder, <http://www-dsp.rice.edu/software/PRF/prf.tar>, 97/06/04 PM 4:32.



김 덕 수

1982년 한양대학교 산업공학과 학사
 1985년 New Jersey Institute of Technology 산업공학과 석사
 1990년 The University of Michigan 산업공학과 박사
 1989년 ~ 1991년 Schlumberger Technology CAD/CAM Co. Senior Software Engineer
 1991년 ~ 1995 삼성 종합 기술원 선임 연구원
 1995년 ~ 현재 한양대학교 산업공학과 조교수
 관심분야 : geometric modeling, computational geometry, STEP and Internet application



이 순 응

1996년 한국과학기술원 산업공학과 학사
 1998년 한양대학교 산업공학과 석사
 1998년 ~ 현재 (주) 삼성 코딩
 관심분야 : computational geometry, computer-aided design



유 중 현

1997년 한양대학교 산업공학과 학사
 1997년 ~ 현재 한양대학교 산업공학과 석사과정
 관심분야 : geometric modeling, optimization, computational geometry



조 영 승

1995년 한양대학교 산업공학과 학사
 1997년 한양대학교 산업공학과 석사
 1997년 ~ 현재 한양대학교 산업공학과 박사과정
 관심분야 : geometric modeling, computational geometry, computer-aided geometric design