

## 체적등의 구속조건하에서 단면곡선들로부터 B-spline Skinning을 사용한 곡면 디자인

김 형 철\*

### Surface Design Using B-spline Skinning of Cross-Sectional Curves under Volume Constraint

Hyeong Cheol Kim\*

#### ABSTRACT

Given a sequence of cross-sectional curves, the skinning method generates a freeform surface that interpolates the given curves in that sequence. This thesis presents a construction method of a B-spline skinning surface that is fair and satisfies volume constraints. The fairness metric is based on the parametric energy functional of a surface. The degrees of freedom in surface control are closely related to control points in the skinning direction. The algorithm for finding a skinning surface consists of two step. In the first step, an initial fair surface is generated without volume constraints and one coordinate of each control point is fixed. In the second step, a final surface that meets all constraints is constructed by rearranging the other coordinates of each control point that defines the initial surface. A variational Lagrange optimization method produces a system of non-linear equations, which can be solved numerically. Moreover, the reparametrization of given sectional curves is important for the construction of a reasonable skinning surface. This thesis also presents an intuitive metric for reparametrization and gives some examples that are optimized with respect to that metric.

**Key words :** B-spline, Skinning, Smoothness, Volume, Constraint, Reparametrization

## 1. 서 론

### 1.1 문제 정의

자유곡면을 디자인하는 방법은 표현방법 또는 구속조건 등에 따라 다양하게 구분되지만, 초기 기준이 되는 입력 데이터에 따라 크게 두가지로 나눌 수 있다. 첫째는 공간상의 3차원 점들을 조밀하게 정의하고 이것들을 보간(interpolation)하여 곡면을 생성하는 방법이고, 둘째는 자유곡면을 잘 표현하는 특성곡선들(profiles, cross-sections)을 먼저정의하거나 기존의 모델에서 재활용 추출하고 이것들을 포함하는 자연스러운 곡면을 생성하는 방법이다. 특성곡선들로부터 곡면을 생성하기 위하여 revolution, sweep-

ing, 그리고 skinning 등의 연산들을 포함한 여러가지 표현방법들을 복합적으로 사용하는 다양한 방법들이 연구되었다<sup>1)~4)</sup>. 이중 2차원 단면곡선들을 보간하여 3차원 곡면을 정의하는 skinning(or lofting) 방법은 종방향 단면으로 곡면의 특성을 잘 표현할 수 있는 선박, 항공기(동체, 날개), 가전 제품 등의 물체를 디자인 하는데 많이 사용되는 기하학적 연산이다.

조선 선박 디자이너의 작업 공간(lofts)에서 그 용어가 유래된 lofting은 두 자유곡선  $C_1(u)$ 과  $C_2(u)$ 가 주어졌을 때, 이곡선들을 마주 보는 경계곡선으로 갖는 곡면을 정의하는 연산이다. 즉, lofting 곡면  $S(u, t)$ 는

$$S(u, t) = b_1(t)C_1(u) + b_2(t)C_2(u)$$

로 정의된다. 여기서,  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$ 는 두 곡선  $C_1(u)$ 과

\*대우중공업(주) 선박해양기술연구소

$C_2(u)$  사이를 blending하는 함수이다. Ruled 곡면은  $b_1=(1-t)$ ,  $b_2=t$ 로 정의되는 가장 간단한 lofting 곡면의 한 예이다. Skinning은 다수의 곡선들(주로 디자인하는 물체의 평행한 단면곡선들)을 연속하여 보간하는 조금 더 일반화된 형태의 lofting 방법이다<sup>14,15)</sup>.

자유곡선/곡면을 디자인할 때 설계 환경에 따라 다음과 같은 다양한 구속조건들이 존재할 수 있다.

- 곡선: 위치(points), 접선방향, 곡률, 길이, 닫힌 곡선의 면적과 중심 등.
- 곡면: 위치, 접촉면, 경계 조건, 곡면의 면적, 닫힌 곡면의 체적과 중심 등.

디자이너는 이러한 구속조건들을 만족할 뿐 아니라 미적인 측면에서 자연스러운 곡선/곡면을 디자인하기를 원한다. 대부분의 경우에 있어서 곡선/곡면의 부드러운 정도(smoothness)는 굽힘 에너지로부터 구해지는 순정기준(fairness metric)으로 표현된다. 그래서, 주어진 구속조건들을 만족하는 곡선/곡면의 디자인 문제는 이러한 순정기준을 최소로 하는 최적화 문제가 된다<sup>11,12)</sup>.

Fig. 1은 위치와 면적 구속조건이 있는 곡선 디자인 문제의 한 예이다. Fig. 1에서 확인할 수 있듯이 주어진 구속조건

1. 결과곡선은 2차원 위치데이터  $Q_i$ 를 반드시 통과할 것.

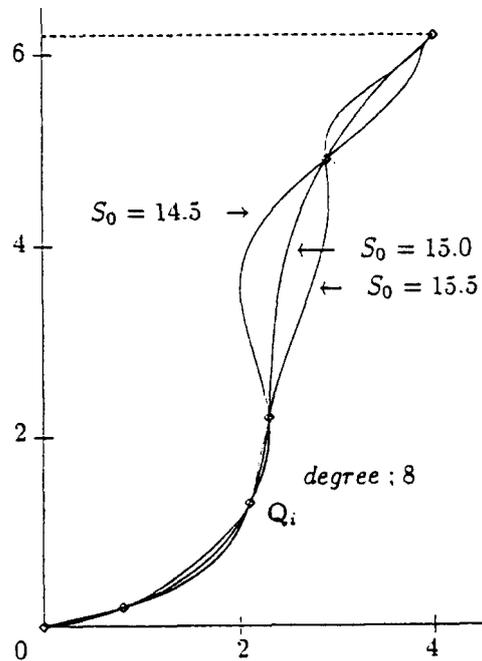


그림 1. 위치 및 면적 구속조건이 있는 곡선 정의의 예.

2. y축과 결과곡선이 만드는 영역의 면적이 상수  $S_0$ 일 것.

을 만족하는 곡선은 1 이상의 초과자유도(extra degrees of freedom)를 설정함으로써 무한히 존재한다 (초과자유도는 곡선/곡면의 자유도에서 구속조건의 갯수를 뺀 자유도를 의미한다.). 이문제에 대해 Nawacki<sup>13,14)</sup> 등은 Bezier 곡선 등에 대하여, 위의 주어진 구속조건들을 만족하면서

$$E = \int_0^1 C''(t)^2 dt$$

와 같이 정의된 순정기준  $E$ 가 최소가 되는 곡선을 구하는 효율적인 방법을 제시했다.

본 논문에서는 일련의 B-spline 단면곡선들이 주어졌을 경우, B-spline blending(basis) 함수를 사용한 skinning 곡면중 체적과 중심등의 구속조건을 만족하면서, 동시에 식 (1)으로 정의된 순정기준이 최소가 되는 곡면을 구하는 최적화 알고리즘을 구현하였다. 즉,

- 입력 데이터 :
  1. 서로 평행한 B-spline 단면곡선들  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$ 와 skinning 방향의 차수  $q$
  2. Skinning 방향의 초과자유도와 해당 knot vector
  3. 결과곡면의 체적  $V_0$ 와 skinning 방향 중심  $x_0$
- 순정기준: 다음과 같이 정의되는 곡면의 에너지  $E$ 를 최소화함.

$$E = \iint (S_u^2 + 2S_{uv}^2 + S_v^2) dudv \quad (1)$$

- 최적화 방법: 수식을 간단히 하기 위해서 다음과 같은 2단계의 방법을 사용함.

1. 체적 등의 구속조건을 배제하고 식 (1)이 최소가 되는 skinning 곡면을 얻은 후, 자유도 변수(곡면의 조절점)의 한 좌표(skinning 방향 좌표, 본 논문에서는 x좌표)를 고정함.
2. Variational Lagrange method를 사용하여 체적 등의 구속조건을 만족하는 자유도 변수의 나머지 좌표(y, z)를 구함.

- 결과 데이터: 입력 데이터 등의 구속조건을 만족하면서 순정기준이 최소가 되는 B-spline skinning 곡면

그리고, B-spline의 skinning 방법에서 입력으로 주어진 단면곡선들이 상대적으로 불규칙하고 부자연스러운 parametrization을 가지면, 그 결과로 생성되는 skinning 곡면은 디자이너가 원하는 곡면과는 크게 다를 수 있다. 따라서, 각 단면곡선간 매개변수의 상

대적인 속도조절을 위한 reparametrization은 skinning시 고려되어야 할 중요한 요소이다<sup>[10,15,16]</sup>. 본 논문에서는 이를 위한 직관적 기준(metric)을 제시하고 이를 최적화하는 알고리즘을 구현하였다.

1.2 논문 구성

본논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 제2장에서는 B-spline 수식을 정의하고 기본적인 B-spline의 skinning 알고리즘을 소개한다. 그리고, 제3장에서는 B-spline skinning을 사용한 곡면을 디자인 할 때 문제가 될 수 있는 reparametrization의 필요성과 직관적인 기준을 사용한 최적화 방법을 설명한다. 또한, 제4장에서는 본논문의 주제인 체적과 중심 등의 구속조건이 있을 때의 skinning 곡면 생성을 위한 최적화 방법에 대하여 기술한다. 마지막으로, 제5장에서는 본논문을 요약하고 결론을 내린다.

2. B-spline skinning 방법

이장에서는 본논문에 쓰이는 수식 표기의 일관화를 위하여 B-spline 곡선/곡면의 수식을 정의하고, skinning 곡면의 정의방법에 대해서 기술한다.

2.1 B-spline 곡선/곡면 정의

2.1.1 B-spline 곡선

$p$ 차 비유리 B-spline 곡선  $C(u)$ 는 다음과 같이 정의되는 piecewise 매개곡선이다.

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i \tag{2}$$

여기서,  $P_i=(x_i, y_i, z_i)$ 로 표기되는 조절점이고,  $N_{i,p}(u)$ 는 knot vector

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}, \quad u_i \leq u_{i+1}, \quad (i = 0, \dots, m-1)$$

에 대하여 정의되는 비유리 B-spline basis 함수이다. Knot vector인 경우 periodic type도 있지만, 본 논문에서는 매개변수  $u$ 의 정의구간을  $[0, 1]$ 로 하고, 처음과 마지막 knot들이  $(p+1)$ 의 다중성을 갖는 다음의 non-periodic knot vector를 사용한다.

$$U = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1}$$

그리고, 조절점 개수  $(n+1)$ 과 knot의 개수  $(m+1)$  사이에는  $(m=n+p+1)$ 인 관계가 있다<sup>[10]</sup>.

