

한 변조 직교수열에 알맞은 부호만들기

正會員 박 성 일*, 박 정 순*, 김 홍 길*, 박 소 령*, 송 익 호*

Generation of Codes for a Modulated Orthogonal Sequence

Seong Ill Park*, Jeongsoon Park*, Hong Gil Kim*, So Ryoung Park*,
Ickho Song* *Regular Members*

요 약

이 논문에서는 직교수열의 하나인 수에히로 수열을 만드는 방법을 하나 제안한다. 이 방법에서는 정수합과 나머지방법만으로 부호수열을 만든다. 이 방법으로 만든 수열의 자기상관과 교차상관 특성을 살펴본다. 제안한 방법으로 만든 수열은 직교성을 가지며 교차상관의 수학적 하한을 만족시킨다.

ABSTRACT

In this paper, a code sequence generation method of the Suehiro sequence is suggested. In this method, a code sequence is generated only with integer sums and modular techniques. The auto-correlation and cross-correlation characteristics of the sequence generated by the method are investigated. The sequence generated by the suggested method has the orthogonality and satisfies the mathematical lower bound of the cross-correlation.

I. 머리말

부호분할 다중접속 시스템에는 몇몇 부호수열이 쓰인다: 보기로 m -수열과 [1] 골드수열이 있다[2]. 그러나, 이 수열들은 상호채널간섭을 일으키며, 그 값은 $1/\sqrt{K}$ 를 넘는다. 여기서, K 는 부호분할 다중접속시스템의 확산율이다. 이와 같은 시스템에서 상호채널간섭은 시스템의 성능을 얼마쯤 떨어뜨린다.

부호분할 다중접속 시스템에 알맞고 몇가지 좋은

성질을 가진 직교수열 하나가 [3]에서 제안되었다. 주기가 K 일 때 그 수열의 자기상관함수는 K 째 항을 빼고 0이고, 교차상관함수의 절대값은 $1/K$ 이다. 이 교차상관함수 절대값 $1/K$ 은 직교수열이 가질 수 있는 수학적으로 가장 작은 값이다. 그러나, 이 부호수열은 이산푸리에변환으로 만들기 때문에 만들기가 매우 복잡하다.

이 논문에서는 위상변조 정보심볼을 쓸 때 [3]에서 제안한 수열을 쉽게 만드는 방법을 생각한다. 먼저, 2절에서 정수합과 나머지방법만으로 그 수열을 만드는 법을 설명하고, 여러 쓰여가 있을 때, 두 보기를 2.2에 보인다. 제안한 방법으로 만든 부호수열의 특성

*한국과학기술원 전기 및 전자공학과
論文番號: 97108-0324
接受日字: 1997年 3月 24日

을 3절에서 살펴 보고, 제안한 부호수열의 자기상관과 교차상관 특성을 살펴본다.

II. 부호수열 만들기

2.1 만드는 방법

정보심볼을 $b_i, i=0, 1, 2, \dots, N-1$ 이라 하고, 정보심볼의 길이를 N 이라 하며, 부호심볼을 $s_l, l=0, 1, 2, \dots, N^2-1$ 이라 하자. 그리고, $|s_l|^2=1$ 이라 하자. M 진 위상변조 신호 별자리를 생각하고, 정보심볼값 집합

$$I = \{c_p | c_p = W_M^p, p=0, 1, 2, \dots, M-1\}, \quad (1)$$

이산푸리에변환 심볼값 집합

$$F = \{w_q | w_q = W_N^q; q=0, 1, 2, \dots, N-1\}, \quad (2)$$

그리고 부호심볼값 집합

$$C = \{d_k | d_k = W_L^k; k=0, 1, 2, \dots, L-1\} \quad (3)$$

을 생각하자. 여기서, L 은 M 과 N 의 최소공배수이고

$$W_M = \exp\left\{\frac{2\pi j}{M}\right\} \quad (4)$$

이며, $j = \sqrt{-1}$ 이다. 곧, b_i 의 값은 I 의 원소이며, s_l 의 값은 C 의 원소이다.

