⊠연구논문

와이블과정을 응용한 신뢰성 성장 모형에서의 MTBF 추정+

이현우 · 김재주 · 박성현
서울대학교 통계학과

MTBF Estimator in Reliability Growth Model with Application to Weibull Process

Hyunwoo Lee · Jae Joo Kim · S. H. Park
Dept. of Statistics, Seoul National University

Abstract

In reliability analysis, the time difference between the expected next failure time and the current failure time or the Mean Time Between Failure(MTBF) is of significant interest. Until recently, in reliability growth studies, the reciprocal of the intensity function at current failure time has been used as being equal to $MTBF(t_n)$ at the n-th failure time t_n. That is $MTBF(t_n)=1/\lambda(t_n)$. However, such a relationship is only true for Homogeneous Poisson Process(HPP).

Tsokos(1995) obtained the upper bound and lower bound for the $MTBF(t_n)$ and proposed an estimator for the $MTBF(t_n)$ as the mean of the two bounds. In this paper, we provide the estimator for the $MTBF(t_n)$ which does not depend on the value of the shape parameter. The result of the Monte Carlo simulation shows that the proposed estimator has better efficiency than Tsokos's estimator.

+ 이 논문은 1997년도 교육부 기초과학연구비 연구과제 BSRI-97-1415에 의해 지원 받았음.

1. 서론

이제까지 대부분의 신뢰성 연구는 전구, 컴퓨터 칩이나 팬 벨트와 같이 한번 고장이 나면 다시 사용할 수 없는 비수리계 시스템(Nonrepairable System)에서 시스템 고장 시간을 와이블 분포나 대수정규 분포 등을 가정한 제품의 수명에 대한 내용들이었다. 그러나, 제품이 고장이 나면 수리를 해서 사용할 수 있는 수리계 시스템(Repairable System)에서의 신뢰성에 대한 연구 역시 중요한 문제이다.

수리계 시스템의 모형은 크게 두 가지 형태로 구분이 되어지는데, 만약 시스템이 고장이 일어난 후 완전히 처음의 조건과 같은 상태로 수리가 가능해 진다면 고장시간 간격은 서로 독립이고 동일한 분포를 따른다고 할 수 있다. 이러한 경우가 동질적 포아송과정(Homogeneous Poisson Process)의 한 분야이다.

반면에, 시간이 지남에 따라 신뢰도가 변하는 형태가 있을 수 있는데 이는 수리 계에서 주로 다루어지는 내용이다. 제품의 개발과정이나 검사단계에서의 예를 들어보자. 시스템이 고장이 나면 고장이 난 원인을 찾아 필요할 경우 새로운 디자인을 개발하거나 새로운 기술을 도입하게된다. 이러한 과정을 목표로 하는 신뢰도를 갖게될때까지 반복하게 된다. 따라서, 시간이 지남에 따라 신뢰도의 증가가 기대되어 진다. 이런 모형을 신뢰도 성장모형(Reliability Growth Model)이라고 한다. 이와는 반대로 소비자가 제품을 구입해서 사용하다가 고장이 나면 가장 기본적인 수리만으로 다시 사용하게 되어지는데 이러한 시스템은 시간이 지남에 따라 신뢰도는 감소되어질 것이다. 우리는 이런 모형을 시스템이 퇴화(Deteriorating System)되었다고 한다.

비동질적 포아송과정(Non-Homogeneous Poisson Process)에서는 이러한 두 가지 모형을 생각할 수 있다. 즉, 강도함수가 시간이 흐름에 따라 변하는 모형으로서, 강도함수가 감소함수이면 신뢰도는 증가하는 것으로 신뢰성 성장모형이고, 반대로 증가함수이면 신뢰도가 감소되어 퇴화모형이 되어진다.

이런 모형에서 가장 많이 연구되어지는 것은 비동질적 포아송과정의 특수한 형태인 와이블과정(Weibull Process)이다. 이 모형은 첫 번째 고장이 일어날 때까지의 수명분포의 고장률함수(Failure Rate Function)가 와이블분포의 고장률함수와 동일한 형태가 되어지므로 와이블과정이라고 일컬어지며, 강도함수가

$$\lambda(t) = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \tag{1.1}$$

로서 $\theta > 0$와 $\beta > 0$는 각각 척도모수와 형상모수이다.