2.1.2 B-spline 곡면

차수가  $(p, q)$ 인 비유리 B-spline 곡면  $S(u, v)$ 의 tensor product form은 B-spline 곡선과 비슷하게 다음과 같이 정의된다.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)P_{i,j} \tag{3}$$

$P_{i,j}$ 는 격자구조의 조절점이고,  $u$  방향 차수  $p$ 인 knot vector  $U$ 와  $v$  방향 차수  $q$ 인 knot vector  $V$ 는 각각 곡선에서의 동일한 방법으로 정의된다.  $u$  또는  $v$  값이 상수인 곡면상의 곡선  $S(u_0, v)$ ,  $S(u, v_0)$  등을 isoparametric 혹은 coordinate 곡선이라 하는데, 이는 곡면을 도식화 하거나 곡면의 국부적 해석의 도구로서 많이 사용된다<sup>[10]</sup>.

2.3 B-spline을 사용한 skinning 곡면 생성

서론에서 간단히 기술한 바와 같이 skinning은 lofting의 일반화로서, 적합한 blending 함수를 단면곡선들에 적용하여 원하는 곡면을 디자인하는 방법이다. B-spline을 사용한 skinning은 주어진  $(K+1)$ 개의 단면곡선들  $C_k(u)(k=0, \dots, K)$ 를 보간하여 이 곡선들이 결과곡면의 isoparametric 곡선이 되도록 하는 것으로, 단면곡선들 상의 동일한  $u$  parameter를 갖는 위치 벡터들의 보간 문제는 주어진 단면곡선들을 정의하는 조절점들의 곡선 보간문제로 귀착된다. 주어진 단면곡선들  $C_k(u)$ 을 각각 knot 삽입, 차수 상승 알고리즘등을 사용하여 호환성을 갖도록 변환한 후, 동일 knot vector  $U$ 에서 정의된  $p$ 차  $k$ 번째 단면곡선  $C_k(u)$ 를

$$C_k(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)Q_{i,k}, \quad (k = 0, \dots, K)$$

와 같이 정의된다고 가정한다( $Q_{i,k}$ 는  $k$ 번째 곡선의  $i$ 번째 조절점). 종방향(본논문에서는  $v$  방향)으로 skinning한 결과곡면을  $S(u, v)$ 라 하고, 단면곡선  $C_k(u)$ 가  $S(u, v)$ 의  $v$ 가  $\bar{v}_k$ 로 상수인 곡면상의 isoparametric 곡선  $S(u, \bar{v}_k)$ 라면,

$$\begin{aligned} S(u, \bar{v}_k) &= C_k(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)Q_{i,k} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(\bar{v}_k)P_{i,j} \\ &= \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \left[ \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_k)P_{i,j} \right], \end{aligned} \quad (k = 0, \dots, K)$$

와 같이 된다. 위식의 첫번째와 세번째식에서 모든

$u$ 에 대해  $N_{i,p}(u)$ 은 독립(independent)이다. 그러므로 각각의  $i$ 에 대해서 다시 쓰면,

$$Q_{i,k} = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_k) P_{i,j}, \quad (k=0, \dots, K) \quad (4)$$

의 관계가 성립한다. 즉,  $i$ 가 고정되었다고 생각하면 위치데이터  $Q_{i,k}$ 가 주어졌을 때의 B-spline 곡선 보간 문제와 동일하다. 결국 skinning 곡면의 조절점들은 각각의  $i$ 에 대해서 주어진 단면곡선들의 종 방향 조절점들을 동일한 parameter  $\bar{v}_k$ 와 knot vector  $V$ 하에서 보간한  $q$ 차 B-spline 곡선의 조절점들이 된다. 식(4)를 행렬식으로 쓰면,

$$[M_{k,j}][P_{i,j}]^T = [Q_{i,k}]^T, \quad (i=0, \dots, n, j=0, \dots, m, k=0, \dots, K) \quad (5)$$

가 된다. 여기서,  $[M_{k,j}]$ 은  $(K+1) \times (m+1)$ ,  $[P_{i,j}]$ 는  $(n+1) \times (m+1)$ , 그리고  $[Q_{i,k}]$ 는  $(n+1) \times (K+1)$ 의 행렬이므로,  $m=K$ 이면  $[M_{k,j}]$ 가 정방행렬이 되어 skinning 곡면의 유일한 해(조절점 행렬  $[P_{i,j}]$ )가 존재하고 이를 구할 수 있다. Fig. 2에서 5개의 단면곡선들이 주어졌을 때 ( $K=4$ ),  $v$  방향의 차수를 3으로 하고  $m=4$ 로 하여 유일하게 정의되는 skinning 곡면을 구하는 과정을 보여

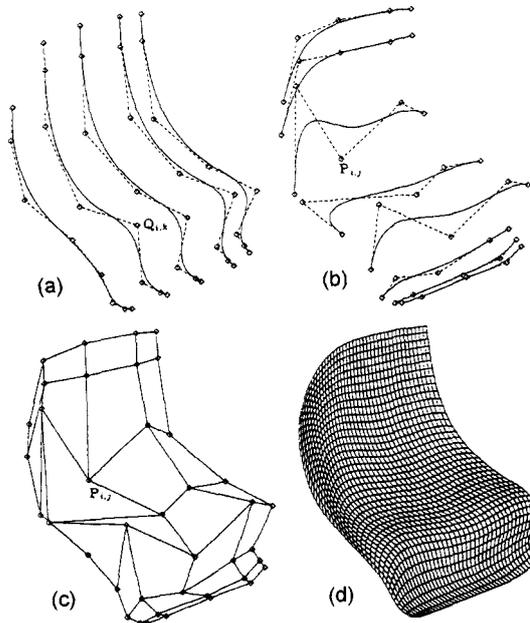


그림 2. B-spline을 사용한 skinning : (a) 단면곡선들과 조절점  $Q_{i,k}$ , (b)  $Q_{i,k}$ 를 보간한 곡선 및 조절점  $P_{i,j}$ , (c) skinning 곡면의 조절점  $P_{i,j}$ 의 격자구조, (d) skinning 결과곡면.

준다. 본논문에서는 구속조건의 수보다 결정해야할 조절점의 수가 많은 경우( $m > K$ )를 다루게 된다. 이러한 under-determined 문제의 해법으로서, 순정기준을 최적화 함수로 도입한다(제4장 참조). 단면곡선  $C_i(u)$ 에 대한  $\bar{v}_k$  할당분제와 knot vector  $V$ 의 선택은 결과곡면의 모양에 큰영향을 미칠 수 있다. 본논문에서는  $\bar{v}_k$ 의 결정은 단면곡선들의 조절점간의 거리위상관계를 기준으로한 chord length 방법을 사용하고, 이를 평균하여 knot vector  $V$ 를 결정하였다<sup>[9,12]</sup>.

### 3. Reparametrization

연속된 단면곡선들로부터 곡면을 보간, 생성하는 skinning 방법은 다양한 형상을 디자인하기 위하여 광범위하게 사용되는데, 자연스러운 곡면 생성에 있어서 각 단면곡선 간의 최적의 상대적 매개관계를 찾는 reparametrization 문제는 오랜 관심 분야이다<sup>[13,16]</sup>. Skinning에 있어서 이것은 단면곡선들 상의 점들을 일대일로 대응시키는 방법을 결정하는 문제이다. 즉, 결과곡면의 형상을 더 자연스럽게 향상시키기 위하여 단면곡선들의 상대적 매개속도를 어떻게 조절할 것인가하는 문제이다. 곡면 형상이 주어졌을 단면곡선의 parametrization에 종속된다는 사실은 원호같은 두 곡선  $C_1(u)$ ,  $C_2(v)$ 의 간단한 1차 blending에 의해 생성되는 두 ruled 곡면의 차이에서 쉽게 확인된다(Fig. 3). 이처럼 주어진 단면곡선 간의 상대적 parametrization의 고려없이 매개 변수를 blending하는 곡면 보간방법을 사용하면, 원치 않는 곡면이 디자인될 수 있다. 특히, 단면곡선들의 수가 많아지면 디자인 의도와는 다른 결과곡면을 얻을 확률이 높아질 것이다. Reparametrization은 두 곡선간의 기하학적 기준을 정의하여 이 기준을 최소 또는 최대로 하는 두 곡선 간의 상대적 매개함수를 찾는 최적화 기술이다. 이 기술에서 기준의 선정과 최적화 기법은 결과를 결정짓는 중요한 요소이다. 단면을 표현하는 방법이 곡선이 아닌 일련의 직선 조각들로 주어지는 경우 이 문제와 유사한 타일링(tiling) 문제가 있다. 타일링 문제는 인접 단면의 직선 조각들을 연결하여 삼각형 매쉬들을 형성하여 디자인하는 물체를 삼각형 매쉬들의 다면체로 표현하는 문제이다. Fuchs<sup>[16]</sup> 등은 이 문제를 directed toroidal graph를 사용하여 최소 비용 경로를 찾는 문제로 전환하고, 분할정복기법을 적용하여 효율적으로 최적 경로를 찾는 알고리즘을 개발했다. Toroidal graph를 사용한 방법에서 최적화 기준으로 면적, 부피, 스패(span) 길이, 방향성, normalized

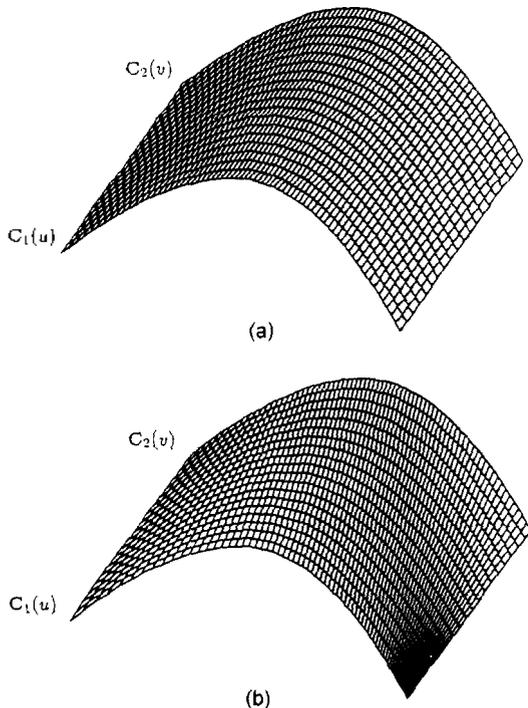


그림 3. 동일한 곡선 \$C\_1(u), C\_2(v)\$의 서로 다른 parametrization에 의한 ruled 곡면.

arc length 등을 사용한 연구가 있었다<sup>11)</sup>. Elber<sup>11)</sup> 등은 다음과 같은 접선방향일치(tangent match) 기준을 사용하여 연속 곡선에 적용하였다.

$$\int_0^1 \langle T_1(u), T_2(v(u)) \rangle du \rightarrow MAX$$

위 식이 최대가 되는 상대매개함수 \$v(u)\$를 얻기 위하여, 이 방법에서는 곡선 \$C\_1, C\_2\$를 작은 조각으로 분할하고, dynamic program 기법을 적용하여 최적의 이산적 상대매개쌍들을 구했다. 그리고, 이 상대매개쌍들을 다시 근사하는 \$v(u)\$를 정의하는 방법을 사용하였다. 그러나, Fig. 4와 같이 곡선분할조각의 갯수(\$m\$)와 \$v(u)\$의 근사 자유도(\$n\$)에 따라 불규칙하고 서로 상이한 결과를 주는 단점이 있고, 비슷한 모양의 곡선 부분에서는 skinning에 적용하기에는 어색한 결과를 주는 것을 확인할 수 있다. 본 논문에서는 다소 감각적이고 직관적인 기준을 제시하고, 또한 위의 연구에서와 같은 이산적 방법이 아니라, 연속적인 상대매개함수 \$v(u)\$를 직접 최적화하는 방법을 구현하였다.