다음과 같이 부호심볼을 만들자.

$$s_l = b_{P(l)} W_{R(mQ(l)P(l), N)}. \quad (5)$$

여기서, $R(\alpha, \beta)$ 는 α 를 β 로 나누었을 때의 나머지고, $P(l) = R(l, N)$ 이며, $Q(l)$ 은 l 을 N 으로 나누었을 때의 몫이며, m 은 사용자를 나타내는 지수이다(곧, 사용자마다 다른 수를 준다). 그러면, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} s_l &= C_{J(P(l), b)} W_N^{R(mQ(l)P(l), N)} \\ &= W_M^{J(P(l), b)} W_N^{R(mQ(l)P(l), N)} \\ &= W_L^{R(J(P(l), b) \frac{L}{M} + R(mQ(l)P(l), N) \frac{L}{N}, L)} \\ &= d_{R(J(P(l), b) \frac{L}{M} + R(mQ(l)P(l), N) \frac{L}{N}, L)} \\ &= d_{V(l)}. \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $J(i, b)$ 는 b_i 값의 I 에서의 지수이며 (곧, $b_i = c_k$ 이면 $J(i, b) = k, k=0, 1, \dots, M-1$ 이다),

$$V(l) = R\left(J(P(l), b) \frac{L}{M} + R(mQ(l)P(l), N) \frac{L}{N}, L\right) \quad (7)$$

식 (6)과 (7)은 부호수열 (5)를 심볼 지수만 계산해서 얻을 수 있다는 것을 보여준다.

2.2 보기

전송을 시작하기에 앞서서, 정보심볼을 뺀 모든 매개변수를 정할 수 있다. 그러므로, 정보가 정해지면, 더하기만으로 부호수열을 만들 수 있다. 보기로, 4진 위상변조 정보심볼을 쓰고, 한 부호수열로 세 심볼을 보내며, 쓰는데가 둘일 때를 생각해 보자. 그림 1-3은 집합 I, F, C 의 원소를 보여준다. 표 1과 2는 정보심볼이 $\{W_4^0, W_4^1, W_4^2\}$ 일 때, 부호수열 만들기를 보여 준다. 특히, 첫째 쓰는데의 부호수열 $\{s_l\}$ 은

$$\{W_{12}^{P(l)}\}_{l=0}^8 = \{W_{12}^0, W_{12}^3, W_{12}^3, W_{12}^0, W_{12}^7, W_{12}^{11}, W_{12}^0, W_{12}^{11}, W_{12}^7\},$$

이고, 둘째 쓰는데의 부호수열은

$$\{W_{12}^{Q(l)}\}_{l=0}^8 = \{W_{12}^0, W_{12}^3, W_{12}^3, W_{12}^0, W_{12}^{11}, W_{12}^{11}, W_{12}^0, W_{12}^7, W_{12}^{11}\},$$

이다.

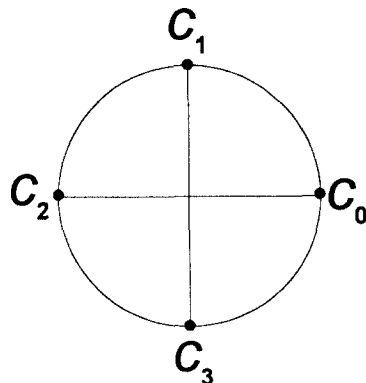


그림 1. $M=4$ 일 때 I 의 원소

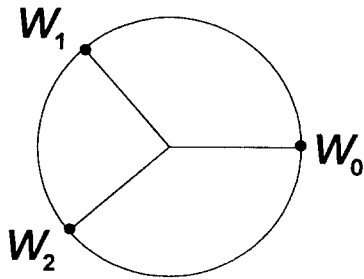


그림 2. $M=4$ 일 때 F 의 원소

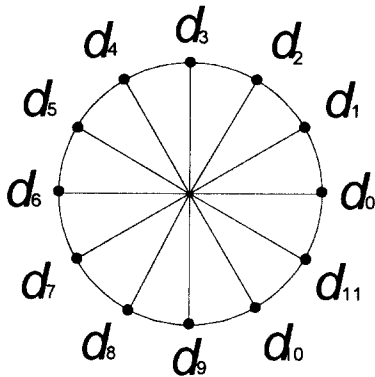


그림 3. $M=4$ 일 때 C 의 원소

표 1. $m=1, M=4, N=3, L=12$ 일 때 부호 지수 만들기. 정보심볼은 $\{W_0^1, W_1^1, W_2^1\}$ 이다.

$m=1, M=4, N=3, L=12$					
l	$Q(l)$	$P(l)$	$J(P(l), b)$	$R(mQ(l) P(l), N)$	$V(l)$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	3
2	0	2	1	0	3
3	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	7
5	1	2	1	2	11
6	2	0	0	0	0
7	2	1	1	2	11
8	2	2	1	1	7

표 2. $m=2, M=4, N=3, L=12$ 일 때 부호 지수 만들기. 정보심볼은 $\{W_0^2, W_1^2, W_2^2\}$ 이다.