$T_1 < \cdots < T_n$을 식 (1.1)의 강도함수를 갖는 와이블과정에서 얻어지는 고장시간의 데이터라고 하자. 그러면 우도비함수가 다음과 같이 주어져서

$$L(\beta, \theta; t_1, \cdots, t_n) = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta}\right\}$$

각 모수에 대한 최우추정량은 다음과 같이 계산되어진다. 즉,

$$\widehat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} \log(T_n/T_i)} \quad 와 \quad \widehat{\theta} = \frac{T_n}{n^{1/\widehat{\beta}}}.$$

또한, n번째 고장시각에서의 강도함수에 대한 최우추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\lambda_n} \equiv \widehat{\lambda(T_n)} = \frac{n\widehat{\beta}}{T_n}.$$

신뢰성 성장모형에서는 시스템이 고장이 난후 그 다음 고장이 일어날 때까지의 걸리는 시간에 대한 측도가 중요한 관심사다. 즉, n번째 고장이 일어난 시각 t_n에서의 평균고장시간간격 인 $MTBF(t_n)$에 대한 관심이 커진다.

최근까지 신뢰성 성장모형의 연구에서는 $MTBF(t_n)$의 값을 강도함수의 역수인 $1/\lambda(t_n)$ 로 계산 하고자 하였는데 이는 동질적 포아송과정에서만 성립하는 것이다.

이와 같은 모형은 Duane(1964)이후에 Crow(1974, 1982), Bain과 Engelhardt(1986)와 Engelhardt 과 Bain(1986)등의 많은 연구논문들이 있다.

최근에 Tsokos(1995)는 신뢰성 성장모형($\beta<1$)인 경우에 $MTBF(t_n)$와 강도함수의 관계를 기존의 연구들보다 좀더 수리적으로 밝히고, 이를 이용하여 $MTBF(t_n)$의 상한값과 하한값을 구하고 그들의 평균을 이용해서 $MTBF(t_n)$를 추정하였다. 그러나, Tsokos의 추정량은 형상모수인 β의 값에 따라 그 형태가 달라진다는 단점이 있다. 이에 본 논문에서는 신뢰성 성장모형인 경우에 이러한 단점을 보완하고 좀더 정확한 추정량을 구하고자 한다.

2. MTBF의 추정

이 절에서는 정수중도절단인 경우에 있어서 $MTBF$와 강도함수의 역수와의 관계를 살펴보고 그 관계를 이용하여 $MTBF$의 추정량을 제안 하고자 한다.
n번째 고장이 일어난 시각 T_n의 주변 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(t_n) &= \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} L(\beta, \theta; t_1, \cdots, t_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} \\ &= \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta-1} dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} \left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t_n}{\theta}\right) \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta}\right\} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{n\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta}\right\}. \end{aligned}$$

그리고, $T_n = t_n$에서의 $MTBF$값은

$$\begin{aligned} MTBF(t_n) &= E[T_{n+1} - T_n | T_n = t_n] \\ &= \int_{t_n}^{\infty} t f_{n+1}(t|t_1, \cdots, t_n) dt - t_n \\ &= \int_{t_n}^{\infty} t \left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta} + \left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta}\right\} dt - t_n \\ &= \frac{\theta}{\beta} e^h \int_h^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{\beta}-1} dt \end{aligned}$$

이고, $T_n = t_n$에서의 강도함수의 값은

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(t_n)} &= \frac{\theta}{\beta}\left(\frac{\theta}{t_n}\right)^{\beta-1} \\ &= \frac{\theta}{\beta} e^h \left(\frac{\theta}{t_n}\right)^{\beta-1} \int_h^{\infty} e^{-t} dt \end{aligned}$$

이다. 여기에서 $h = (t_n/\theta)^{\beta}$이다. 그래서, $MTBF(t_n)$와 $1/\lambda(t_n)$와의 관계는 다음과 같이 계산된다.