### 3.1 Reparametrization의 기준

앞서 언급한 바와 같이 타일링 문제를 접근하는

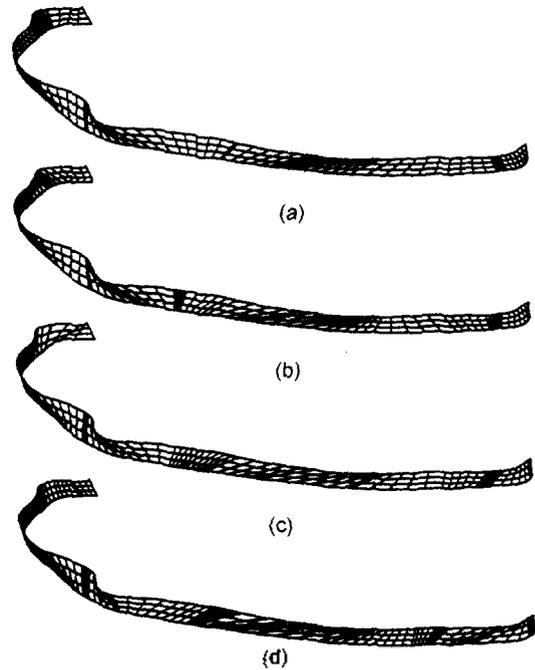


그림 4. Tangent matching 방법에 의한 reparametrization : (a) \$m=15, n=9\$ (b) \$m=30, n=9\$ (c) \$m=100, n=9\$ (d) \$m=100, n=20\$.

데 있어서 여러가지 기준을 사용한 연구가 있었다. 본 논문에서는 다소 감각적이고 직관적인 기준을 제시하는데, 그 배경은 Fig. 3에서 느끼는 isoparametric 곡선의 특성에 기인한다. Fig. 3(a)가 Fig. 3(b)보다 자연스럽게 느껴지는 이유는 교차되는 isoparametric 곡선의 각도가 수직하고 더 규칙적이기 때문이다. 그래서, 본 논문에서는 주이자는 두 곡선 \$C\_1\$과 \$C\_2\$의 1차 ruling에 생성되는 ruled 곡면의 \$u, v\$의 isoparametric 곡선 사이의 각도를 최대로 하는 \$C\_1\$에 대한 \$C\_2\$의 상대매개법을 고려하였다. 일반적으로 곡면 \$S(u, v)\$의 \$u\$와 \$v\$의 isoparametric 곡선 간의 교차각도 \$\theta\$는 다음과 같다<sup>11)</sup>.

$$\cos \theta = \frac{\langle S_u, S_v \rangle}{|S_u| |S_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

여기서, \$S\_u = \frac{\partial S}{\partial u}, S\_v = \frac{\partial S}{\partial v}\$이고 \$E, F, G\$는 \$S\_u\$와 \$S\_v\$를 좌표축으로 하는 1st fundamental form의 coefficient로 \$E = \langle S\_u, S\_u \rangle, F = \langle S\_u, S\_v \rangle, G = \langle S\_v, S\_v \rangle\$이다.

Definition 1 :

모든 \$(u, v)\$에 대해서 \$F(u, v) = \langle S\_u, S\_v \rangle = 0\$이면 coordinate 곡선은 서로 수직하고, 그러한 \$(u, v)\$ parametr-

ization을 orthogonal parametrization이라 한다.

두 곡선  $C_1(u)$ 과  $C_2(v)$ 가 있을 때 ( $u, v \in [0, 1]$ ), reparametrization 함수  $v=v(u)$ 로 결정되는 ruled 곡면  $R(u, t)$ 를

$$R(u, t) = (1-t)C_1(u) + tC_2(v(u)) \quad (6)$$

로 정의하면 ( $u, t \in [0, 1]$ ),  $u$ 와  $t$ 에 대한 각각의 미분 식은

$$R_u = \frac{\partial R}{\partial u} = (1-t) \frac{dC_1}{du} + t \frac{dC_2}{dv} \frac{dv}{du}$$

$$R_t = \frac{\partial R}{\partial t} = C_2(v(u)) - C_1(u)$$

이 된다. 그리고, 식 (6)으로 정의된 ruled 곡면의 임의의 ( $u, t$ )에서 isoparametric 곡선간 교차 각도  $\theta$ 는

$$\cos \theta = \frac{\langle R_u, R_t \rangle}{|R_u| |R_t|} \quad (7)$$

로 주어진다(Fig. 5).

임의의 곡면  $S(u, v)$ 가 정의되어 있을 때, isoparametric 곡선의 직교 조건  $F = \langle S_u, S_v \rangle = 0$ 를 만족하는  $S(u, v)$ 의 reparametrization 함수  $u=u(u^*, v^*)$ ,  $v=v(u^*, v^*)$ 는 국부적으로 존재할 수 있다. 그러나, 식 (6)으로 정의된 ruled 곡면  $R(u, t)$ 의 경우에 특수한 경우들(예를 들어,  $C_1$ 과  $C_2$ 가 기하적으로 동일한 경우)을 제외하고는, 모든 ( $u, t$ )에 대해  $F = \langle R_u, R_t \rangle = 0$ 가 되는 함수  $v=v(u)$ 는 존재하지 않는다(예: 경계점  $R(u=0, t=0)$ 에서의 미분벡터를 생각해 보면,  $R_u = \frac{dC_1(0)}{du}$ 이고  $R_t = C_2(0) - C_1(0)$ 이므로, 일반적으로  $R_u$ 와  $R_t$ 는 수직이 아니다.).

Definition 2 :

두 자유곡선  $C_1(u)$ 과  $C_2(v(u))$ 가 주어졌을 때( $u, v \in [0, 1]$ ), 식 (6)으로 정의되는 ruled 곡면  $R(u, t)$ 의  $u, t$  isoparametric 곡선 간의 교차 각도가  $\theta$ 라고 하면, 적분함수  $AI$ 를 다음과 같이 정의한다.

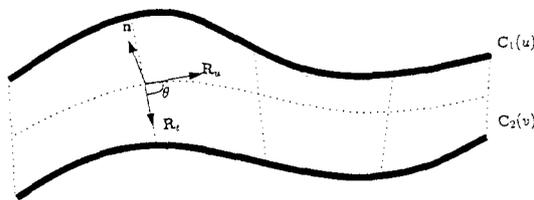


그림 5. Ruled 곡면에서의 isoparametric 곡선의 교차각도.

$$AI(v(u)) = \int_0^1 \int_0^1 \cos^2 \theta \, du \, dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\langle R_u, R_t \rangle}{|R_u| |R_t|} \right]^2 \, du \, dt \quad (8)$$

식 (8)의  $AI$ 는 reparametrization 함수  $v(u)$ 에 따라 결정된다. 일반적으로 두 곡선  $C_1(u)$ 과  $C_2(v)$ 가 주어졌을 때,  $AI=0$ 가 되는  $v(u)$ 는 일반적으로 존재하지 않지만,  $AI$ 를 최소로 하는  $u$ 에 대한  $v$ 의 reparametrization 함수  $v=v(u)$ 는 존재할 것이다.

### 3.2 Implementaion

본 논문에서는  $v(u)$ 를 ( $n-1$ )개의 자유도를 갖는 식 (9)와 같은 nonparametric 형태의 2차 B-spline 함수로 근사하고,  $v(u)$ 의 ( $n-1$ )개의 조절값  $f_i$ 을 최적화 변수로 하여 앞에서 정의한 식(8)의  $AI$ 를 최소화하는 최적화 문제로 변환했다(양끝의 조절값  $f_0=0, f_n=1$ 은 경계 조건을 위해 고정함). 즉,

$$v = v(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,2}(u) f_i \quad (9)$$

로 근사하면, 최적화 함수  $AI$  다음과 같이 표현할 수 있다.

$$AI(v(u)) = AI(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) \rightarrow MIN$$

$$constraints : 0 = f_0 < f_1 < f_2 < \dots < f_n = 1 \quad (10)$$

식 (10)의 구속조건은 reparametrization 함수  $v(u)$ 가 단조증가의 특성을 가져야 하기 때문이다. 그리고, 식 (9)가 정의되기 위해서는 knot vector  $U$ 를 결정해야 하는데, 편의상

$$U_{n=3} = \{0.0, 0.0, 0.0, 0.5, 1.0, 1.0, 1.0\}$$

$$U_{n=5} = \{0.0, 0.0, 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.0, 1.0\}$$

와 같은  $n$ 에 종속되는 uniform knot를 사용했다.

#### 3.2.1 최적화방법

식 (10)은 선형부등식(linear inequality)을 구속조건으로 갖는 비선형 최적화 문제이다. 일반적으로, 최적화 방법들은  $n$ 개의 변수와  $m$ 개의 구속조건이 있는 문제에서( $n > m$ ), 해를 추적해 나가는 작업차원(working dimension)에 따라  $n, m, n-m, n+m$  차원 방식 등으로 나눌 수 있다<sup>[26]</sup>. 본 논문에서는 ( $n-m$ )차원에서, 즉 구속조건을 만족하는 영역에서 식 (10)의 해를 추적하는 gradient projection 방식을 사용했다.

