

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第 35 卷 第 2 號 1998 年 5 月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 35, No. 2, May 1998

## 몰수체 모형 시험 해석을 위한 운동방정식의 구조 선택 및 계수 식별 결합법

김 찬 기 \*

### The Combined Method of Structure Selection and Parameter Identification of Equations of Motion to Analyze the Model Tests of a Submerged Body

by

C. K. Kim \*

#### 요 약

몰수체의 운동을 정확하게 예측하기 위해서는 동적 모형의 비선형 구조를 선택하고, 이에 해당하는 조종계수를 모형 시험을 통해 추정하여야 한다. 모형 구조가 주어지면 조종계수들의 값만이 미지수가 되어 추정은 표준 최소 자승 문제로 정식화될 수 있다. 불행하게도 몰수체들의 비선형 모형 구조는 거의 알려지지 않고 있다. 따라서, 모형 시험에서 측정된 자료들로부터 운동 방정식의 구조를 결정하는 방법을 개발하여 계수 추정 절차에 중요한 한 부분으로 포함시켜야 한다.

본 연구에서는 모형 시험 결과 해석을 위해 널리 사용되고 있는 최소 자승 알고리즘과 그 성능 평가법에 대해 살펴보고, Gram-Schmidt에 의한 직교 분리법에 기초를 둔 계수 식별 알고리즘을 매우 단순하고 효과적으로 구조 선택법과 계수 추정법을 결합할 수 있도록 확장하였다. 마지막으로 시뮬레이션과 실제 몰수체에 대한 모형 시험 자료로의 적용을 통해 이 기법의 성능을 검증하였다. 결론적으로 본 연구의 방법은 모형 시험 결과로부터 효율적으로 운동 방정식의 구조를 식별하고 조종 계수를 추정함을 확인하였다.

---

접수일자 : 1997년 10월 7일, 재접수일자 : 1998년 1월 26일

\* 정회원, 국방과학연구소

Abstract

To accurately predict the motion of a submergible, the nonlinear structure of dynamic model should be selected and corresponding parameters should be estimated using model test. Providing the model structure, only the values of parameters are unknown and the estimation can thus be formulated as a standard least square problem. Unfortunately, the nonlinear model structure of submersibles is rarely known a prior and method of model structure determination from measurement data of model test should be developed and included as a vital part of the estimation procedure.

In this study, the well-known linear least square algorithm for the analysis of model tests and a way to measure the goodness are reviewed, and the identification algorithm based on an orthogonal decomposition method of Gram-Schmidt is extended to combine structure selection and maneuvering coefficients estimation in a very simple and efficient manner. Finally, the efficiency of this algorithm is verified by using simulation and applying to the analysis of model test of a submerged body. As a result, it was verified that this combined method might be very effective in selecting the structure of dynamic model estimating the maneuvering coefficients from measurement data of model test.

1. 서론

물수체의 조종 계수는 수조에서의 모형 시험에서 측정된 유체력을 매개화하여 획득된다[1]. 유체력에 대한 수학 모형의 구조가 주어지면 매개화는 조종 계수만이 미지수가 되어 잘 알려진 최소자승 문제로 정식화된다. 그러나 수학 모형의 구조가 주어지지 않으면 그 구조도 결정되어야 할 미지수가 된다. 즉, 물수체 형상이 기존 계열에서 벗어나는 경우는 운동 방정식을 재구성하여야 하므로 구조 선택 절차도 모형 시험 결과 해석에 포함되어야 한다.

모형 시험으로부터 조종계수를 추정하기 위하여 가장 널리 사용되는 방법은 최소 자승법이다. 최소 자승법의 해를 구하는 방법은 크게 세 가지로 분류될 수 있다. 첫 번째는 정규 방정식의 해를 직접 구하는 방법으로 계산 시간상 가장 경제적이거나, 정보 행렬의 조건이 좋지 않은 경우 수치 오차가 상당히 커지는 단점이 있다. 두 번째는 특이치 분리법으로 정보 행렬이 상당히 불안정한 경우에도 안정된 해를 주지만, 계산 시간이 많이 걸리

는 단점이 있다. 세 번째는 첫 번째와 두 번째의 중간적인 것으로 정보 행렬의 직교 분리를 이용하는 방법이다. 이 방법은 어느 정도 정보 행렬의 불안정성을 용납할 수 있고, 계산 시간도 그리 크지 않다. 일반적으로 모형 시험 결과 해석에는 첫 번째 방법이 가장 널리 사용된다. 그러나 운동 방정식의 구조를 선택하는 경우는 초기에 임의의 가능한 항들이 모두 포함되어 정보행렬이 불안정해질 수 있다. 따라서 본 연구의 목적으로는 계산 시간도 그리 길지 않고 어느 정도 수치적으로도 안정한 세 번째 방법이 적당하다고 할 수 있다.

