한국 CAD/CAM 학회 논문집
제 3 권 제 2 호 1998년 6월 pp. 135-139

학술논문

유리 Bézier 곡선과 곡면의 호도그래프†

김덕수*, 장태범**, 조영송**

The Closed Form of Hodograph of Rational Bézier curves and Surfaces

Deok-soo Kim*, Taeboom Jang** and Young-Song Cho**

ABSTRACT

The hodograph, which are usually defined as the derivative of parametric curve or surface, is useful for various geometric operations. It is known that the hodographs of Bézier curves and surfaces can be represented in the closed form. However, the counterparts of rational Bézier curves and surfaces have not been discussed yet. In this paper, the equations are derived, which are the closed form of rational Bézier curves and surfaces. The hodograph of rational Bézier curves of degree n can be represented in another rational Bézier curve of degree 2n. The hodograph of a rational Bézier surface of degree m × n with respect to a parameter can be also represented in rational Bézier surface of degree 2m × 2n. The control points and corresponding weights of the hodographs are directly computed using the control points and weights of the given rational curves or surfaces.

Key words : Hodograph, Rational Bézier curve, Rational Bézier surface, Derivative

1. 서 론

호도그래프는 매개변수 형식의 곡선이나 곡면의 1차 미분으로서, 곡선의 특징을 빨리 찾거나[3], 접선, 법선, 가시뿔을 계산하는[4] 등과 같은 다양한 기하학적 연산에서 유용하다. n차의 Bézier 곡선의 호도그래프는 n-1차의 Bézier 곡선으로 나타낼 수 있으며, 이의 closed form도 널리 알려져 있다. 또한, Bézier 곡면의 호도그래프도 Bézier 곡면의 형식의 표현법이 알려져 있다.

그러나, 유리 Bézier 곡선이나 곡면을 동일한 유리 Bézier 곡선 혹은 곡면으로 표현하는 방법에 관해서는 아직 구체적으로 논의되어 있지 않다. Sederberg와 Wang은 n차의 유리 Bézier 곡선의 1차 미분식에서 분자항을 2n-2 차의 비 유리 Bézier곡선으로 표현하였고, 이를 스케일드 호도그래프라 하였다[7]. 위 연구를 기반으로 하여, Saito등은, 유리 Bézier 곡선과 곡면의 스케일드 호도그래프를 homogeneous 좌표축상에서 유도하였다[6]. 다른 한편으로, Floater는 유리 Bézier 곡선의 1차 미분식을 그 조정점들과 가중치들로 표현하였다[2]. 또한 그는 호도그래프를 주어진 곡선의 연속적인 조정점들 간의 차 벡터로 나타내었다. 최근에 Piegl과 Tiller는 NURBS로 표현되는 유리 곡선의 미분식을 symbolic computation을 이용하여 NURBS로 표현하였으나, 이의 구체적인closed form을 제공하지는 않았다[5].

이 논문에서는 유리 Bézier 곡선과 곡면의 호도그래프를 명확하게 표현하고자 한다. n차의 유리 Bézier 곡선은 2n차의 동일한 유리 Bézier 곡선으로 나타내었다. 또한, m × n 차의 유리 Bézier 곡면의 임의 매개변수에 대한 호도그래프도 2m × 2n 차의 유리 Bézier 곡면으로 표현하였다. 호도그래프의 조정점들과 그에 대한 가중치들은 주어진 곡선이나 곡면의 조정점들과 가중치들에서 직접 수리적으로 계산하였다.

†본 연구는 1996년도 한국과학재단의 연구비(과제번호:961-1007-062-2) 지원에 의하여 수행되었음.
*종신회원, 한양대학교 산업공학과
**학생회원, 한양대학교 대학원

2. 유리 Bézier 곡선의 호도그래프

$R(t)$를 다음과 같이 정의되는 n차의 유리 Bézier 곡선

이라 하자.

$$R(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i R_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}=\frac{N(t)}{D(t)} \tag{1}$$

여기에서 $B_i^n(t)$, R_i와 w_i는 각각 n차의 Bernstein 다항식, 조정점들과 이에 상응하는 가중치들이다. 식 (1)을 직접 미분하면 다음과 같은 식 (2)를 얻을 수 있다.

$$R'(t)=\frac{N'(t)D(t)-N(t)D'(t)}{\{D(t)\}^2} \tag{2}$$

여기에서 $R'(t)$는 $2n$ 차의 유리 곡선임을 알 수 있다. Reference[7]에서는, $R'(t)$의 분자항인 $\{D(t)\}^2 R'(t)$를 스케일드 호도그래프라 하였으며, 다음과 같이 $2n$-2차의 비 유리 Bézier 곡선으로 표현하였다.