#### 3.2.2 최적화 함수 AI의 수치적분 및 미분

Gradient projection 방법을 사용함에 있어서 효율을

적인 line search 및 추적방향을 얻기 위해서는 최적화 변수  $f_1, f_2, \dots, f_n$ 에 대한 최적화 함수 AI값 및 그 미분값을 계산해야 한다. 두 곡선  $C_1(u), C_2(v)$ , 그리고  $f(i=0, \dots, n)$ 로 정의되는 reparametrization 함수  $\nu(u)$ 가 주어졌을 때, 식 (8)을 해석적으로 적분하는 것은 어렵다. 따라서, 다음과 같이 피적분 함수  $f(x)$ 를 다항식으로 근사하는 Gaussian quadrature를 수치적분에 사용한다.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_m f(x_m)$$

최적화 함수 AI의 피적분함수  $\cos^2\theta$ 를  $F(u, t, f)$ 라고 하면,

$$AI = \frac{1}{4} [w_1 w_2 \dots w_m]$$

$$\begin{bmatrix} F(u_1, t_1, f_i) & F(u_1, t_2, f_i) & \dots & F(u_1, t_m, f_i) \\ F(u_2, t_1, f_i) & F(u_2, t_2, f_i) & \dots & F(u_2, t_m, f_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(u_m, t_1, f_i) & F(u_m, t_2, f_i) & \dots & F(u_m, t_m, f_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

로 근사할 수 있다. 여기서,  $f_i$ 는 최적화 변수  $f(i=1, \dots, n-1)$ 를 나타낸다. 본 논문에서는  $m=12$ 인 abscissas( $u_i, t_i$ )와 이에 상응하는 가중치  $w_i$ 를 사용했다( $k, l=1, \dots, m$ ). 그리고, AI의 최적화 변수  $f(i=1, \dots, n-1)$ 에 대한 미분의 경우도 다음과 같은 central difference formula를 사용하여 수치미분을 했다.

$$\frac{\partial AI}{\partial f_i} = \frac{AI(f_i + h) - AI(f_i - h)}{2h}$$

이론적으로  $h$ 가 0에 접근할수록 좋은 결과를 얻을 수 있으나, round-off로 인한 오차를 줄이기 위하여 조심스러운 테스트를 거쳐서  $h=0.001$ 를 사용했다.

3.2.3 초기치 선택

비선형 최적화 문제에서 계산시간을 절약하고 국소 최소값(local minimum)으로의 수렴을 피하기 위해서 초기치의 선택은 대단히 중요하다. 식(10)의 최적화 문제에서 테스트한 곡선들  $C_1(u)$ 와  $C_2(v)$ 가 대부분 chord length를 기준으로 parametrization되어 있어서, 초기값  $f_i$ 들을  $\nu(u)=u$ 가 되도록 할당해도 대부분 잘 수렴했으나, 간혹 계산시간이 길어지고 국소 최소로 수렴하는 경우도 관찰할 수 있었다. 이러한 현상을 피하기 위해서, 초기치 선택을 하는데 point projection 방식을 사용했다. 즉, 한쪽 곡선에서 다른쪽 곡선으로 수직하게  $(n-1)$ 개의 ray를 발사하여, 수직하게 만나는 매개변수( $u_i, v_i$ )들을 구했다. 그리

고, 이를 보간하는  $f(i=1, \dots, n-1)$ 를 구해서 초기치로 사용했다(Fig. 6).

3.2.4 Implementation 예

Fig. 7은 사람 얼굴을 나타내는 35개의 단면곡선들을 연속하여 reparametrization한 후에 3차원 skinning한 결과이다. 전반적으로 Fig. 7(b)의 종방향 isoparametric 곡선들이 chord length에 따라 생성된 본래 곡선들을 skinning한 곡면을 나타낸 Fig. 7(a)보다 자연스럽다. Fig. 8은 Fig. 1의 skinning 곡면을  $n=3$ 으로 단면곡선들을 reparametrization한 후에 skinning한 결과이다. 결과곡면의 isoline이 원래의 것 보다 더 규칙적임을 알 수 있다. 결론적으로, skinning 곡면은 주어진 단면들의 조절점의 보간방법과 단면들의 parametrization에 의해 결정된다. Reparametrization 기법은 보다 나은 skinning 곡면을 얻기 위한 매개영역에서의 방법이다. 주어진 단면곡선

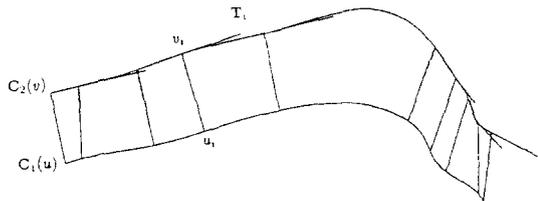


그림 6. 초기치 선택.

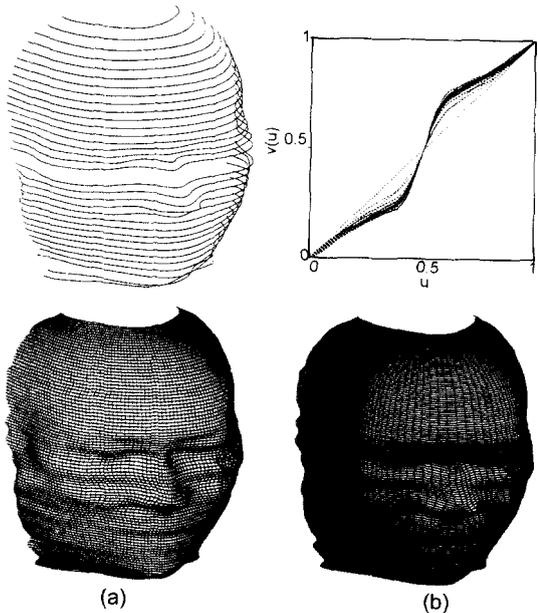


그림 7. 얼굴 단면곡선들의 연속적인 reparametrization (n=9): (a) reparametrization 전 skinning 곡면 (b) reparametrization 후 skinning 곡면.

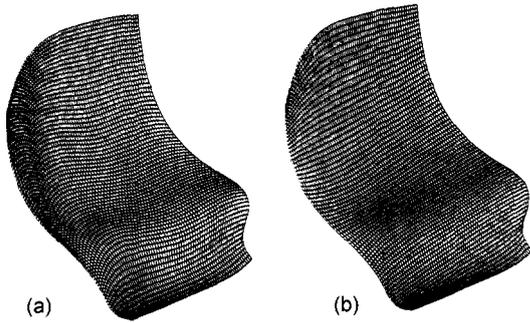


그림 8. 선박 선미 부분의 reparametrization (n=3): (a) Fig. 1의 곡면 (b) reparametrization 후의 skinning 곡면.

들의 reparametrization은 skinning 결과곡면의 조절점의 개수를 증가시키므로, 조절점의 개수를 줄이려면 knot 제거 알고리즘 등과 같은 별도의 적합한 후처리 방법들의 사용이 필요하다.

4. 체적 등의 구속조건하에서의 skinning 곡면

4.1 순정기준

기하학적 디자인 연구에 있어서 자유곡선/곡면의 순정에 대한 문제는 그 개념 자체도 다소 애매모호하고 지금까지 많은 연구가 이루어졌음에도 불구하고 아직도 많은 미해결 문제들을 남겨두고 있는 흥미로운 분야이다. 자동적인 형상순정방법은 완벽한 해법을 제공하기는 매우 어려우나, 디자인과정에서 적어도 디자인 목표에 가까운 solution을 도출할 수 있는 도구를 제공한다.

전통적으로 자유곡선의 순정은 곡선을 강철빔으로 가정하여 다음과 같은 곡선의 곡률( $\kappa$ )에 입각한 변형에너지(strain energy)를 최소화하는 다양한 연구가 있었다<sup>[12,22,25]</sup>.

$$\int \kappa^2 ds \rightarrow MIN$$

Sapidis<sup>[23]</sup> 등은 3차 B-spline 곡선/곡면의 knot vector에서 parametric continuity의 불연속성에 의한 곡률 ( $\kappa$ )의 불연속을 제거하기 위해, 해당 knot을 제거하고 그 knot에 영향을 받는 조절점들을 곡선/곡면의 형상이 최대한 변하지 않는 위치로 재배치하고, 다시 제자리에 knot을 삽입하는 국부순정방법을 제시했다. 또한, 이 방법을 공간 곡선에도 적용하여, 다른 순정방법들(주로 곡선의 미분에 바탕한 에너지 최소화 기법들)과 비교하였다<sup>[24]</sup>. 곡선과 마찬가지로 곡

면인 경우에도 곡면을 얇은 강판으로 가정하여 다음과 같이 정의되는 굽힘 변형에너지를 최소화하는 순정기준을 사용하였다<sup>[12,20]</sup>.

$$\int \kappa_1^2 + \kappa_2^2 dS \rightarrow MIN \tag{11}$$

이 순정기준은  $\kappa_1=\kappa_2=0$ 인 경우 절대최소가 되므로, 최적화된 곡면은 구속조건들을 만족하면서 가능한 평판이 되려는 경향이 있다. 그의 Rando<sup>[12,21]</sup> 등은 곡선/곡면에 대한 다양한 순정기준을 연구하였다.

서론에서 기술하였듯이, 본논문에서는 체적 등의 구속조건이 있을 때, skinning 결과곡면  $S(u, v)$ 을 아래와 같은 방법으로 생성했다.

1. 순정기준: 식 (11)을 단순화한 다음과 같은 parametric energy functional

$$E = \int_0^1 \int_0^1 S_{uu}^2 + 2S_{uv}^2 + S_{vv}^2 dudv \tag{12}$$

2. 구속조건:

- 단면곡선  $C_x$ 의 보간(skinning 조건)
- 결과곡면  $S(u, v)$ 의 체적과 중심

3. 자유변수: 식 (3)의 결과곡면 조절점 ( $m>K$ )

4. 최적화 방법: 구속조건들의 Lagrangian 상수  $\lambda$ 를 미지수로 하는 variational Lagrange method. 단, 체적 등의 구속조건이 최적변수에 대하여 비선형이다. 자유변수들의 2차원 최적화 문제로 처리하기 위해, 먼저 체적 등의 구속조건을 배제하고 순정된 skinning 곡면을 먼저 생성한다. 그 다음에 조절점들의 한 좌표(본논문에서는  $x값$ )를 고정한 후, 조절점들의  $y, z$ 좌표를 자유변수로 하여, 2항의 구속조건을 만족하는 순정곡면을 생성하는 방법을 사용했다.