1989년 Chen 등[2]은 직교 최소자승법으로 비선형 동적계의 수학 모형 구조와 매개변수를 식별하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 가식별성의 필요조건으로 입력변수가 지속적으로 자극할 것을 요구한다[3]. 또한, 운동방정식 전체를 식별하려면 모형 구조에 포함될 수 있는 항이 많아져서 수치적 정확성이 떨어지게 된다. 그러나, 이 방법을 입력 신호를 조절하기 용이하고 관성력과 감쇠력을 독립시킬 수 있는 모형 시험 결과 해석에 적용하면 상당한 신뢰성을 가질 것으로 판단된다.

본 연구에서는 Gram-Schmidt 직교 분리를 사용하여 구조 선택과 계수 추정을 동시에 수행하는 방법을 제시하고, 시뮬레이션과 실제 모형시험 자료에 적용하여 이 기법의 성능을 검증하였다.

## 2. 최소 자승 문제의 구성

운동방정식의 매개변수인 조종계수  $\theta = \{\theta_i\}$ 를 구하기 위한 모형 시험에서는 상태변수와 입력변수를 변화시켜 가며 유체력  $f = \{f_i\}$ ,  $i=1, \dots, M$ 를 측정하고, 이 유체력을 함수

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x}; \theta) \ F_2(\mathbf{x}; \theta) \ \dots \ F_M(\mathbf{x}; \theta)]^T \quad (1)$$

에 근사시켜 조종계수를 추정한다. 이 때  $\mathbf{x}$ 는 상태변수와 입력변수로 구성된  $N_s$  벡터이다. 함수  $F(x)$ 는  $i = 1, \dots, M$ 에 대해 다음과 같이 매개변수에 선형적으로 종속되게 선택될 수 있다.

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{x}_i) &= \theta_1 \phi_{i1}(\mathbf{x}_i) + \dots + \theta_{N_c} \phi_{iN_c}(\mathbf{x}_i) \\ \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{P} \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{P}$ 는 각 요소가 미리 선택된 함수  $\phi_{ij}$ 인  $M \times N_c$ 의 행렬이며,  $\phi_{ij}$ 는 서로 선형적으로 독립이다. (2)식으로 실측 자료를 근사화하는 방법은 편차  $d_i = f_i - F_i(\mathbf{x}_i; \theta)$ ,  $i=1, \dots, M$ 이 동시에 최소화되도록  $\{\theta^*\}$ 를 선택하는 것이다. 즉,  $M$  벡터  $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_M]^T$ 의 norm을 가능한 한 작게 하는 것이다. 이를 위해 다음과 같은 2-norm을 사용하는 것이 일반적이다.

$$\|\mathbf{d}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^M |d_i|^2 \right)^{1/2} \quad (3)$$

(2)의 문제는 (3)의 목적함수를 최소화하는  $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta^*_1 \ \dots \ \theta^*_M]^T$ 를 찾는 최소자승 문제가 된다. 이제  $\theta^*_i$ 를 찾기 위해 (3)식을 정식화해 보자. 제곱근은 단조 함수이므로 (3)식의 최소화는  $\|\mathbf{d}\|_2^2$ 의

최소화와 동일하다. 다음의 목적 함수를 최소화하는  $\boldsymbol{\theta}^*$  점에서

$$J = \|\mathbf{d}\|_2^2 = \sum_{i=1}^M [f_i - F_i(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta})]^2 \quad (4)$$

$J$ 의 미분이 영이 되는 것( $\nabla J(\boldsymbol{\theta}^*) = 0$ )은 필요 조건이고, (2)식으로부터 다음이 성립하므로

$$(\partial/\partial_i)[f_k - F(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\theta})] = -\phi_{ki}(\mathbf{x}_k) \quad (5)$$

$i=1, \dots, N_c$ 에 대해  $\boldsymbol{\theta}^*$ 는 소위 “정규 방정식”이라고 하는 다음 식을 만족한다.

$$\sum_{k=1}^M [f_k - F_k(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\theta})]^2 \phi_{ki}(\mathbf{x}_k) = 0 \quad (6)$$

“정규”란 말은 오차 벡터  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 가 다음의  $N_c$  벡터의 각각에 직교이기 때문에 주어졌다.  $i=1, \dots, N_c$ 에 대해 다음을 정의하면,

$$\boldsymbol{\theta}_i \equiv [\phi_{i1}(\mathbf{x}_1) \ \dots \ \phi_{iM}(\mathbf{x}_M)]^T$$