$$N'(t)D(t)-N(t)D'(t)=\sum_{i=0}^{2n-2} S_i B_i^{2n-2}(t) \tag{3}$$

여기에서, S_i는 다음과 같다.

$$S_i=\frac{\sum_{j=\max(0,\,i-n+1)}^{[i/2]}(i-2j+1)\binom{n}{j}\binom{n}{i-j+1}w_j w_{i-j+1}(P_{i-j+1}-P_j)}{\binom{2n-2}{i}} \tag{4}$$

위와 같이 $R'(t)$의 분자항은 Bézier 곡선의 형식으로 나타낼 수 있다. 따라서, 분모항을 Bernstein 다항식으로 표현하면, $R'(t)$을 유리 Bézier 곡선의 형식으로 표현할 수 있다. 식 (2)에서의 분모항을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{D\{t\}\}^2=\left\{\sum_{a=0}^{n} w_a B_a^n(t)\right\}^2 \tag{5}$$

$$=\left\{\sum_{a=0}^{n} w_a B_a^n(t)\right\}\left\{\sum_{b=0}^{n} w_b B_b^n(t)\right\}$$

$$=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n} w_a w_b B_a^n(t)B_b^n(t)$$

$$=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n} w_a w_b \frac{\binom{n}{a}\binom{n}{b}}{\binom{2n}{a+b}} B_{a+b}^{2n}(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=\max(0,\,i-n)}^{\min(i,\,n)} \frac{\binom{n}{j}\binom{n}{i-j}}{\binom{2n}{i}} w_j w_{i-j}\right) B_i^{2n}(t) \tag{6}$$

$$=\sum_{i=0}^{2n}\kappa_i B_i^{2n}(t) \tag{7}$$

a와 b는 식의 유도를 위해 사용한 임의의 첨자들이다. 식 (6)은 Reference[1]에서 나타나 있으며, 식에 대한 이해를 높이기 위해 자세히 유도 하였다. 식 (3)과 식 (7)을 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$R'(t)=\frac{\sum_{i=0}^{2n-2} S_i B_i^{2n-2}(t)}{\sum_{i=0}^{2n}\kappa_i B_i^{2n}(t)} \tag{8}$$

이를 유리 Bézier 곡선으로 나태내기 위해서는, 분자항과 분모항의 차수를 일치시켜야 한다. 이를 위해, Reference[1]에서의 식을 이용하여 분자항을 2회 차수 증가하였다.

$$R'(t)=\frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_i B_i^{2n}(t)}{\sum_{i=0}^{2n}\kappa_i B_i^{2n}(t)} \tag{9}$$

여기에서의 Q_i는 다음과 같다.

$$Q_i=\sum_{j=\max(0,\,i-2)}^{\min(2n-2,\,i)} S_j\binom{2n-2}{j}\frac{\binom{2}{i-j}}{\binom{2n}{i}} \tag{10}$$

그러면, 식 (4)를 식 (10) 대입하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$Q_i=\sum_{j=\max(0,\,i-2)}^{\min(2n-2,\,i)}\sum_{k=\max(0,\,j-n+1)}^{[j/2]}(j-2k+1)\binom{n}{k}\binom{n}{j-k+1} w_k w_{j-k+1}(P_{j-k+1}-P_k)\frac{\binom{2}{i-j}}{\binom{2n}{i}} \tag{11}$$

식 (9)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R'(t)=\frac{\sum_{i=0}^{2n}\kappa_i H_i B_i^{2n}(t)}{\sum_{i=0}^{2n}\kappa_i B_i^{2n}(t)} \tag{12}$$

여기에서 H_i는 Q_i/κ_i이다. 결과적으로, $R'(t)$는 식 (12)에서와 같이 조정점들과 가중치들이 각각 H_i와 κ_i인 $2n$-2차의 유리 Bézier 곡선임을 알 수 있다.