4.2 Variational Lagrange Formulation

4.2.1 Lagrange 최적화 방법

본논문의 일관성을 위해, 2개의 등호구속조건이 있고, R개의  $e$ 를 자유변수로 갖는 최적화 문제를 생각하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &Minimize E(e) \\ &Subject to V(e) - V_0 = 0 \\ &xV(e) - x_0V_0 = 0 \end{aligned}$$

Lagrange 1차 필요조건에 의해 최적화 함수의 자유변수에 대한 미분벡터 (gradient)는 구속조건 함수의 미분벡터의 선형 조합이므로, 위의 최적화 문제는

$$\begin{aligned} \nabla E(e) &= \lambda_1 \nabla V(e) + \lambda_2 \nabla xV(e) \\ V(e) - V_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$xV(\mathbf{e}) - x_0V_0 = 0 \tag{13}$$

와 같은 연립방정식으로 재구성할 수 있다. 여기서,

$$\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_k]^T, \nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial e_1}, \frac{\partial}{\partial e_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial e_k} \right]^T$$

이고  $V_0$ ,  $x_0$ 는 상수이다. 위의 연립방정식에서 주어진 식들이  $(R+2)$ 개이므로,  $(R+2)$ 개의 미지수  $\mathbf{e}$ 와  $\lambda_1, \lambda_2$ 를 구할 수 있다.  $E$ 를 식 (12)의 에너지로,  $V$ 는 체적, 그리고  $xV$ 는 볼륨과  $x$ 방향의 곱으로 표현되는 1차 모멘트로 각각 생각하면, skinning 조건인 식 (5)을 포함하도록 결과곡면  $S(u, v)$ 의 조절점  $P_{i,j}$ 를 초과자유도 변수  $\mathbf{e}$ 로 변환하는 방법이 필요하다.

4.2.2 단면곡선 보간조건의 표현

식 (5)로 표현되는 skinning 조건은 결과곡면의 조절점  $P_{i,j}$ 를 미지수로 하는 선형식을 제공한다.  $(n+1)$ 개의 조절점을 갖는  $(K+1)$ 개의 호환 단면곡선  $C_k(u)$  ( $k=0, \dots, K$ )를 skinning한 결과곡면이 식 (3)의  $(n+1) \times (m+1)$ 개의 조절점  $P_{i,j}$ 로 표현될 때 ( $m > K$ ), 결과곡면  $S(u, v)$ 는  $R=(n+1) \times (m-K)$ 개의 초과자유도를 갖는다. 식 (3)의 basis 함수와 조절점들

$$\begin{aligned} [N_u N_v] &= [N_u^p(u) N_v^q(v)] \\ &= [N_{0,0}^p(u) N_{0,0}^q(v) \dots N_{n,0}^p(u) N_{n,0}^q(v) \dots \\ &\quad N_{n,0}^p(u) N_{m,0}^q(v) \dots N_{n,m}^p(u) N_{m,m}^q(v)] \end{aligned}$$

$$[P] = [P_{i,j}] = [P_{0,0} \dots P_{0,m} \dots \dots P_{n,0} \dots P_{n,m}]^T$$

와 같은 행벡터와 열벡터로 각각 표현하면, B-spline 곡면은

$$S(u, v) = [N_u N_v][P] \tag{14}$$

와 같은 행렬의 곱으로 표현할 수 있다. 식 (14)의 B-spline 곡면을 skinning 구속조건을 포함하는 R개의 초과조절점 변수  $\mathbf{e}$ 로 표현하면,

$$S(u, v) = [N_u N_v][L][\mathbf{e}] + [N_u N_v][F] \tag{15}$$

와 같이 된다. 식 (15)는 임의의 변수  $\mathbf{e}$ 에 대해서 항상 주어진 단면곡선을 포함하는 곡면을 나타낸다. 식 (14)로부터 단면곡선 보간조건을 포함하는 식 (15)를 유도하는 과정은 부록 A에 기술한다.

4.2.3 최적화 함수의 계산 및 미분

식 (12)의 곡면의 변형에너지를 표현하는 최적화 함수를 미분 요소별로 분리하여 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E &= E_{uu} + 2E_{uv} + E_{vv} \\ E_{uu} &= \int_0^1 \int_0^1 S_{uu} \cdot S_{uu} \, dudv \\ E_{uv} &= \int_0^1 \int_0^1 S_{uv} \cdot S_{uv} \, dudv \end{aligned}$$

$$E_{vv} = \int_0^1 \int_0^1 S_{vv} \cdot S_{vv} \, dudv \tag{16}$$

유침 B에서 식 (16)의 세산 및 초과조절점  $\mathbf{e}$ 에 대한 미분을 기술하는데,  $\mathbf{e}$ 에 대한 미분을 요약하면

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{e}} = [G][\mathbf{e}] + [T][F] \tag{17}$$

으로 표현된다.

체적등의 구속조건이 없을 때의 순정된 skinning 곡면은 최적화 1차 필요조건에 의해, 다음과 같이 식 (17)의 미분벡터를  $[0]$ 로 함으로써 얻을 수 있다.

$$[G][\mathbf{e}] + [T][F] = [0]$$

모든  $\mathbf{e}$ 에 대해  $E > 0$ 이고  $[G]$ 가 대칭이므로,  $[G]$ 는 positive definite 행렬이 되어,  $\mathbf{e}$ 는

$$[\mathbf{e}] = -[G]^{-1}[T][F] \tag{18}$$

과 같은 유일한 해를 갖는다.

Fig. 9에서는 간단한 7개의 단면곡선( $K=6$ )이 주어진 경우에, 각행의 초과자유도 조절점의 갯수  $r$ 를 변화시키면서, 식 (18)로부터 순정된 skinning 곡면을 구한 예를 보여준다.  $r$ 의 변화에 따라 균일한 knot vector를 사용하였는데, 육안으로는 거의 차이를 분간할 수 없다. Table 1에는 Fig. 9의  $r$ 의 변화에 따른

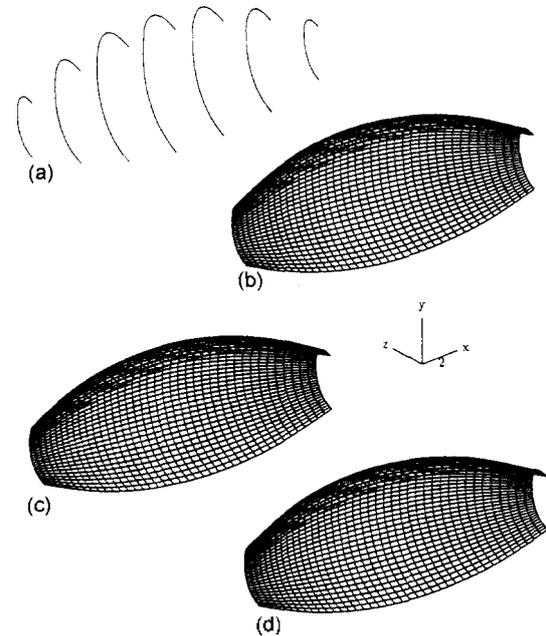


그림 9. 초과자유도(r)의 변화에 따른 skinning 순정곡면 : (a) K=6의 단면곡선, (b) r=2, (c) r=4, (d) r=6.

체적( $V$ ), 중심( $x$ ) 및 에너지( $E$ )의 값을 보여준다.

4.2.4 체적 등 구속조건의 계산 및 미분

단한 B-spline 곡면의 내부 체적과 그 중심은 Gauss' divergence 정리를 사용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

- B-spline 곡면  $S$ 의 체적  $V$ 의 계산

$$V = \int_0^1 \int_0^1 y(z_n x_v - x_n z_v) dudv \quad (19)$$

- B-spline 곡면  $S$ 로 둘러싸인 체적의  $x$  방향 중심에 대한 1차 모멘트  $xV$ 의 계산

$$xV = \int_0^1 \int_0^1 xy(z_n x_v - x_n z_v) dudv \quad (20)$$

위 식에서  $xV$ 는 체적  $V$ 로 나누지 않은 1차 모멘트 형태이고, 필요하다면  $yV$ ,  $zV$ 도 같은 방법으로 구할 수 있다. 유침 3에서 식 (19)와 식 (20)의 초과자유도 변수  $\{e\}$ 에 대한 계산 및 그 미분식을 유도한다. 유침 C에 유도된  $V$ ,  $xV$ 에 대한 미분식을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial e_y} &= [D_y][e_z] + [R_y][F_z] \\ \frac{\partial V}{\partial e_z} &= [D_z][e_y] + [R_z][F_y] \\ \frac{\partial xV}{\partial e_y} &= [xD_y][e_z] + [xR_y][F_z] \\ \frac{\partial xV}{\partial e_z} &= [xD_z][e_y] + [xR_z][F_y] \end{aligned} \quad (21)$$

이다.

4.2.5 최적화 방법 및 Implementation

식 (18)과 식 (21) 등의 결과를 사용하여 식 (13)의 Lagrange 조건식에 대입하면,

$$\begin{aligned} [G][e_y] + 6[T][F_y] - \lambda_1([D_y][e_z] + [R_y][F_z]) \\ - \lambda_2([xD_y][e_z] + [xR_y][F_z]) = [0] \\ [G][e_z] + [T][F_z] - \lambda_1([D_z][e_y] + [R_z][F_y]) \\ - \lambda_2([xD_z][e_y] + [xR_z][F_y]) = [0] \end{aligned}$$

와 같이,  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 에 의해 결정되는  $\{e_y\}$ ,  $\{e_z\}$ 를 미지수로 하는 연립방정식을 얻을 수 있다. 위식의 한쪽에  $[G]^{-1}$ 를 취하여  $\{e_y\}$ ,  $\{e_z\}$ 를 구하면,

표 1. Fig. 9의 데이터( $n=6, K=6$ )

그림	$r$	$R$	$m$	$x_0$	$V$	$E$
(b)	2	14	8	0.000	332.5	2103.2
(c)	4	28	10	0.000	332.6	2108.5
(d)	6	42	12	0.000	332.5	2101.5

$$\{e_y\} = [X_y]^{-1} [W_y], \{e_z\} = [X_z]^{-1} [W_z] \quad (22)$$

이 된다. 여기서,

$$\begin{aligned} [X_y] &= [G] - \lambda_1^2 [D_y][G]^{-1} [D_z] - \lambda_1 \lambda_2 [D_y][G]^{-1} [xD_z] \\ &\quad - \lambda_1 \lambda_2 [xD_y][G]^{-1} [D_z] - \lambda_2^2 [xD_y][G]^{-1} [xD_z] \\ [W_y] &= \lambda_1^2 [D_y][G]^{-1} [R_z][F_y] + \lambda_1 \lambda_2 [D_y][G]^{-1} [xR_z][F_y] \\ &\quad + \lambda_1 \lambda_2 [xD_y][G]^{-1} [R_z][F_y] + \lambda_2^2 [xD_y][G]^{-1} [xR_z][F_y] \\ &\quad - \lambda_1 [D_y][G]^{-1} [T][F_z] - \lambda_2 [xD_y][G]^{-1} [T][F_z] \\ &\quad + \lambda_1 [R_y][F_z] + \lambda_2 [xR_y][F_z] - [T][F_y] \\ [X_z] &= [G] - \lambda_1^2 [D_z][G]^{-1} [D_y] - \lambda_1 \lambda_2 [D_z][G]^{-1} [xD_y] \\ &\quad - \lambda_1 \lambda_2 [xD_z][G]^{-1} [D_y] - \lambda_2^2 [xD_z][G]^{-1} [xD_y] \\ [W_z] &= \lambda_1^2 [D_z][G]^{-1} [R_y][F_z] + \lambda_1 \lambda_2 [D_z][G]^{-1} [xR_y][F_z] \\ &\quad + \lambda_1 \lambda_2 [xD_z][G]^{-1} [R_y][F_z] + \lambda_2^2 [xD_z][G]^{-1} [xR_y][F_z] \\ &\quad - \lambda_1 [D_z][G]^{-1} [T][F_y] - \lambda_2 [xD_z][G]^{-1} [T][F_y] \\ &\quad + \lambda_1 [R_z][F_y] + \lambda_2 [xR_z][F_y] - [T][F_z] \end{aligned}$$

이다.