Case 1) $\beta = 1$ 인 경우,

$$MTBF(t_n) = \int_{t_n}^{\infty} \frac{t}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta} + \frac{t_n}{\theta}} dt - t_n = \theta$$

이므로

$$MTBF(t_n) = \frac{1}{\lambda(t_n)} = \theta. \tag{2.1}$$

Case 2 : $\beta > 1$인 경우, $1/\beta - 1 < 0$ 이고

$$\begin{aligned} \int_h^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{\beta}-1} dt &< \int_h^{\infty} e^{-t} \left\{\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta}\right\}^{\frac{1}{\beta}-1} dt \\ &= \left(\frac{\theta}{t_n}\right)^{\beta-1} \int_h^{\infty} e^{-t} dt \end{aligned}$$

이므로

$$MTBF(t_n) < \frac{1}{\lambda(t_n)} \tag{2.2}$$

이다.

Case 3 : $\beta < 1$ 인 경우, $1/\beta - 1 > 0$ 이고

$$\int_h^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{\beta}-1} dt > \left(\frac{\theta}{t_n}\right)^{\beta-1} \int_h^\infty e^{-t} dt$$

이므로

$$MTBF(t_n) > \frac{1}{\lambda(t_n)} \tag{2.3}$$

이다.

그래서, 식(2.1) ~(2.3)을 이용해서 $MTBF(t_n)$와 $1/\lambda(t_n)$의 관계를 종합해보면 다음과 같다.

$$MTBF(t_n) \begin{cases} = \dfrac{1}{\lambda(t_n)} & \beta = 1 \text{ 인 경우} \\ > \dfrac{1}{\lambda(t_n)} & \beta < 1 \text{ 인 경우} \\ < \dfrac{1}{\lambda(t_n)} & \beta > 1 \text{ 인 경우}. \end{cases}$$

Tsokos(1995)는 이와 같은 관계를 이용하여 $MTBF(t_n)$의 상한치와 하한치를 계산하였다.

정리 1. (Tsokos, 1995) 강도함수가 다음과 같은 형태를 갖는 비동질적 포아송과정인 경우에 대하여

$$\lambda(t_n) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta-1}, \quad t_n > 0 \ ,$$

1) $0 < \beta \le 1/2$ 인 경우에

$$\frac{1}{\lambda(t_n)}\left(1 + \frac{\alpha-1}{h}\right) \le MTBF(t_n) \le \frac{1}{\lambda(t_n)}\left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha-1}{h}}\right), \tag{2.4}$$

2) $1/2 < \beta \leq 1$인 경우에

$$\frac{1}{\lambda(t_n)} \leq MTBF(t_n) \leq \frac{1}{\lambda(t_n)}\left(1+\frac{\alpha-1}{h}\right) \tag{2.5}$$

의 관계가 성립한다. 여기에서 $\alpha = 1/\beta$, $h=(t_n/\theta)^{\beta}$이다.

각 모수의 최우추정치를 이용하여 Tsokos(1995)는 $MTBF(t_n)$의 추정치를 다음과 같이 계산하였다.

$$\widehat{MTBF(t_n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\widehat{\lambda(t_n)}}\left[\left(1+\dfrac{\hat{\alpha}-1}{\hat{h}}\right)+\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\hat{\alpha}-1}{\hat{h}}}\right)\right] & \text{if } 0<\beta\leq\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2\,\widehat{\lambda(t_n)}}\left[2+\dfrac{\hat{\alpha}-1}{\hat{h}}\right] & \text{if } \dfrac{1}{2}<\beta<1. \end{cases}$$

그러나, Tsokos가 제안한 이 추정량은 얻어진 자료를 이용해서 β의 최우추정치를 계산하고, 그 값에 따라 두 가지 형태중 하나를 선택해서 추정하기 때문에 β가 잘못 추정될 경우 오차가 더욱 커지는 단점이 있다. 또한, 식 (2.4)의 상한치에서 $\alpha-1>h$이면 $MTBF(t_n)$의 상한치가 음수의 값을 갖게되어 상한치로서의 의미가 없어지므로 이를 이용하여 얻어진 추정량 역시 그 의미가 없어진다. 그래서, 본 논문에서는 이러한 단점을 보완한 새로운 추정량을 제안하고자 한다.