$m=2, M=4, N=3, L=12$					
l	$Q(l)$	$P(l)$	$J(P(l), b)$	$R(mQ(l) P(l), N)$	$V(l)$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	3
2	0	2	1	0	3
3	1	0	0	0	0
4	1	1	1	2	11
5	1	2	1	1	7
6	2	0	0	0	0
7	2	1	1	1	7
8	2	2	1	2	11

III. 부호수열의 특성

푸리에변환 곱셈을 써서 [3], 제안한 방법으로 만든 부호수열의 자기상관과 교차상관을 살펴본다.

정의 1. $N \times N$ 이산푸리에변환 행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} [W_N^{-ij}]. \quad (8)$$

여기서, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ 이다.

정의 2. 수열 $\{x_l\}$, $l=0, 1, \dots, H$ 의 대각 행렬 $D(\{x_l\})$ 은 다음과 같이 정의한다.

$$D(\{x_l\}) = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_H \end{bmatrix}. \quad (9)$$

정의 3. 크기가 같은 두 행렬 $A=[a_{ij}]$ 와 $B=[b_{ij}]$ 의 원소곱은 다음과 같이 정의한다.

$$A * B = [a_{ij} b_{ij}]. \quad (10)$$

3.1 자기상관

먼저, [3]의 방법을 쓰면, 이 부호수열의 자기상관 AR은 다음과 같다.

$$AR = F_{N^2}^{-1} \{G(F_{N^2}S) * G(\overline{F_{N^2}S})\}, \quad (11)$$

여기서, \overline{A} 는 A 의 켈레복소수이고, $G(A)$ 는 A 의 대각선 원소로 만든 열벡터이다.

이제, 다음과 같이 됨을 쉽게 알 수 있다.

$$F_{N^2}S = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W_{N^2}^0 & W_{N^2}^0 & W_{N^2}^0 & \dots & W_{N^2}^0 \\ W_{N^2}^0 & W_{N^2}^{-1} & W_{N^2}^{-2} & \dots & W_{N^2}^{-(N^2-1)} \\ W_{N^2}^0 & W_{N^2}^{-2} & W_{N^2}^{-4} & \dots & W_{N^2}^{-(N^2-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N^2}^0 & W_{N^2}^{-(N^2-1)} & W_{N^2}^{-2(N^2-1)} & \dots & W_{N^2}^{-(N^2-1)(N^2-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{N^2-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

그리고

$$G(F_{N^2}S) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W_{N^2}^0 s_0 \\ W_{N^2}^{-1} s_1 \\ W_{N^2}^{-4} s_2 \\ \vdots \\ W_{N^2}^{-(N^2-1)(N^2-1)} s_{N^2-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{N} [W_{N^2}^{-l} s_l]$$

이다. 그러면

$$G(F_{N^2}S) * G(\overline{F_{N^2}S}) = \frac{1}{N^2} [W_{N^2}^{-l} s_l W_{N^2}^l \overline{s_l}] \quad (14)$$

$$= \frac{1}{N^2} [|s_l|^2]$$

이다. 식 (11)과 (14)를 써서, 자기상관은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$F_{N^2}^{-1} \{G(F_{N^2}S) * G(\overline{F_{N^2}S})\} = \frac{1}{N^2} \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^{N^2-1} W_{N^2}^0 |s_l|^2 \\ \sum_{l=0}^{N^2-1} W_{N^2}^l |s_l|^2 \\ \sum_{l=0}^{N^2-1} W_{N^2}^{2l} |s_l|^2 \\ \vdots \\ \sum_{l=0}^{N^2-1} W_{N^2}^{(N^2-1)l} |s_l|^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

왜냐하면, $\sum_{l=0}^{N^2-1} W_{N^2}^l = N^2 \delta(k)$ 이기 때문이다.

식 (15)는 제안한 방법으로 만든 부호수열이 [3]에서 정의한 부호수열과 같은 자기상관과 직교성을 가짐을 뜻한다.