$\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 가 주어지면 식 (22)에 의해  $\{e_y\}$ ,  $\{e_z\}$ 가 결정되므로, 체적  $V$ 와 중심  $xV$ 는  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 의 함수로 생각할 수 있다. 비선형 수치해석적 방법에 의하여 구해지는 체적과 중심 구속조건을 만족하면서 식 (12)로 정의된 에너지를 최소로 하는 skinning 곡면을 찾을 수 있다.

전체적인 계산 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

1. 호환성을 가진 단면곡선  $C_k(u)(k=0, \dots, K)$ 를 정의하고, skinning 결과곡면의  $v$ 방향 차수  $q$ , 초과자유도( $r$ ), 그리고 이에 상응하는 knot vector를 입력한다.
2. 식 (18)를 이용하여 구속조건이 없을 때의 skinning 순정곡면을 구한다. 그런 후에, 조절점의 한 좌표( $x$ )를 고정한다. 그리고, 식 (22)의 계산에 필요한 다양한 행렬을 계산하여 저장한다.
3. 체적 등의 구속조건  $V_0$ ,  $x_0V_0$ 와  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 의 초기치를 입력한다.
4. 식 (23)의 비선형 수치해석을 통해  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 를 구하고, 이에 해당하는  $\{e\}$ ,  $\{P\}$ 를 계산한다.
5. 결과를 출력하고 체적, 중심, 그리고 에너지 등을 확인한다.

$\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 에 의해  $\{e\}$ 가 결정되므로, 식 (13)의 체적과 중심식은

$$V(\lambda_1, \lambda_2) - V_0 = 0, xV(\lambda_1, \lambda_2) - x_0V_0 = 0 \quad (23)$$

와 같이  $\lambda_1, \lambda_2$ 를 미지수로 하는 비선형 방정식이 된다. 이 방정식은

$$\begin{bmatrix} V_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2) & V_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2) \\ xV_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2) & xV_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda_1 \\ \Delta\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 - V(\lambda_1, \lambda_2) \\ x_0V_0 - xV(\lambda_1, \lambda_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{i+1} \\ \lambda_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^i \\ \lambda_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\lambda_1 \\ \Delta\lambda_2 \end{bmatrix}$$

의 반복을 통해서 해를 구할 수 있다. 위 식에서  $V$ 와  $xV$ 의  $\lambda_1, \lambda_2$ 에 대한 편미분은 앞장에서와 같은 central difference formula를 사용한 수치미분이 필요하다. 식 (23)은 다수의 해를 가질 수 있으나, 대개의 경우  $\lambda_1, \lambda_2$ 가 0에 가까운 값인 경우 상대적으로 합리적인 결과곡면을 얻을 수 있다. 체적  $V_0$ 만을 구속 조건으로 하는 경우는  $\lambda_2=0$ 로 하거나, 또는  $x_0V_0$ 와 관계된 행렬 계산을 배제하고, bisection 방법을 이용하여  $\lambda_1$ 를 구함으로써 안정된 해를 찾을 수 있다.

체적과 중심의 구속조건에 따른 결과곡면의 영향을 보여주는 3가지 예를 계산하였다. 단면곡선들은 열린 곡선을 사용하였고, skinning 결과곡면의 개구(opened part)는 평면으로 봉합하여 체적계산을 수행하였다. 입력되는 단면곡선과 결과곡면의

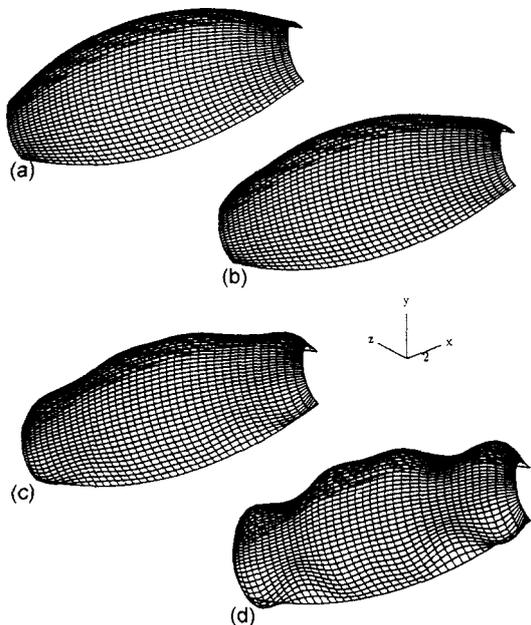


그림 10. 체적 변화에 따른 skinning 순정곡면.

skinning 방향 자수는 모두 3이다.

Fig. 10과 Table 2는 앞절에서 계산한 Fig. 9의 초기곡면을, 4개의 초과자유도( $r$ )를 사용하여 중심을 고정하고 체적을 약 10% 정도까지 과장되게 증가시킬 때, 결과곡면의 영향을 보여준다.

Fig. 11와 Table 3의 경우는, 체적을 고정하고 중심을 변화시킬 때의 영향을 보여준다. 주어진 단면곡선이 skinning 방향으로 대칭이어서, 체적을 고정한 상태에서 중심을 약간만 변화시켜도 형상이 뒤틀리고 에너지  $E$ 가 급속히 증가함을 확인할 수 있다.

Fig. 12와 Table 4의 경우는 선바 선수 부분에서 중심 구속조건은 배제하고 체적 구속조건만 있을 때

표 2. Fig. 10의 데이터( $n=6, K=6$ )

그림	$r$	$R$	$m$	$x_0$	$V$	$E$
(a)	4	28	10	0.000	332.6	2108.5
(b)	4	28	10	0.000	335.0	3212.8
(c)	4	28	10	0.000	340.0	10075.8
(d)	4	28	10	0.000	350.0	31507.8

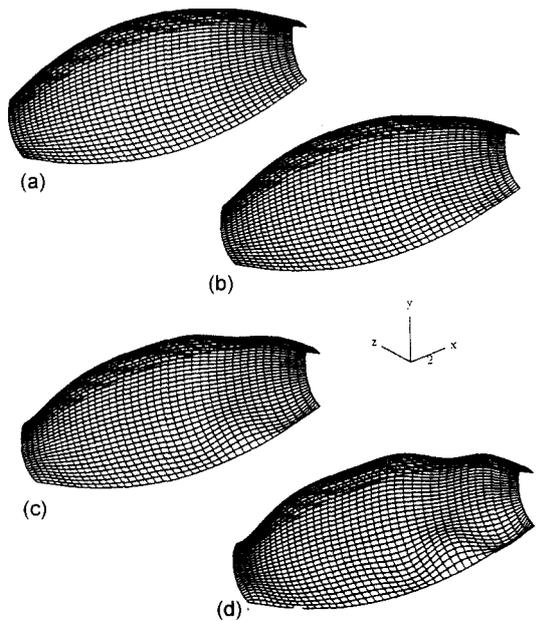


그림 11. 중심 변화에 따른 skinning 순정곡면.

표 3. Fig. 11의 데이터( $n=6, K=6$ )

그림	$r$	$R$	$m$	$x_0$	$V$	$E$
(a)	4	28	10	-0.000	332.6	2108.5
(b)	4	28	10	-0.020	332.6	2385.3
(c)	4	28	10	-0.050	332.6	3667.6
(d)	4	28	10	-0.100	332.6	8104.4

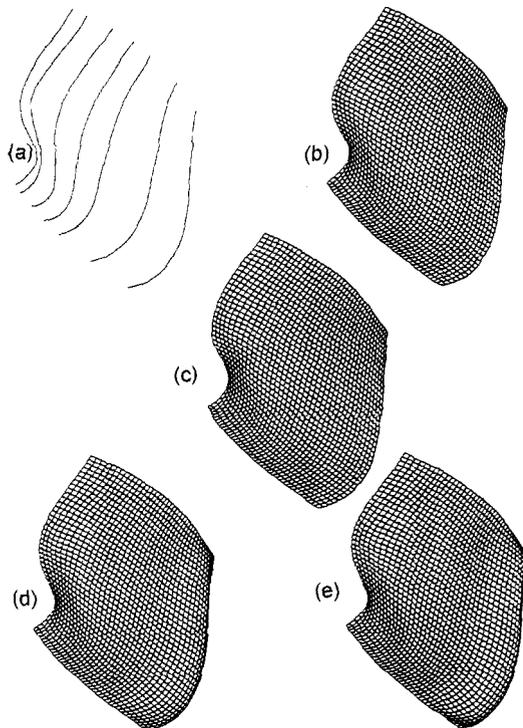


그림 12. 선박 선수부분의 체적변화에 따른 순정곡면.

표 4. Fig. 12의 데이터(n=11, K=6)

그림	r	R	m	$x_0$	V	E
(b)	2	24	8	232.27	17006.9	$2.389 \times 10^6$
(c)	2	24	8	232.26	17030.0	$2.389 \times 10^6$
(d)	2	24	8	232.10	17200.0	$2.395 \times 10^6$
(e)	2	24	8	232.02	17300.0	$2.403 \times 10^6$

의 순정곡면의 변화를 보여준다. 이 경우는 2개의 초과자유도(r)를 사용했으므로, 입력곡선의 조절점의 거리를 평균한 knot vector를 사용했다.