$MTBF(t_n)$을 좀더 정확하게 계산하면

$0 < \beta < 1/2$인 경우,

$$\begin{aligned} MTBF(t_n) &= \frac{1}{\lambda(t_n)}\left[1+\frac{(\alpha-1)}{h}+\cdots+\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{h^{m-1}}\right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)}{h^m}+\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-m-1)}{h^m}e^h h^{-\delta}\int_h^{\infty} t^{\alpha-m-2}e^{-t}dt\right] \\ &= \frac{1}{\lambda(t_n)}\left[1+\frac{\alpha-1}{h}+A\right], \quad A \geq 0, \ \delta=\alpha-m-1 \end{aligned}$$

이고 $1/2 < \beta < 1$인 경우,

$$\frac{1}{\lambda(t_n)} \leq MTBF(t_n) \leq \frac{1}{\lambda(t_n)}\left[1+\frac{\alpha-1}{h}\right],$$

$$MTBF(t_n)=\frac{1}{\lambda(t_n)}\left[1+\frac{\alpha-1}{h}-B\right], \quad 0\leq B\leq \frac{\alpha-1}{h}$$

와 같이 계산되어지기 때문에 $MTBF(t_n)$를 위의 각 영역에서 적당한 A, B의 값으로 근사 시킬 수 있다. 즉,

$$MTBF(t_n) \approx \frac{1}{\lambda(t_n)}\left[1+\frac{\alpha-1}{h}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{h^2}\right].$$

그러면,

$$D \equiv \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{h^2}\begin{cases} \geq 0, & \text{만약 } 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \\ \leq 0, & \text{만약 } \frac{1}{2} < \beta \leq 1 \end{cases}$$

의 관계가 성립한다.

그래서 $MTBF(t_n)$의 추정량으로 다음과 같이 제안한다.

$$\widehat{MTBF(t_n)} = \frac{1}{\widehat{\lambda(t_n)}}\left[1+\frac{\hat{\alpha}-1}{n}+\frac{(\hat{\alpha}-1)(\hat{\alpha}-2)}{n^2}\right].$$

여기에서 $\widehat{\lambda(t_n)}$, $\hat{\alpha}$ 는 각각 $\lambda(t_n), \alpha$ 의 최우추정량이고, n은 h의 최우추정량으로 고장회수를 나타낸다.

제안된 추정량과 Tsokos의 추정량을 비교하기 위하여 모의실험을 통해서 평균제곱오차(MSE, Mean Squared Error)를 계산하였다. 이 계산은 FORTRAN IMSL QDAGI 부프로그램을 이용하여 Pentium-PC 166에서 계산하였다. 그림 3.1 ~ 3.3은 n 이 3, 5, 10인 경우에 대하여 θ 가 0.5, 1.0, 2.0 와 3.0 의 각각에 있어서 β 의 값이 0.1 ~ 1.0에서의 MSE를 계산하여 제안된 추정량과 Tsokos의 추정량의 MSE의 비(Ratio)를 그림으로 나타낸 것이다. 여기에서