3.2 교차상관

이 절에서는 부호수열의 교차상관특성을 살펴 본다. $\{x_l\}$ 과 $\{y_l\}$ 을 두 쓰는이의 부호수열이라 하자. 그러면 교차상관 CR은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$CR = F_{N^2}^{-1} \{G(F_{N^2}A) * G(\overline{F_{N^2}B})\}. \quad (16)$$

여기서, $A = D(\{x_l\})$ 이고 $B = D(\{y_l\})$ 이다. 식 (12)-(15)에서와 비슷한 과정을 거치면 (16)에서 다음을 얻는다.

$$CR = \frac{1}{N^2} F_{N^2}^{-1} [W_{N^2}^{-l} x_l W_{N^2}^l \overline{y_l}] \quad (17)$$

$$= \frac{1}{N^2} F_{N^2}^{-1} [x_l \overline{y_l}]$$

$$= \frac{1}{N^2} \left[\sum_{l=0}^{N^2-1} W_{N^2}^{kl} x_l \overline{y_l} \right].$$

이 열벡터의 k 째 원소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^3} \sum_{l=0}^{N^2-1} W_N^{kl} x_l \bar{y}_l \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{l=0}^{N^2-1} W_N^{k(NQ(l)+P(l))} C_{J(P(l), x)} \overline{C_{J(P(l), y)}} W_N^{(m_x-m_y)Q(l)+P(l)} \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{P(l)=0}^{N-1} C_{J(P(l), x)} \overline{C_{J(P(l), y)}} W_N^{kP(l)} \\ & \quad \sum_{Q(l)=0}^{N-1} W_N^{Q(l)(k+P(l)(m_x-m_y))}. \end{aligned} \tag{18}$$

여기서, m_x 와 m_y 의 첨자 x 와 y 는 각각 첫째와 둘째 쓰는이를 나타내는 것이다. 식 (18)에서

$$\sum_{Q(l)=0}^{N-1} W_N^{Q(l)(k+P(l)(m_x-m_y))} = \begin{cases} N, & R(k+P(l)(m_x-m_y), N)=0 \text{이면,} \\ 0, & \text{그 밖.} \end{cases} \tag{19}$$

식 (17)과 (19)를 써서 다음을 얻는다.

$$CR = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{P(l)=0}^{N-1} C_{J(P(l), x)} \overline{C_{J(P(l), y)}} W_N^{kP(l)} \delta(R(k+P(l)(m_x-m_y), N)) \right]. \tag{20}$$

이제, $R(k+P(l)(m_x-m_y), N)=0$ 을 만족시키는 $P(l)$ 을 \emptyset 로 나타내면 k 째 원소의 제곱 절대값은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^4} C_{J(\emptyset, x)} \overline{C_{J(\emptyset, y)}} W_N^{k\emptyset} \overline{C_{J(\emptyset, x)}} C_{J(\emptyset, y)} W_N^{-k\emptyset} \\ &= \frac{1}{N^4} |C_{J(\emptyset, x)}|^2 |C_{J(\emptyset, y)}|^2 \end{aligned} \tag{21}$$

이 된다.

집합 I 의 원소는 크기가 늘 1이기 때문에, 식 (20)과 (21)에서 쓰는이 지수가 다른 두 수열의 교차상관의 절대값은 일정한 값 $1/N^2=1/K$ 이 됨을 볼 수 있다.

IV. 맺음말

이 논문에서는 수에히로가 제안한 직교수열을 쉽게 만드는 방법을 제안했다. 이 방법은 정수합과 나머지 방법으로 이루어 진다. 제안한 방법으로 만든 수열은 정보심볼로 변조된 뒤 직교성을 갖는다. 이 수열의

교차상관은 수학적 성질을 만족시키는 일정한 절대 값을 갖는다.

참 고 문 헌

1. S. W. Golomb, "Shift-Register Sequences," San Francisco, CA: Holden-Day, 1967.
2. D. V. Sarwate and W. B. Pursley, "Cross-correlation properties of pseudo-random and related sequences," *Proc. IEEE*, vol. 68, pp. 593-619, May 1980.
3. N. Suehiro and M. Hatori, "Modulatable orthogonal sequences and their application to SSMA systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-34, pp. 93-100, January 1988.

박 성 일(Seong Ill Park)

정회원

1968년 5월 19일생

1986년 3월~1990년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학사

1991년 3월~1993년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사

1993년 3월~현재: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정

※주관심분야: 이동통신, 레이다 신호처리

박 정 순(Jeongsoon Park)

정회원

1970년 11월 17일생

1992년 3월~1996년 2월: 연세대학교 전파공학과 공학사

1996년 3월~현재: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정

※주관심분야: 이동통신, 통계학적 신호처리

김 흥 길(Hong Gil Kim)

정회원

1972년 7월 20일생

1991년 3월~1995년 2월: 한양대학교 전자통신공학과 공학사

1995년 3월~1997년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사

1997년 3월~현재: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정

※주관심분야: 이동통신, 검파이론