결론적으로, 입력되는 입의의 체적과 중심의 구속 조건이 초기 skinning 순정곡면의 그것들과 거리가 있으면 자연스러운 곡면을 얻기는 힘들다. 그러나, 곡면 디자이너는 초기 순정곡면과 가까운 범위에서, 체적과 중심 등의 설계 조건을 만족하는 순정곡면들을 쉽게 접근하는 폭 넓은 선택권을 가질 수 있다.

### 5. 결 론

본 논문에서는 B-spline skinning 방법을 사용하여 자유곡면을 디자인할 때, 자연스러운 결과곡면을 얻기 위한 단면곡선의 reparametrization 기법과 체적

등의 구속조건이 있을 때 곡면의 에너지에 바탕한 순정기준을 사용한 최적화 방법을 연구하였다. 주어진 단면곡선들의 parametrization에 따라 skinning 곡면은 다르게 디자인될 수 있다. 본 논문에서는 인접한 두 단면곡선으로 ruled 곡면을 만들고, 이것의 isoparametric 곡선 간의 교차 각도를 최대화 하는 직관적 기준을 사용하여, 자연스러운 초기 skinning 곡면을 디자인하는 reparametrization 방법을 제시했다. 단면곡선들의 reparametrization이 만족스런 결과곡면을 얻기 위한 매개 영역(parametric domain)에서의 방법이라면, 순정기준을 사용한 최적화 방법은 결과곡면의 조절점 영역에서 부드러운 결과곡면을 도출하기 위한 방법이라 할 수 있다. 본 논문에서는 곡면의 변형에너지에 바탕한 순정기준을 사용하여, 체적 등의 구속조건을 만족하는 skinning 곡면을 디자인하는 방법을 구현하였다. 체적 등의 구속조건 함수들의 조절점들에 대한 미분을 간단히 구하기 위하여, 구속조건이 없는 초기 순정 skinning 곡면을 생성한 후에 조절점의 한 좌표(x)를 고정하고, 체적과 중심을 만족하는 조절점의 y,z좌표를 재배치하는 방법을 사용했다. 최적화 방법에서, Lagrangian 상수  $\lambda_1, \lambda_2$ 와 초과 자유도 변수들을 미지수로 하는 비선형 방정식을 수치해석적 방법을 통해 풀었고, 그 결과로 초기 순정곡면과 가까운 범위 내에서 좋은 해들을 찾을 수 있었다. 이러한 방법은 일련의 단면곡선들로부터 자유곡면을 디자인할 때, 체적과 중심이 중요한 설계 요소가 되는 응용 분야들, 특히 조선 선박 디자인 부분에 사용될 수 있다.

### 참고문헌

1. Kim, M.-S., Park, E. J. and Lee, H. Y., "Modelling and Animation of Generalized Cylinders with Variable Radius Offset Space Curves", *The Journal of Visualization and Computer Animation*, Vol. 5, pp. 189-207, 1994.
2. Les Piegl and Wayne Tiller, "Algorithm for approximate NURBS skinning", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. 9, pp. 699-706, 1996.
3. Park, H. G. and Kim, K. S., "Smooth surface approximation to serial cross-sections", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. 12, pp. 995-1005, 1996.
4. Woodward, C. D., "Cross-Sectional Design of B-spline Surface", *Computer & Graphics*, Vol. 11, No. 2, pp. 193-201, 1987.
5. C. D. Woodward, "Skinning techniques for interactive B-spline surface interpolation", *Computer-*

*Aided Design*, Vol. 20, No. 8, pp. 441-451, Oct., 1988.

6. Hohmeyer, M. E. and Barsky, B. A., "Skinning Rational B-spline curves to construct an interpolatory surface", *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, Vol. 53, No. 6, pp. 511-521, Nov., 1991.
7. Coquillart, S., "A control point based sweeping technique", *IEEE Computer Graphics & Application*, Vol. 7, No. 11, pp. 36-45, Nov., 1987.
8. Choi, B. K. and Lee, C. S., "Sweep surfaces modeling via coordinate transformations and blending", *Computer-Aided Design*, Vol. 22, No. 2, pp. 87-96, March, 1990.
9. Filip, D. J. and Ball, T. W., "Procedurally Representing Lofted Surface", *IEEE Computer Graphics & Application*, Vol. 9, No. 6, pp. 27-33, Nov., 1989.
10. Piegel, L. and Tiller, W., "The NURBS Book", Springer-Verlag, Berlin, 1995.
11. Farin, G., "Curves and Surface for Computer Aided Geometric Design", Academic Press, New York, USA, 1988.
12. Hoschek, J. and Lasser, D., "Fundamentals of Computer Aided Geometric Design", AK PETER, USA, 1989.
13. Nawacki, H. and Lu, X., "Fairing Bezier curves with constraints", *Computer Aided Geometric Design*, No. 7, pp. 43-55, 1990.
14. Nawacki, H. and Lu, X., "Fairing composite polynomial curves with constraints", *Computer Aided Geometric Design*, No. 11, pp. 11-15, 1994.
15. Cohen, S., Elber, G. and Yehuda, R. B., "Matching of freeform curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 29, No. 5, pp. 369-378, May, 1997.
16. Fuchs, H., Kedem, Z. M. and Uselton, S. P., "Optimal Surface Reconstruction from Planner Contours", *Communications of the ACM*, Vol. 20, No. 10, pp. 693-702, Oct., 1977.
17. Shinagawa, Y. and Kunii, T., "Homotopy model: a generalized method surface generation from cross sectional data", *The Visual Computer*, No. 7, pp. 72-86, 1991.
18. Meyers, D., Skinner, S. and Sloan, K., "Surface from Contours", *ACM Transaction on Graphics*, Vol. 11, No. 3, pp. 228-258, July, 1992.
19. Do Carmo, M. P., "Differential Geometry of Curves and Surface", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.
20. Lott, N. L. and Pullin, D. I., "Method for fairing B-spline surface", *Computer-Aided Design*, Vol. 20, No. 10, pp. 597-604, December, 1992.
21. Rando, T. and Roulier, J. A., "Designing faired

- parametric surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. 23, No. 7, pp. 492-497, September, 1991.
22. Farin, G. and Sapidis, N., "Curvature and the Fairness of Curves and Surfaces", *IEEE Computer Graphics & Applications*, pp. 52-57, March, 1989.
23. Sapidis, N. and Farin, G., "Automatic fairing algorithm for B-spline curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 22, No. 2, pp. 121-129, March, 1990.
24. Pigounakis, K. G., Sapidis, N. and Kaklis, P. D., "Fairing Spatial B-Spline Curves", *Journal of Ship Research*, Vol. 40, No. 4, pp. 351-367, Dec., 1996.
25. Moreton, H. P. and Sequin, C. H., "Minimum Variation Curves and Surfaces for CAGD", *Computer Graphics*, Vol. 26, No. 2, pp. 170-172, July, 1992.
26. Luenberger, D. G., "Linear and Nonlinear Programming", 2nd edition: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

<부 록>

A. 단면곡선 보간조건 포함식의 유도

식 (5)의 skinning 선형방정식을  $i$ 번째행에 대해서 다시쓰면,

$$[M][P_i]_{(m+1) \times 1} = [Q_i]_{(K+1) \times 1} \tag{A.1}$$

이 된다. 여기서,  $[M] = [N_i^q(\bar{v}_k)]_{(K+1) \times (m+1)}$ 의 상수 행렬이다. 식 (A.1)의 왼쪽식을 선형식의 갯수  $(K+1)$ 와 각행의 초과 자유도  $r = (m-K)$ 에 따라 분리하면,

$$[M_1, M_2] \begin{bmatrix} P_i^1 \\ P_i^2 \end{bmatrix} = [Q_i] \tag{A.2}$$

이 된다. 여기서,  $[M_1]_{(K+1) \times (K+1)}$ 과  $[M_2]_{(K+1) \times r}$ 는

$$[M_1] = \begin{bmatrix} N_0^q(\bar{v}_0) & \cdots & N_K^q(\bar{v}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ N_0^q(\bar{v}_K) & \cdots & N_K^q(\bar{v}_K) \end{bmatrix}$$

$$[M_2] = \begin{bmatrix} N_{K+1}^q(\bar{v}_0) & \cdots & N_m^q(\bar{v}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ N_{K+1}^q(\bar{v}_K) & \cdots & N_m^q(\bar{v}_K) \end{bmatrix}$$

이고,

$$[P_i^1]_{(K+1) \times 1} = [P_{i,0} \cdots P_{i,K}]^T$$

$$[P_i^2]_{r \times 1} = [P_{i,K+1} \cdots P_{i,m}]^T$$

이다. 이제 곡면의 조절점이 임의의 초과변수에

중속되도록 하기 위하여, 행렬  $[M]$ 의 대각요소가 가장 크게 채정렬 되도록(dominant main diagonal),  $[TR]_{(m+1) \times (m+1)}$ 을 선택하여 식 (A.2)를 다시 쓰면,

$$[M_1, M_2][TR][TR]^{-1} \begin{bmatrix} P_i^1 \\ P_i^2 \end{bmatrix} = [Q_i]$$

이 된다. 그리고, 앞식의 좌변을

$$[\bar{M}_1, \bar{M}_2] = [M_1, M_2][TR],$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i^1 \\ \bar{P}_i^2 \end{bmatrix} = [TR]^{-1} \begin{bmatrix} P_i^1 \\ P_i^2 \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

로 각각 분리하면,  $[\bar{M}_1][\bar{P}_i^1] + [\bar{M}_2][\bar{P}_i^2] = [Q_i]$  또는  $[\bar{P}_i^1] = -[\bar{M}_1]^{-1}[\bar{M}_2][\bar{P}_i^2] + [\bar{M}_1]^{-1}[Q_i]$ 가 되는 다음과 같은

$$[\bar{M}_1, \bar{M}_2] \begin{bmatrix} \bar{P}_i^1 \\ \bar{P}_i^2 \end{bmatrix} = [Q_i]$$

식을 얻을 수 있다. 결국,

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i^1 \\ \bar{P}_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\bar{M}_1]^{-1}[\bar{M}_2] \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_i^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{M}_1]^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} [Q_i]$$

으로 표현할 수 있고, 이식을 식 (A.3)에 대입하면,

$$\begin{bmatrix} P_i^1 \\ P_i^2 \end{bmatrix} = [TR] \begin{bmatrix} \bar{P}_i^1 \\ \bar{P}_i^2 \end{bmatrix} \\ = [TR] \left[ \begin{bmatrix} -[\bar{M}_1]^{-1}[\bar{M}_2] \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_i^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{M}_1]^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} [Q_i] \right]$$

이 된다.  $[\bar{P}_i^2]$ 를  $i$ 번째 행의 초과 조절점으로 생각 하고,  $[e_i] = [\bar{P}_i^2]$ 로 변수를 바꾸면,

$$[P_i] = [L_c][e_i] + [F_i]$$

와 같은 임의의 변수  $[e_i]$ 로 표현된 선형식을 얻을 수 있다<sup>13,14)</sup>. 여기서,  $[L_c]$ 과  $[F_i]$ 는 상수행렬이다. 이제  $i=0, \dots, n$ 으로 행을 변화시키면서, 곡면 전체의 조절점들에 대해서 초과변수로 치환하면,

$$[P] = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_c] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L_c] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [L_c] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

의 행렬을 구할 수 있다.