(6)식은 다음과 같이 다시 쓰일 수 있다.

$$\boldsymbol{\theta}_i^T \mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}^*) = 0 \quad i = 1, \dots, N_c \quad (7)$$

(7)식은 오차 벡터가 모든 가능한 근사 함수들에 직교함을 의미한다. (7)식을 다음과 같이 정보 행렬  $\mathbf{P}$ 에 대한 행렬 연산식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{P}^T \mathbf{f} \quad (8)$$

이로써  $N_c$  개의 미지수  $\theta^*_1, \theta^*_2, \dots, \theta^*_M$ 를 갖는 선형 방정식으로 최소자승 문제가 구성되었다. 이제 조종계수 추정 결과의 “좋은(goodness)”을 평가하는 방법에 대해 살펴보자. 어떤 특정 매개변수에 대한 추정 분포의 기대치가 실제 매개변수와 같은 추정자는 비편향(unbiased)된 추정자이

다. 그리고 추정된 매개변수의 분산의 크기가 작을수록 추정자가 실제 매개변수에 근접할 확률이 증가한다. 최소자승 추정자는 비편향 추정자이다 [4]. 따라서, 다음과 같이 각 계수들에 대한 분산만을 조사하면 된다.

$$V(\theta_i) = c_{ii} \sigma \tag{9}$$

여기서  $c_{ii}$ 는  $(x^T x)^{-1}$  행렬의 대각 요소이다. 이것은 각 매개 변수의 좋음을 평가하는 기준이 된다. 추정 결과의 전체적인 좋음의 기준으로는 다음과 같은 측정 변수의 분산에 대한 비편향 추정자를 정규화하여 사용할 수 있다.

$$\eta = (f^T f - \theta^T x^T f) / (M - N_c) \tag{10}$$

### 3. Gram-Schmidt법에 의한 직교 분리

$P^T P$ 가 좋지 않은 조건일 때 정규 방정식을 직접 풀면 얻어진 답이 수치적으로 매우 부정확해진다. 이 문제를 피할 수 있는 간단한 방법은 다음과 같이 관측점에서  $\varphi_{ij}$ 가 직교하도록 선택하는 것이다.

$$\varphi_i \varphi_j^T = 0 \quad \text{for } i \neq j \tag{11}$$

(8)식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{N_c} \theta_j^* \varphi_i \varphi_j^T = \varphi_i^T f, \quad i = 1, \dots, N_c$$

이 식에 (11)의 조건을 대입하면  $i=1, \dots, N_c$ 에 대해 다음과 같은 단순한 방정식을 얻을 수 있다.

$$\theta_i^* \varphi_i \varphi_i^T = \varphi_i^T f \tag{12}$$

(12)식과 같은 형태로 (8)식을 변환시켜 보자.  $P$ 는 full rank이므로 다음과 같이 인수화될 수 있다.

$$P = QR \tag{13}$$

이 때  $Q$ 는 행들이 정규 직교한  $M \times N_c$ 의 직교 행렬( $Q^T Q = I$ )이고,  $R$ 은  $N_c \times N_c$ 의 상위 삼각 행렬이다. (8)식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$Q^T Q R \theta^* = Q^T f \tag{14}$$

$R \theta^*$ 가 미지수이면 (14)식은 (12)와 동일하다. (13)식의 인수화는 Gram-Schmidt법, Householder 변환, Givens 법 등으로 수행될 수 있는데, 본 연구에서는 Gram-Schmidt법을 사용하겠다.

(13)식 보다 제곱근의 계산을 피할 수 있는  $P$ 의 Cholesky 분리에 상응하는 인수화를 사용하는 것이 실제 계산에서는 유리하다.

$$P = WA \tag{15}$$

여기서  $A$ 는  $N_c \times N_c$ 의 단위 상위 삼각 행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1N_c} \\ & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2N_c} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \alpha_{N_c-1N_c} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

직교 행들을 갖는  $W$ 는  $M \times N_c$  행렬로 다음과 같이 표현되며

$$W = [w_1 \dots w_{N_c}] \tag{17}$$

양의 대각 행렬  $D$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$W^T W = D \tag{18}$$

Gram-Schmidt는 다음과 같이 한번에  $A$ 의 한 행을 계산하고  $P$ 를 직교화한다:  $k$  번째 단계에서 이전에 직교화된  $k-1$  번째 행들의 각각에 직교한  $k$  번째 행을 구성하는 연산을  $k = 2, \dots, N_c$ 에 대해 반복한다. 계산 절차는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{w}_1 &= \mathbf{p}_1 \\
 &\text{for } k=2, \dots, N_C \\
 \alpha_{ik} &= \frac{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{p}_k \rangle}{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}, \quad 1 \leq i \leq k-1 \\
 \mathbf{w}_k &= \mathbf{p}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik} \mathbf{w}_i
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

여기서  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{p} \rangle$ 는 내적으로 다음을 의미한다.