3. 유리Bézier 곡면의 호도그래프

$R(s, t)$를 다음과 같이 정의되는 m×n 차의 유리 Bézier 곡면이라고 하자.

$$R(s,t)=\frac{\sum_{i_s=0}^{m}\sum_{i_t=0}^{n} w_{i_s,i_t}P_{i_s,i_t}B_{i_s}^{m}(s)B_{i_t}^{n}(t)}{\sum_{i_s=0}^{m}\sum_{i_t=0}^{n} w_{i_s,i_t}B_{i_s}^{m}(s)B_{i_t}^{n}(t)}=\frac{N(s,\ t)}{D(s,\ t)} \tag{13}$$

여기에서 P_{i_s,i_t}는 조정점을 w_{i_s,i_t}은 P_{i_s,i_t}에 대한 가중치이다. 유리 Bézier 곡선의 경우와 유사하게, s-hodograph를 구하기 위해 $R(s, t)$를 직접 매개변수 s에 대한 편미분을 구하여 보자.

$$\frac{\partial R(s,t)}{\partial s}=\frac{\frac{\partial N(s,t)}{\partial s}D(s,t)-N(s,t)\frac{\partial D(s,t)}{\partial s}}{\{D(s,t)\}^2} \tag{14}$$

식 (14)는 두 매개변수에 관한 식으로 나타나기 때문에, 유리 Bézier 곡선의 경우와는 달리 식을 직접 유도하는 것은 어려우므로 식 (13)을 다음과 같이 정리해 보자.

$$R(s,t)=\frac{\sum_{i_s=0}^{m} w_{i_s}(t)P_{i_s}(t)B_{i_s}^{m}(s)}{\sum_{i_s=0}^{m} w_{i_s}(t)B_{i_s}^{m}(s)} \tag{15}$$

여기에서

$$w_{i_s}(t)=\sum_{i_t=0}^{n} w_{i_s,i_t}B_{i_t}^{m}(t) \tag{16}$$

$$P_{i_s}(t)=\frac{\sum_{i_t=0}^{n} w_{i_s,i_t}P_{i_s,i_t}B_{i_t}^{n}(t)}{\sum_{i_t=0}^{n} w_{i_s,i_t}B_{i_t}^{n}(t)} \tag{17}$$

와 같다. 식 (15)에서, $R(s, t)$은 유리 Bézier 곡선과 유사한 형태로 나타내었으므로, $R(s, t)$의 s에 관한 편미분식을 구하기 위해서, 식 (15)를 다음과 같이 유리 Bézier 곡선의 호도그래프을 구하기 위한 식 (12)에 적용하여 다음과 같은 식 (18)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial R(s,t)}{\partial s}=\frac{\sum_{i_s=0}^{2m}\kappa_{i_s}(t)H_{i_s}(t)B_{i_s}^{2m}(s)}{\sum_{i_s=0}\kappa_{i_s}(t)B_{i_s}^{2m}(s)} \tag{18}$$

여기에서, $\kappa_{i_s}(t)$와 $H_{i_s}(t)$는 다음과 같다.

$$\kappa_{i_s}(t)=\sum_{j=\max(0,i_s-m)}^{\min(i_s,m)}\frac{\binom{m}{j}\binom{m}{i_s-j}}{\binom{2m}{i_s}}w_j(t)w_{i_s-j}(t) \tag{19}$$

$$H_{i_s}(t)=\frac{\sum_{j=\max(0,i_s-2)}^{\min(2m-2,i_s)}\sum_{k=\max(0,j-m+1)}^{[j/2]}(j-2k+)\binom{m}{k}\binom{m}{j-k+1}w_k(t)w_{j-k+1}(t)(P_{j-k+1}(t)-P_k(t))\frac{\binom{2}{i_s-j}}{\binom{2m}{i_s}}}{\kappa_{S}(t)} \tag{20}$$

식 (19)의 매개변수 t에 관련한 항을 다음과 같은 기저변환을 통하여 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&w_j(t)w_{i_s-j}(t)\\
&=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n}w_{j,a}w_{i_s-i,b}B_a^n(t)B_b^n(t)\\
&=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n}w_{j,a}w_{i_s-i,b}\frac{\binom{n}{a}\binom{n}{b}}{\binom{2n}{a+b}}B_{a+b}^{2n}(t)
\end{aligned} \tag{21}$$

$$=\sum_{i_t=0}^{2n}\sum_{k=\min(0,i_t-n)}^{\max(i_t,n)}w_{j,i_t-k}w_{i_s-j,k}\frac{\binom{n}{i_t-k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{i_t}}B_{i_t}^{2n}(t) \tag{22}$$