$$\text{Ratio} = \frac{\text{제안된 추정량의 MSE}}{\text{Tsokos 추정량의 MSE}}$$

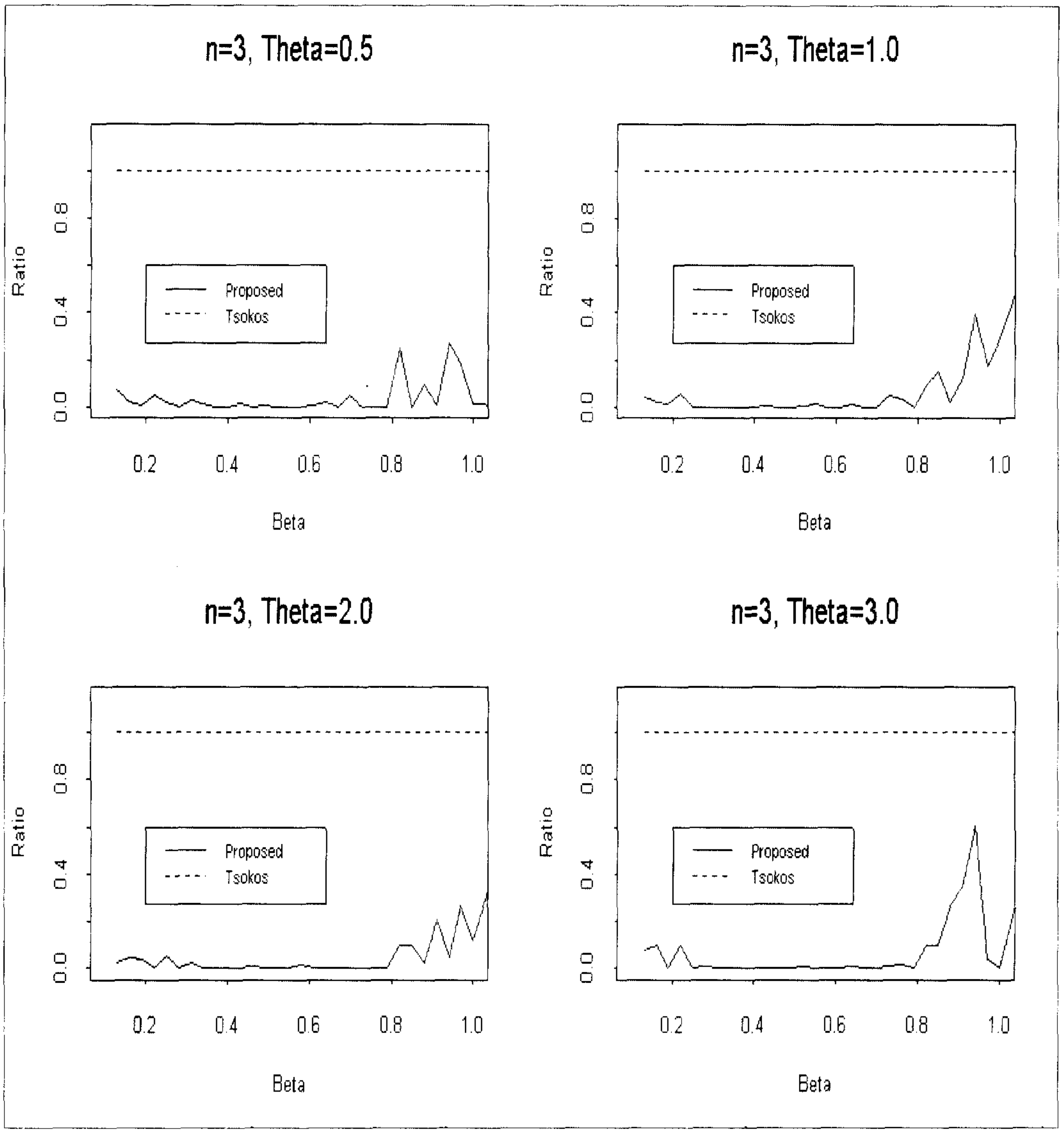
를 나타낸다. 결론적으로

(1) n이 작은 경우($n=3$), 의 전 영역에서 제안된 추정의 MSE가 Tsokos의 MSE보다 작다.