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{p} \rangle = \mathbf{w}_i^T \mathbf{p}_k = \sum_{i=1}^M w_i p_i$$

다음을 정의하자.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g} &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{f} \\
 \Rightarrow g_i &= \frac{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{f} \rangle}{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}, \quad i=1, \dots, N_C \quad (20)
 \end{aligned}$$

그러면 매개변수 추정자는 다음 식으로부터 후진 대입을 사용하여 쉽게 얻을 수 있다.

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{g} \quad (21)$$

#### 4. 운동방정식의 구조 선택 및 계수 식별 결합 문제의 정식화

운동방정식의 구조를 알지 못하면 (8)식에 모든 가능한 항이 포함되도록 전체 집합을 가정하게 된다. 이 때 전체 집합은 과도한 항들을 포함하여 대부분 제거해야 하므로 구조 결정시 최종 모델에 어떤 항을 포함시킬 것인가 하는 것은 중요한 문제가 된다.  $\mathbf{P}$ 가 전체 집합을 나타내면, 구조 선택 및 매개변수 추정 문제는  $\mathbf{P}$ 의 부분집합  $\mathbf{P}_s$ 를 선택하고 매개변수 추정자  $\boldsymbol{\theta}^*_s$ 를 추정하는 것이 된다. 본 연구에서는 3 장의 방법을 확장하여  $\mathbf{P}$  행렬의 부분 집합인  $\mathbf{P}_s$ 를 결정하는 단순하고 효율적인 방법을 유도하겠다.

$\mathbf{P}_s$ 가  $N_{Cs}$  개의 행을 갖는다고 가정하자. (15)식과 같이  $\mathbf{P}_s$ 를  $\mathbf{W}_s$ 가  $N_{Cs}$  개의 직교행으로 이루어

진  $M \times N_{Cs}$  행렬이고  $\mathbf{A}_s$ 가  $N_{Cs} \times N_{Cs}$ 의 단위 상위 삼각 행렬인  $\mathbf{W}_s \mathbf{A}_s$ 로 요소화하자. 나머지는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} &= [\boldsymbol{\xi}(1) \cdots \boldsymbol{\xi}(M)]^T = \mathbf{f} - \mathbf{P}_s \boldsymbol{\theta}^*_s \\
 &= \mathbf{f} - (\mathbf{P}_s \mathbf{A}_s^{-1}) (\mathbf{A}_s \boldsymbol{\theta}^*_s) = \mathbf{f} - \mathbf{W}_s \mathbf{g}_s \quad (22)
 \end{aligned}$$

(22)식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}_s \mathbf{g}_s + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (23)$$

따라서 종속변수  $\mathbf{f}$ 의 제곱의 합은 다음과 같다.

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \sum_{i=1}^{N_{Cs}} g_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (24)$$

$\mathbf{w}_i$ 에 의한 오차 감소비는  $\mathbf{w}_i$ 에 의해 설명되는 종속변수 변화의 비로 정의된다.

$$[\text{err}]_i = \frac{g_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle} \quad (25)$$

(25)식은 3 장의 방법으로  $\mathbf{P}$ 로부터  $\mathbf{P}_s$ 를 계산하는 방법을 제안하고 있다.  $i$  번째 단계에서  $i$  번째 행을  $\mathbf{P}$ 의  $N_C$  개 행으로 교환함으로써  $\mathbf{w}_i$ 로 직교화될 때 가장 큰  $[\text{err}]_i$ 를 주는  $\mathbf{p}_i$ 를 선택할 수 있다. 먼저,  $i=1, \dots, N_C$ 에 대해  $\mathbf{w}_1^{(i)} = \mathbf{p}_i$ 라 놓고 다음을 계산한다.

$$\begin{aligned}
 g_1^{(i)} &= \frac{\langle \mathbf{w}_1^{(i)}, \mathbf{f} \rangle}{\langle \mathbf{w}_1^{(i)}, \mathbf{w}_1^{(i)} \rangle}, \\
 [\text{err}]_1^{(i)} &= \frac{(g_1^{(i)})^2 \langle \mathbf{w}_1^{(i)}, \mathbf{w}_1^{(i)} \rangle}{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle} \quad (26)
 \end{aligned}$$