위 식에서  $[L] = [L]_{(n+1)(m+1) \times R}$ ,  $[e] = [e]_{R \times 1}$ , 그리고  $[F]_{(n+1)(m+1) \times 1}$ 의 크기이다. 위 식을 간략히 다시 쓰면

$$[P] = [L][e] + [F]$$

으로 표현할 수 있고, 단면곡선을 보간하는 곡면은

$$S(u, v) = [N_u \ N_v][P] = [N_u \ N_v]([L][e] + [F]) \\ = [N_u \ N_v][L][e] + [N_u \ N_v][F]$$

으로 표현할 수 있다.

**B. 최적화 함수의 계산 및 미분식 유도**

식 (16)의  $E_m$ 에 식 (15)를  $u$ 에 대해 2번 미분하여 대입하면,

$$E_{uu} = \int_0^1 \int_0^1 ([N_u'' N_v][P]) \cdot ([N_u'' N_v][P]) dudv \\ = \int_0^1 \int_0^1 ([N_u'' N_v][L][e] + [N_u'' N_v][F]) \cdot \\ ([N_u'' N_v][L][e] + [N_u'' N_v][F]) dudv$$

으로 표현할 수 있다. 위식에서  $u, v$  적분구간을 서로 다른 knot 구간으로 분리하면( $u$ 방향:  $mp'$ ,  $v$ 방향:  $mq'$ 개의 구간), 분리된 적분구간 사이에서 B-spline basis 함수  $N_u, N_v$ 는 각각  $p$  또는  $q$ 차의 단항식(monomial polynomial)이므로, 이에 상응하는  $n_g$ 개의 Gaussian abscissas를 사용하여 적분하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_{uu} = \sum_{i=0}^{mp'} \sum_{j=0}^{mq'} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (x_{iu}^2 + y_{ju}^2 + z_{ju}^2) dudv \\ = \sum_{i=0}^{mp'} \sum_{j=0}^{mq'} \sum_{k=1}^{n_g} \sum_{l=1}^{n_g} w_k w_l (x_{iu}^2 + y_{ju}^2 + z_{ju}^2)$$

여기서,  $w_k, w_l$ 은 적분구간을 포함한 Gaussian weight이고,

$$x_{iu}^2 = ([N_u'' N_v][L][e_x] + [N_u'' N_v][F_x])^T \cdot \\ ([N_u'' N_v][L][e_x] + 6[N_u'' N_v][F_x]) \\ y_{ju}^2 = ([N_u'' N_v][L][e_y] + [N_u'' N_v][F_y])^T \cdot \\ ([N_u'' N_v][L][e_y] + [N_u'' N_v][F_y]) \\ z_{ju}^2 = ([N_u'' N_v][L][e_z] + 6[N_u'' N_v][F_z])^T \cdot \\ ([N_u'' N_v][L][e_z] + 6[N_u'' N_v][F_z])$$

로서,  $[N_u'' N_v]$ 는  $i, j, k, l$ 에 종속한다.  $E_m$ 의  $[e_i]$ 에 대한 미분을 구하면,

$$x_{iu}^2 = ([e_x]^T [L]^T [N_u'' N_v]^T + [F_x]^T [N_u'' N_v]^T) \cdot \\ ([N_u'' N_v][L][e_x] + [N_u'' N_v][F_x]) \\ = [e_x]^T [L]^T [N_u'' N_v]^T [N_u'' N_v][L][e_x]$$

$$\begin{aligned}
 &+ [e_x]^T [L]^T [N_u'' N_v]^T [N_u'' N_v] [F_x] \\
 &+ [F_x]^T [N_u'' N_v]^T [N_u'' N_v] [L] [e_x] \\
 &+ [F_x]^T [N_u'' N_v]^T [N_u'' N_v] [F_x]
 \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{uu}}{\partial e_x} &= \frac{2 \left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [L]^T [N_u'' N_v]^T [N_u'' N_v] [L] \right) [e_x]}{[G_{uu}]} \\
 &+ \frac{2 \left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [L]^T [N_u'' N_v]^T [N_u'' N_v] \right) [F_x]}{[T_{uu}]}
 \end{aligned}$$

이다. 여기서,  $[G_{uu}]$ 는 대칭행렬이다.  $E_{uu}$ 의  $[e_x]$ ,  $[e_z]$ 에 대한 미분도 동일하므로,  $[e]$ 에 대한 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial E_{uu}}{\partial e} = 2[G_{uu}][e] + 2[T_{uu}][F] \quad (B.1)$$

이와 비슷하게  $E_{uv}$ 의  $[e_x]$ 에 대한 미분의 경우에,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{uv}}{\partial e_x} &= \frac{2 \left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [L]^T [N_u' N_v]^T [N_u' N_v] [L] \right) [e_x]}{[G_{uv}]} \\
 &+ \frac{2 \left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [L]^T [N_u' N_v]^T [N_u' N_v] \right) [F_x]}{[T_{uv}]}
 \end{aligned}$$

이므로,

$$\frac{\partial E_{uv}}{\partial e} = 2[G_{uv}][e] + 2[T_{uv}][F] \quad (B.2)$$

가 된다.

동일하게  $E_{vv}$ 의  $[e_x]$ 에 대한 미분에도 적용하면,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{vv}}{\partial e_x} &= \frac{2 \left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [L]^T [N_u N_v'']^T [N_u N_v''] [L] \right) [e_x]}{[G_{vv}]} \\
 &+ \frac{2 \left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [L]^T [N_u N_v'']^T [N_u N_v''] \right) [F_x]}{[T_{vv}]}
 \end{aligned}$$

이므로,

$$\frac{\partial E_{vv}}{\partial e} = 2[G_{vv}][e] + 2[T_{vv}][F] \quad (B.3)$$

가 된다. 식 (B.1), 식 (B.2), 그리고 식(B.3)을 합쳐서 곡면의 에너지 함수 E의  $[e]$ 에 대한 미분을 표현하면,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial e} &= \frac{\partial E_{uu}}{\partial e} + 2 \frac{\partial E_{uv}}{\partial e} + \frac{\partial E_{vv}}{\partial e} \\
 &= \frac{(2[G_{uu}] + 4[G_{uv}] + 2[G_{vv}])[e]}{[G]} \\
 &+ \frac{(2[T_{uv}] + 4[T_{uv}] + 2[T_{vv}])[F]}{[T]} \\
 &= [G][e] + [T][F]
 \end{aligned}$$

으로 표현할 수 있다.

### C. 체적 등의 구속조건 계산 및 미분식 유도

식 (20)과 식 (21)을 서로 다른 knot의 정의구간으로 분리하면,

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_{u_j}^{u_{j+1}} (x_v y_z u - x_u y_z v) dudv \\
 &= \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l (x_v y_z u - x_u y_z v) \\
 xV &= \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l x (x_v y_z u - x_u y_z v)
 \end{aligned}$$

이다. 제 4.1절에서 언급하였듯이, 초기 skinning 순 정곡면을 얻은 후, skinning 방향의 조절점의 한 좌표(x좌표)는 고정한다. 앞절에서와 비슷한 방법으로 V와 xV의  $[e_y]$ ,  $[e_z]$ 의 미분을 구하면,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial e_y} &= \frac{\left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [A_y] \right) [e_z]}{[D_y]} \\
 &+ \frac{\left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [B_y] \right) [R_y]}{[F_z]} \\
 \frac{\partial V}{\partial e_z} &= \frac{\left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [A_z] \right) [e_y]}{[D_z]} \\
 &+ \frac{\left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [B_z] \right) [R_z]}{[F_y]} \\
 \frac{\partial xV}{\partial e_y} &= \frac{\sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [xA_y] [e_z]}{\{xD_y\}} \\
 &+ \frac{\left( \sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l [xB_y] \right) [F_z]}{[xR_y]}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial xV}{\partial e_z} = \frac{(\sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} w_k w_l [xA_z]) [e_y]}{[xD_z]} + \frac{(\sum_{i=0}^{m_i'} \sum_{j=0}^{m_j'} \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} w_k w_l [xB_z]) [xR_z]}{[F_y]} \quad (C.1)$$

이 된다. 여기서,

$$\begin{aligned} [A_y] &= [N_u N_v] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u' N_v'] [L] \\ &\quad - [N_u' N_v'] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u N_v'] [L] \\ [B_y] &= [N_u N_v] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u' N_v'] \\ &\quad - [N_u' N_v'] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u N_v'] \\ [A_x] &= [N_u N_v] [P_x] [L]^T [N_u' N_v']^T [N_u N_v] [L] \\ &\quad - [N_u' N_v'] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u N_v] [L] \\ [B_x] &= [N_u N_v] [P_x] [L]^T [N_u' N_v']^T [N_u N_v] \\ &\quad - [N_u' N_v'] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u N_v] \\ [xA_y] &= [N_u N_v] [P_x] ([N_u N_v] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u' N_v'] [L] \\ &\quad - [N_u' N_v'] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u N_v] [L]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [xB_y] &= [N_u N_v] [P_x] ([N_u N_v] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u' N_v'] \\ &\quad - [N_u' N_v'] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u N_v] [L]) \\ [xA_z] &= [N_u N_v] [P_x] ([N_u N_v] [P_x] [L]^T [N_u' N_v']^T [N_u N_v] [L] \\ &\quad - [N_u' N_v'] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u N_v] [L]) \\ [xB_z] &= [N_u N_v] [P_x] ([N_u N_v] [P_x] [L]^T [N_u' N_v']^T [N_u N_v] \\ &\quad - [N_u' N_v'] [P_x] [L]^T [N_u N_v]^T [N_u N_v] [L]) \end{aligned}$$

이다. 식 (C.1) 등으로부터  $V, xV$ 에 대한 미분식을 요약하면 본문의 식 (21)을 얻을 수 있다.



**김 형 철**

1989년 서울대학교 조선공학과 학사  
 1998년 포항공과대학교 정보통신대학원 석사  
 1989년 ~ 현재 대우중공업(주) 선박해양 기술연구소 선임연구원  
 관심분야 : 곡선/곡면의 기하학적 디자인, 조선설계 CAD 시스템