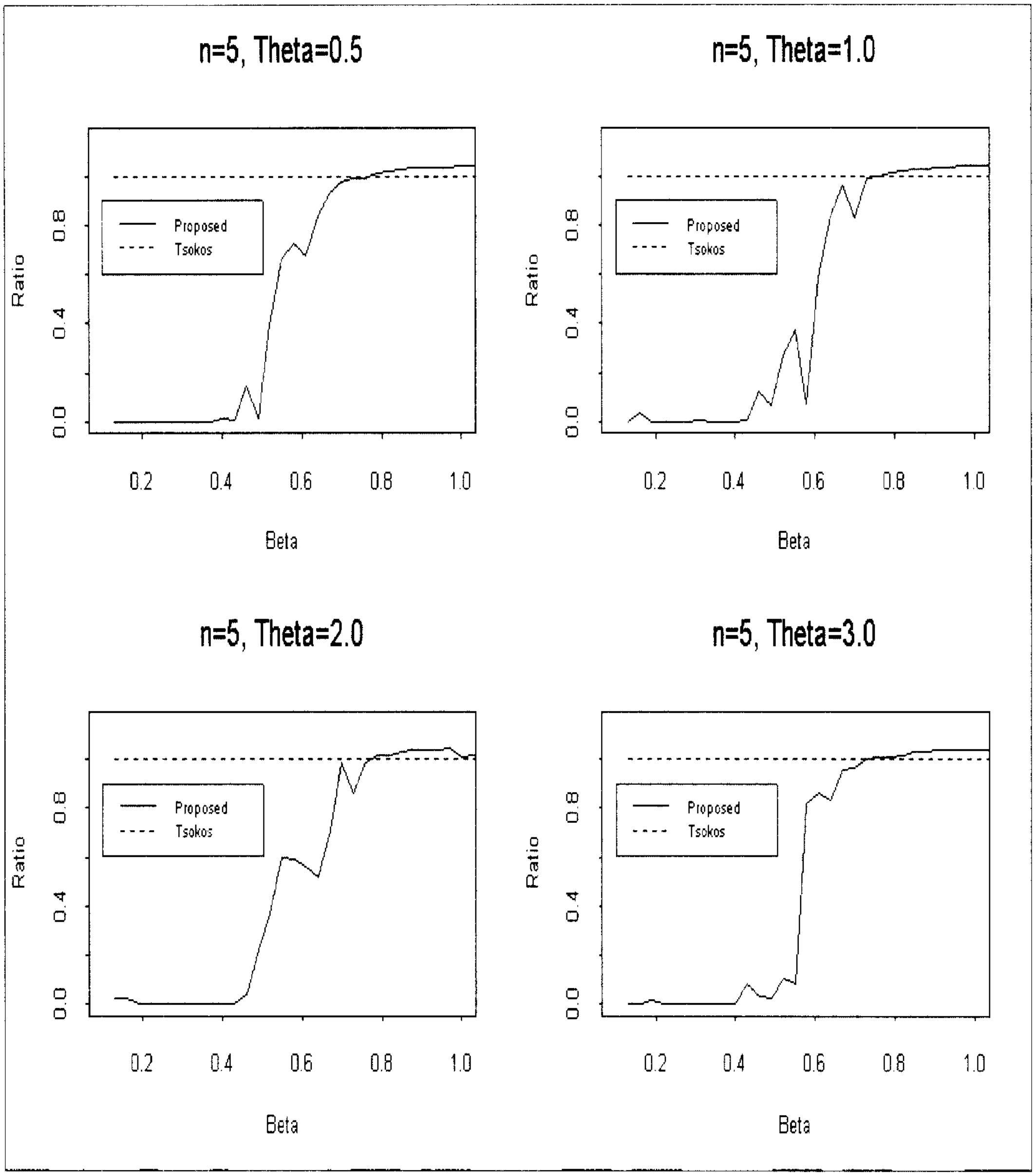
(2) n이 다소 큰 경우($n=5\sim10$), 제안된 추정량의 MSE가 $\beta<0.5\sim0.6$의 영역에서 Tsokos의 MSE보다 작고 나머지 영역에서는 거의 동일하다.

(3) n이 클 경우 두 방법의 MSE가 거의 비슷한 값을 갖는다.