식 (21)에서 새로운 첨자 $i_t=a+b, k=b$를 이용하면, 식 (22)를 유도할 수 있다. 이와 비슷한 방법으로 식 (20)에서 t와 관련된 항 또한 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_k(t)w_{i_t-k+1}(t)(P_{i_t-k+1}(t)-P_k(t))$$

$$w_k(t)w_{i_t-k+1}(t)P_{i_t-k+1}(t)-w_k(t)w_{i_t-k+1}(t)P_k(t)$$

$$\left(\sum_{a=0}^{n} w_{k,a}B_a^n(t)\right)\left(\sum_{b=0}^{n} w_{i_t-k+1,b}P_{i_t-k+1,b}B_b^n(t)\right)$$

$$-\left(\sum_{a=0}^{n} w_{k,a}P_{k,a}B_a^n(t)\right)\left(\sum_{b=0}^{n} w_{i_t-k+1,b}B_b^n(t)\right)$$

$$=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n} w_{k,a}w_{i_t-k+1,b}P_{i_t-k+1,b}B_a(t)B_b^n(t)$$

$$=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n} w_{k,a}\, w_{i_t-k+1,b}P_{k,a}B_a^n(t)B_b^n(t)$$

$$=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n} w_{k,a}\, w_{i_t-k+1,b}(P_{i_t-k+1,b}-P_{k,a})B_a^n(t)B_b^n(t)$$

$$=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n} w_{k,a}\, w_{i_t-k+1,b}(P_{i_t-k+1,b}-P_{k,a})\frac{\binom{n}{a}\binom{n}{b}}{\binom{2n}{a+b}}B_{a+b}^{2n}(t) \tag{23}$$

$$=\sum_{i_t=0}^{2n}\sum_{l=\max(0,i_t-n)}^{\min(i_t,n)} w_{k,i_t-l}\,w_{i_t-k+1,l}(P_{i_t-k+1,l}-P_{k,i_t-l})\frac{\binom{n}{i_t-l}\binom{n}{l}}{\binom{2n}{i_t}}B_{i_t}^{2n}(t) \tag{24}$$

앞에서와 동일하게 첨자 a와 b는 식의 유도를 위해 사용된 임의의 첨자들이며, 식 (24)는 새로운 첨자 i_t와 l를 이용하면 식 (23)에서 유도할 수 있다. 식 (22)와 식 (24)를 식 (19)와 (20)에 각각 대입하면 다음과 같은 식 을 얻을 수 있다.

$$\kappa_{i_t}(t)=\sum_{j=\max(0,i_s-m)}^{\min(i_s,m)}\sum_{i_t=0}^{2n}\sum_{k=\min(0,i_t-n)}^{\min(i_t,n)} w_{i_s-j,k}\,w_{j,i_t-k}\frac{\binom{m}{i_s-j}\binom{m}{j}\binom{n}{i_t-k}\binom{n}{k}}{\binom{2m}{i_s}}B_{i_t}^{2n}(t) \tag{25}$$

$$H_{i_s}(t)=\frac{\displaystyle\sum_{j=\max(0,j_s-2)}^{\min(2m-2,i_s)}\sum_{k=\max(0,j-m+1)}^{[j/2]}\sum_{i_t=0}^{2n}\sum_{l=\max(0,j_t-n)}^{\min(i_t,n)}(i-2k+1)\binom{m}{k}\binom{m}{j-k+1}w_{k,i_t-l}\,w_{j-k+1,l}(P_{j-k+1,l}-P_{k,i_t-l})\frac{\binom{2}{i_s-j}\binom{n}{i_t-l}\binom{n}{l}}{\binom{2m}{i_s}\binom{2n}{i_t}}}{\kappa_{i_s}(t)} \tag{26}$$

식 (25) 와 (26)을 식 (18)에 대입한 후 정리하면 다음과 같은 의미 있는 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial R(s,t)}{\partial s}=\frac{\sum_{i_s=0}^{2m}\sum_{i_t=0}^{2n}\kappa_{i_s,i_t}H_{i_s,i_t}B_{i_s}^{2m}(s)B_{i_t}^{2n}(t)}{\sum_{i_s=0}^{2m}\sum_{i_t=0}^{2n}\kappa_{i_s,i_t}B_{i_s}^{2m}(s)B_{i_t}^{2n}(t)} \tag{27}$$

여기에서, $\kappa_{i_s i_t}$와 $H_{i_s i_t}$는 다음과 같다.