$[\text{err}]_1^{(j)} = \max\{[\text{err}]_1^{(i)}, 1 \leq i \leq N_C\}$ 라 가정하면,  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1^{(j)} (= \mathbf{p}_j)$ 가  $\mathbf{g}_s$ 의 첫 번째 요소  $g_1 = g_1^{(j)}$ ,  $[\text{err}]_1 = [\text{err}]_1^{(j)}$ 와 함께  $\mathbf{W}_s$ 의 첫 번째 행으로 선택될 수 있다. 다음 단계에서  $i=1, \dots, N_C$  &  $i \neq j$ 에 대해 다음을 계산한다.

$$\begin{aligned} \alpha_{12}^{(i)} &= \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{p}_i \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}, \\ \mathbf{w}_2^{(i)} &= \mathbf{p}_i - \alpha_{12}^{(i)} \mathbf{w}_1, \\ g_2^{(i)} &= \frac{\langle \mathbf{w}_2^{(i)}, \mathbf{f} \rangle}{\langle \mathbf{w}_2^{(i)}, \mathbf{w}_2^{(i)} \rangle}, \\ [\text{err}]_2^{(i)} &= \frac{(g_2^{(i)})^2 \langle \mathbf{w}_2^{(i)}, \mathbf{w}_2^{(i)} \rangle}{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle} \end{aligned} \quad (27)$$

$[\text{err}]_2^{(k)} = \max\{[\text{err}]_2^{(i)}, 1 \leq i \leq N_c, i \neq j\}$ 라 가정하면,  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2^{(k)} (= \mathbf{p}_k - \alpha_{12} \mathbf{w}_1)$ 가  $\mathbf{A}_S$ 의 두 번째 행  $\mathbf{a}_{12} = \alpha_{12}^{(k)}$ ,  $\mathbf{g}_S$ 의 두 번째 요소와  $[\text{err}]_2 = [\text{err}]_2^{(k)}$ 와 함께  $\mathbf{W}_S$ 의 두 번째 행으로 선택될 수 있다. 이와 같은 선택 절차는 원하는 공차  $\rho$ 에 대해 다음을 만족하는  $N_{CS}$  번째까지 계속된다.

$$[\text{err}]_{N_{CS}-1} < \rho \quad (28)$$

또한, 부분집합 모델 매개변수 추정자는  $\mathbf{A}_S \boldsymbol{\theta}_S = \mathbf{g}_S$ 로부터 쉽게 계산될 수 있다.

이 방법에서는 첫 번째 단계에서 벡터  $\mathbf{f}$ 를 기저 벡터  $\{\mathbf{p}_i, i=1, \dots, N_c\}$ 로 투영하고 scalar measure  $[\text{err}]_1^{(i)}$ 를 계산하여 최대 값  $[\text{err}]_1^{(i)} = \max\{[\text{err}]_1^{(i)}, 1 \leq i \leq N_c\}$ 를 결정한다. 이것은 1 차 Euclidean 공간  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}^{(1)}$ 의 기저 벡터로  $\mathbf{w}_1 (= \mathbf{p}_j)$ 을 선택하게 한다. 두 번째 단계에서 나머지 기저 벡터( $\mathbf{p}_i, i = 1, \dots, N_c$  &  $i \neq j$ )를  $\mathbf{E}^{(1)}$ 에 직교한  $N_c-1$  차 Euclidean 공간으로 대체하고, 1 차 Euclidean 공간  $\mathbf{E}^{(2)}$ 를 위한 기저 벡터  $\mathbf{w}_2$ 를 선택한다. 2 차 Euclidean 공간  $\mathbf{E}_2$ 는  $\mathbf{E}^{(1)}$ 과  $\mathbf{E}^{(2)}$ 의 합집합으로 직교 기저 벡터  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ 를 갖는다. 최종적으로  $N_{CS}$  번째 단계가 끝나면 직교 기저 벡터  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N_{CS}}\}$ 를 갖는  $N_{CS}$  차 Euclidean 공간  $\mathbf{E}_{N_{CS}}$ 가 생긴다.

상기의 방법은 전산기 반올림 오차에 민감하지만, 본 연구의 모델 선택법이 좋지 않은 조건의 전체  $\mathbf{P}$ 를 직교화하도록 설계되는 경우는 흔하지 않다. 즉,  $\mathbf{P}_S$ 는 동적계의 중요한 항만을 포함하여

항상 좋은 조건이고 직교성을 잃어버리는  $\mathbf{W}_S$  행들의 문제는 거의 발생하지 않는다. 또한, 이 방법은 전산기 기억 장소에 행렬  $\mathbf{P}$ 를 모두 저장할 필요가 없다.  $\mathbf{P}$ 의 각 행은 입출력 자료의 단항 함수이고 이 알고리즘은 한 번에  $\mathbf{A}$ 의 한 행만을 계산하여  $\mathbf{P}$ 의 행을 직교화하기 때문에 적절한 차원을 갖는  $\mathbf{W}_S$ 만을 기억하면 된다. 따라서 소형 전산기에서 이 기법을 구현하는 것은 간단하다. 그러나 수정된 Gram-Schmidt를 사용하면 전체  $\mathbf{P}$ 를 저장할 필요가 있다.

### 5. 모형 시험으로의 적용

#### 가. 시뮬레이션을 통한 알고리즘의 검증

본 연구 기법의 검증을 위해 다음 식을 사용하여 측정 자료를 생성하였다.

$$f(x) = 5.0 + 0.3x + 0.08x^3 + \varepsilon_M, \quad -5 \leq x \leq 5$$

$\varepsilon_M$ 은 측정 오차로 영의 평균과 5의 분산을 갖는 정규 분포이다. 초기 방정식의 구조는 다음과 같이 가정하였다.

$$F(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^5$$

이 문제를 측정 오차를 포함하는 경우와 포함하지 않는 경우에 대해 공차가  $1 \times 10^{-2}$  이하가 될 때까지 수행한 결과는 Table 1, 2 및 Fig.1, 2와 같다.

Table 1 Estimation Results w/o Error

계수	참값	추정값		V( $\theta$ )		공차
		공차		공차		
		0.01	0.001	0.01	0.001	
$B_0$	5.0	5.0	5.0	$2 \times 10^{-9}$	0	0.569
$B_1$	0.3	0	0.3	0	0	0.002
$B_2$	0	0	0	0	0	-
$B_3$	0.08	0.092	0.08	$6 \times 10^{-9}$	0	0.429
$B_4$	0	0	0	0	0	-

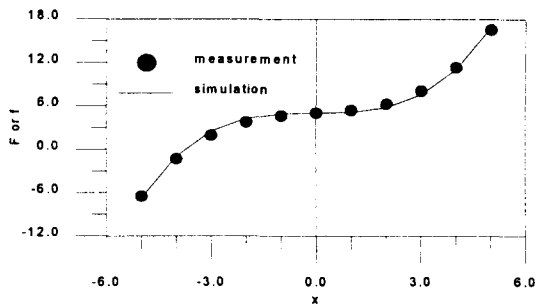


Fig. 1 Estimation results w/o error

Table 2 Estimation results w/ error

계수	참값	추정값	$V(\theta)$	공차
$B_0$	5.0	4.108	$2 \times 10^{-3}$	0.037
$B_1$	0.3	-0.154	$1 \times 10^{-3}$	0.089
$B_2$	0	0	-	-
$B_3$	0.08	0.101	$2 \times 10^{-4}$	0.759
$B_4$	0	0	-	-

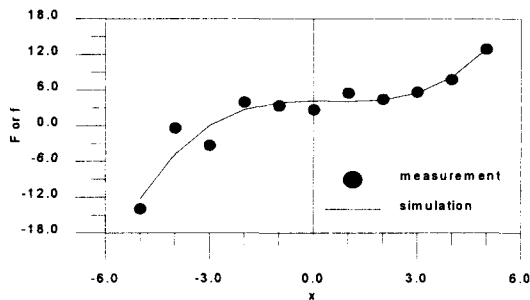


Fig. 2 Estimation results w/ error

오차를 포함하지 않는 경우, 공차를 0.01로 하면  $\eta = 2.582 \times 10^{-4}$ 이고, 공차를 0.001로 하면  $\eta = 0$ 이다. 공차가 0.01이면 선택된 구조는  $B_1$  항을 포함하지 않는데, 이것은 주어진 상태변수 범위 내에서 이 항의 기여도가 충분히 작기 때문이다. 그러나 Fig.1을 살펴보면 근사화 결과가 측정치와 잘 일치하고 있고, 추정 매개변수의 분산도 충분히 작다. 공차가 0.001이면 식별 결과가 운동방정식의 실제 구조 및 매개변수와 잘 일치하고 있다. 공차는 방정식 내에 포함되는 항들의 수를 결정하게 되는 것으로 정확성과 단순성을 고려하여 최적으로 선택되어야 함을 알 수 있다. 오차를 포함한

경우는  $\eta = 8.902 \times 10^{-3}$ 이다. 선택 구조는 실제 구조와 동일하지만,  $B_1$  항의 값이 실제 계수와 많이 차이가 남을 알 수 있다. 그러나, Fig.2를 살펴보면 대체로 근사화 결과가 측정치와 잘 일치하고 있고, 매개 변수의 분산도 만족스러운 결과를 주고 있다. 이상의 결과로 측정 오차와 공차의 선정이 결과에 영향을 줄 수 있지만, 어느 정도 만족스러운 결과들이 제시됨을 알 수 있다. 따라서, 본 연구의 구조 및 계수 식별 알고리즘은 모형 시험 결과 해석에 매우 유용하게 사용될 수 있다.