$$\kappa_{i_s,i_t}=\sum_{j=\max(0,i-m)}^{\min(i_s,m)}\sum_{k=\min(0,i-n)}^{\min(i_s,n)} w_{i_s-j,k}\,w_{j,i_t-k}\frac{\binom{m}{i_s-j}\binom{m}{j}}{\binom{2m}{i_s}}\frac{\binom{n}{i_t-k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{i_t}} \tag{28}$$

$$H_{i_s,i_t}=\frac{\displaystyle\sum_{j=\max(0,i_s-2)}^{\min(2m-2,i_s)}\sum_{k=\max(0,j-m+1)}^{[j/2]}\sum_{l=\max(0,i_t-n)}^{\min(i_t,n)}(j-2k+1)\binom{m}{k}\binom{m}{j-k+1}w_{k,i_t-l}\,w_{j-k+1,l}(P_{j-k+1,-l})\frac{\binom{2}{i_s-j}\binom{n}{i_t-l}\binom{2}{n_s-l}}{\binom{2m}{i_s}\binom{2n}{i_s t}}}{\kappa_{i_t}(t)} \tag{29}$$

식 (27)에서 m×n차의 유리 Bézier 곡면의 호도그래프가 (28)과 (29)에서 각각 주어진 조정점들 $H_{i,j}$과 그에 대한 가중치 $\kappa_{i,j}$로 만들어지는 2m×2n 차의 유리 Bézier 곡면으로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

호도그래프는 다양한 기하학적 연산에서 유용하여, 여러 중요한 응용분야에서 사용될 수 있다. 비유리 Bézier 곡선과 곡면의 표현은 이미 알려져 있지만, 유리 Bézier 곡선과 곡면의 호도그래프에 관해서는 최근에 이르러 활발히 연구되고 있다.

이 논문에서는 유리 Bézier 곡선이나 곡면의 호도그래프를 cloaed form 으로 나타내었다. 이 논문의 중요한 결과들을 요약하면 다음과 같다. n차의 유리 Bézier 곡선의 호도그래프는 동일한 형식인 $2n$ 차의 유리 Bézier 곡선이 되며, m×n 차의 유리 Bézier 곡면의 임의의 매개변수에 대한 호도그래프 또한 2m×2n차의 유리 Bézier 곡면으로 표현할 수 있다. 이러한 호도그래프에 대한 조정점들과 그에 대한 가중치들은 주어진 곡선이나 곡면의 조정점들과 가중치들에서 직접 계산하였다.

이러한 결과들은 유리 Bézier 곡선이나 곡면의 호도그래프가 필요한 경우 유용하게 사용될 수 있다. 왜냐하면, 임의의 차수의 호도그래프를 계산이 필요한 경우에 필요한 만큼 동일한 함수를 호출하여 계산할 수 있기 때문이다. 또한 이 논문의 결과들은 즉 NURBS 곡선이나 곡면등에서도 확장할 수 있다.

References

1. Farouki, R.T. and Rajan, V.T., "Algorithms for polynomials in Bernstein form", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5, pp. 1-26, 1988.
2. Floater, M.S., "Derivatives of rational Bézier curves", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 9, pp. 161-174, 1992.
3. Kim, Deok-Soo, Papalambros, P.Y. and Woo, T.C., "Hodograph approach to geometric characterization of parametric cubic curves", *Computer Aided Design*, Vol. 25, pp. 644-654, 1993.
4. Kim, Deok-Soo and Papalanbros, P.Y., "Tangent, normal, and visibility cones on Bézier surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 305-320, 1995.
5. Piegl, L. and Tiller, W., "Symbolic operators for NURBS", *Computer Aided Design*, Vol. 29, No. 5, pp. 361-368, 1997.
6. Saito T., Wang, Guo-Jin and Sederberg, T.W., "Hodographs and normals of rational curves and surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 417-430, 1995.
7. Sederberg, T.W. and Wang, X., "Rational hodographs", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 4, pp. 333-335, 1987.

김 덕 수

1982년 한양대학교 산업공학과 학사
1985년 New Jersey Institute of Technology 산업공학과 석사
1990년 The University of Michigan 산업공학과 박사
1989년 ~ 1991년 Schlumberger Technology CAD/CAM Co. Senior Software Engineer
1991년 ~ 1995년 삼성 종합 기술원 선임연구원
1993년 ~ 현재 한양대학교 산업공학과 조교수
관심분야 : geometric modeling, computational geometry, STEP and Internet application

장 태 범

1997년 한양대학교 산업공학과 학사
1997 ~ 현재 한양대학교 산업공학과 석사 과정
관심분야 : computational geometry, computer graphics, optimization, geometric modeling

조 영 송

1995년 한양대학교 산업공학과 학사
1997년 한양대학교 산업공학과 석사
1997년 ~ 현재 한양대학교 산업공학과 박사과정
관심분야 : geometric modeling, computational geometry, computer-aided geometric design