나. 모형 시험 결과로의 적용

먼저 예인 수조에서 2.5 m/sec로 물수체를 예인하며 수행한 수직 방향 정적 영각 시험 결과를 해석해 보자. 영각의 범위는  $-9 \text{도} \leq \beta \leq 12 \text{도}$ 이고, 초기 운동 방정식의 구조는 다음과 같이 가정하였다.

$$F(\beta) = B_0 + B_1\beta + B_2\beta^2 + B_3\beta^3 + B_4\beta^4 + B_5\beta^5$$

공차  $5 \times 10^{-3}$ 를 사용하여 이 문제를 해석한 결과는 Table 3, 4 및 Fig.3, 4, 5와 같다.

Table 3 Estimation results

계수	추정값		
	전후 동요	상하 동요	종 동요
$B_0$	0.000212	0.000457	-0.000158
$B_1$	-0.000776	-0.030236	0.006734
$B_2$	-	-	-
$B_3$	0.023440	-0.1672985	-0.004762
$B_4$	0.006558	-	-
$B_5$	-	-	-

Table 4 Covariance of the estimated parameters

계수	분산값		
	전후 동요	상하 동요	종 동요
$B_0$	$7.05 \times 10^{-9}$	$1.79 \times 10^{-9}$	$1.08 \times 10^{-9}$
$B_1$	$2.95 \times 10^{-2}$	$5.42 \times 10^{-3}$	$3.26 \times 10^{-3}$
$B_3$	99.31	6.52	3.92
$B_4$	1173.18	-	-

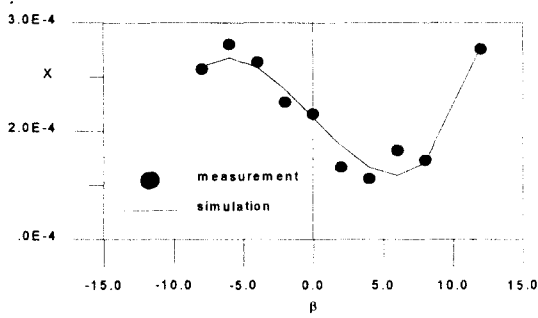


Fig. 3 Forces of surge mode

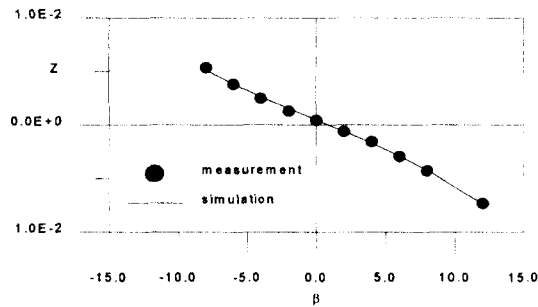


Fig. 4 Forces of heave mode

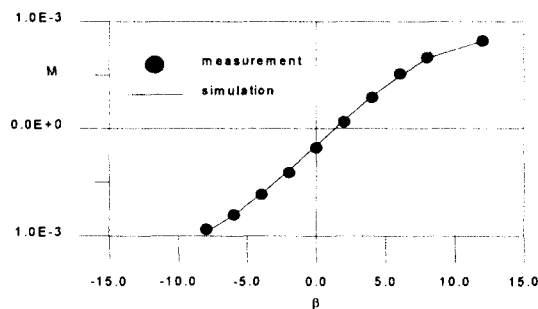


Fig. 5 Moments of pitch mode

$\eta$ 는 전후 동요, 상하 동요, 종 동요에 대해 각각  $4.624 \times 10^{-4}$ ,  $1.622 \times 10^{-4}$ ,  $9.743 \times 10^{-5}$ 이므로, 식별이 잘된 순서는 종 동요, 상하 동요, 전후 동요이다. Fig.3과 Table 3, 4를 살펴보면, 전후 동요에 대한 구조 및 계수 식별 결과에 물리적인 문제가 있음을 알 수 있다. 상하 대칭 형상인 물수체에 대해 전후 동요 힘은 영각에 대해 우함수가 될 것으로 예상되나 그렇지 못한데, 이것은 실험 결과

가 비대칭이기 때문이다. 또한,  $B_3$ 나  $B_4$  항에 대한 분산이 상당히 크네, 이것은 다시 시험을 수행하면 상당히 다른 값의  $B_3$ 나  $B_4$ 가 얻어질 확률이 큼을 의미한다. 기타 상하 동요나 종 동요에 대한 결과는 상당히 만족스러운 결과를 주고 있다. 단, 실험 결과에 편향된 값이 있어  $B_0$  항들이 계속 존재하고 있다.

마지막으로 전가동타의 물수체에 대한 강제 선회 시험(Rotating Arm Test)에 의한 수평 동요 힘을 본 연구의 방법으로 해석한 결과를 살펴보자.

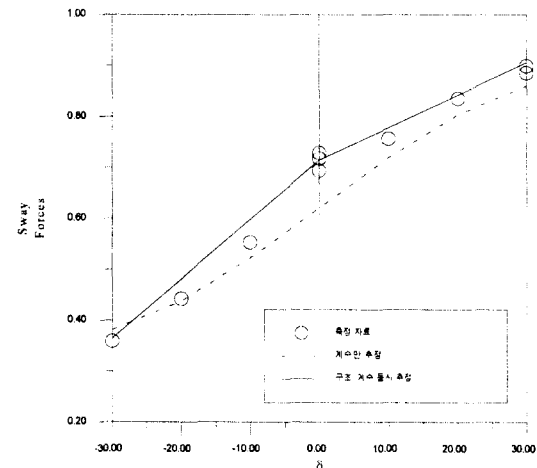


Fig. 6 Forces of sway mode of rotating arm test

일반적인 물수체에 대한 기존의 운동방정식 구조는 다음과 같다.

$$Y = Y_v v + Y_r r + Y_\delta \delta + Y_{vvv} v^3 + Y_{vvr} v^2 r + Y_{vrr} v r^2 + Y_{rrr} r^3 + Y_{\delta\delta\delta} \delta^3$$

본 기법으로 추정된 운동방정식 구조는 다음과 같다.

$$Y = Y_v v + Y_r r + Y_\delta \delta + Y_{v|v|} |v||v| + Y_{v|r|} |v||r| + Y_{rr} r^3 + Y_{v|\delta} |v|\delta$$

Fig.6을 살펴보면 측정자료에는 제어판각과 상태가 연성된 효과가 y 축에 대한 비대칭성으로 나타



나고 있다. 기존의 운동방정식이 본 기법에 의한 방정식 보다 더 많은 항을 가지고 있음에도 불구하고 이와 같은 비대칭성을 잘 표현하지 못하고 있다. 즉, 본 연구의 기법이 보다 효과적이고 단순한 방정식 구조를 제공함을 알 수 있다[5].

## 6. 결론

모형 시험 결과에 대한 근사화를 최소 자승 문제로 정식화하고, Gram-Schmidt의 직교화를 사용하여 운동 방정식의 구조를 선택하고 계수를 식별하는 방법을 살펴보았다. 그리고, 이를 시뮬레이션과 물수체의 모형 시험 결과에 적용하여 그 성능을 검증하였다. 검증 결과를 살펴보면 비록 측정 오차나 공차의 선정에 영향을 받지만, 빠른 계산 시간을 갖는 단순한 방법으로 구조 선택 및 계수 식별을 동시에 수행하여 만족스러운 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 이 구조-계수 결합 식별법은 새로운 물수체 체계 개발 시 고유의 비선형 운동 방정식을 정립할 수 있는 기초를 제공한다. 또한, 측정 오차를 포함하지 않는 시뮬레이션 결과에서 알 수 있듯이 모형 시험은 체계가 실제로 운용되는 상태 변수 및 입력 변수 범위 내에서 적절히 수행되어야 함을 알 수 있다. 이것은 설계된 입력이 식별 문제의 가식별성을 보장할 수 있는가에 관련된 문제이다.

## 참 고 문 헌

- [1] 박성희, 김찬기, "수중 유도 무기 형상에 대한 회전팔 시험", 국방과학연구소 기술보고서 NSRD-413-91547, 1991
- [2] S. Chen, S. A. Billings & W. Luo, "Orthogonal Least Square Methods and Their Application to Non-linear System Identification", INT. J. CONTROL, VOL. 50, NO. 5, 1989
- [3] S. T. Glad & L. Ljung, "Model Structure Identifiability and Persistence of Excitation", In Proc. 29th IEEE Conf. Decision and Control, 1990
- [4] M. William, R. L. Scheaffer & D. D. Wackerly, Mathematical Statics with Application, Duxbury Press, 1981
- [5] 김찬기, 박정기, "강제 선화 시험 결과를 이용한 청상어의 운동방정식 구조 선택 및 조종계수 추정", 국방과학연구소 기술보고서 NSW-519-971358C, 1997