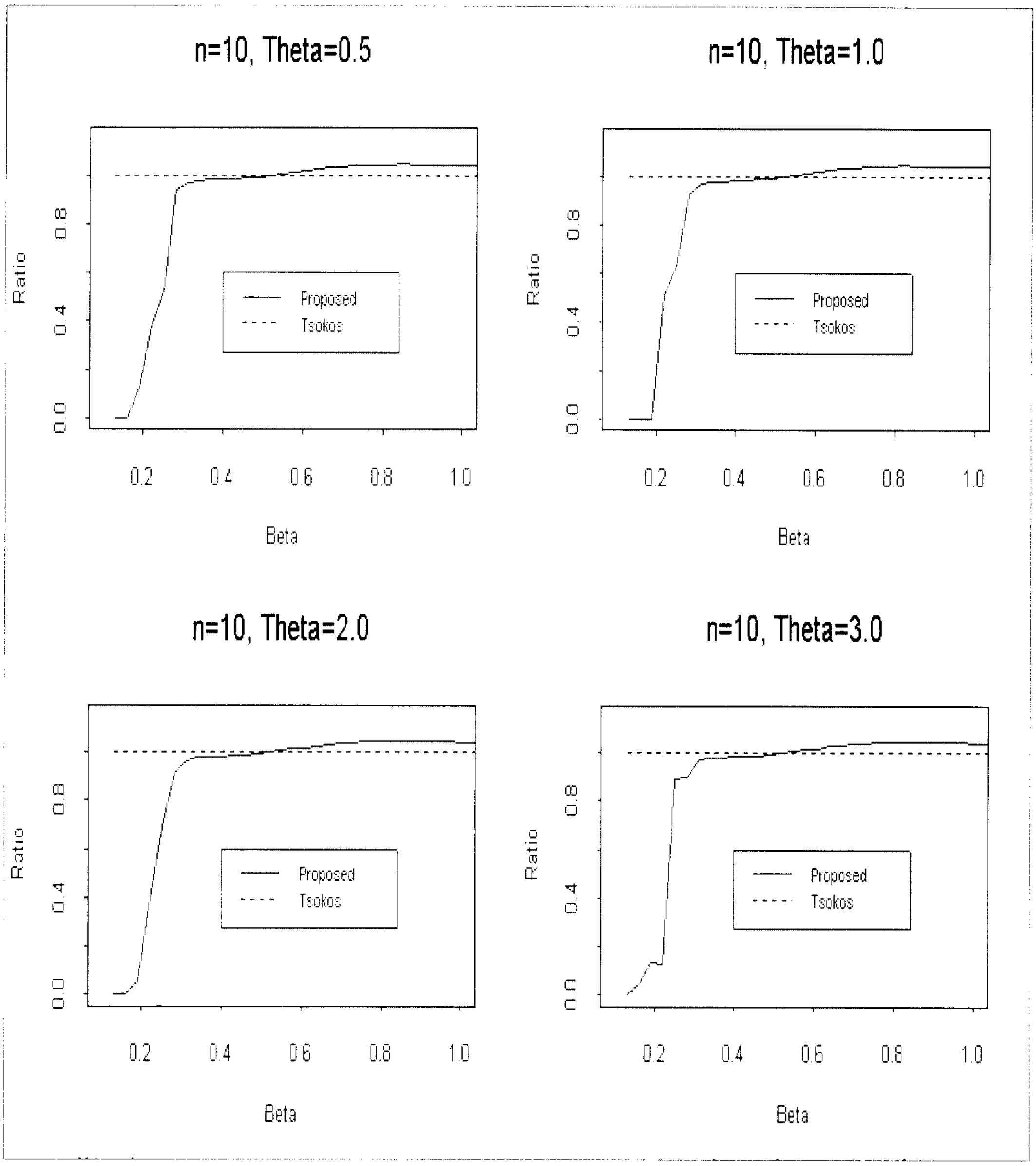
그래서, 제안된 추정량은 형상모수인 의 영역에 관계없이 그 형태가 동일하고, MSE면에서도 Tsokos의 MSE와 비교할 때 우수하다는 사실을 알 수 있다. 또한 본 추정량은 $\beta > 1$인 모형에서도 사용이 가능하고 Simulation 결과 MSE 역시 우수하다는 결론을 내릴 수 있었다. 그러나 이제까지의 모든 연구들이 $0 < \beta < 1$의 모형에서의 추정만이 연구되었기에 본 추정량과의 비교가 어려워 신뢰성 성장모형인 $\beta < 1$인 경우만을 다루었다.



< 그림 3.1 > n = 3인 경우에 제안된 추정량과 Tsokos의 추정량과의 MSE 비교.



< 그림 3.2 > n = 5인 경우에 제안된 추정량과 Tsokos의 추정량과의 MSE 비교.



< 그림 3.3 > n = 10인 경우에 제안된 추정량과 Tsokos의 추정량과의 MSE 비교.

References

[1] Bain, L.T. and Engelhardt, M.(1986), "On the Asymptotic Behavior of the MTBF for Repairable Systems," In *Reliability and Quality Control*(Ed., A.P. Basu), pp. 1~7, North-Holland, Amsterdam.

[2] Crow, L.(1974), "Reliability Analysis of Complex Repairable Systems," In *Reliability and Biometry*, Eds., F. Proschan and R.J. Serfling, pp. 379~410, SIAM, Philadelpia.

[3] Crow, L.H.(1982), "Confidence Interval Procedures for the Weibull Process with Applications to Reliability Growth," *Technometrics*, V24, pp. 67~72.

[4] Duane, J.T.(1964), "Learning Curve Approach to Reliability," *IEEE Transactions on Aerospace*, V2, pp. 563~566.

[5] Engelhardt, M. and Bain, L.J.(1986), "On the MTBF for Repairable Systems," *IEEE Transactions on Reliability*, V35, pp. 419~422.

[6] Tsokos, C.P.(1995), "Reliability Growth : Nonhomogeneous Poisson Process," In *Recent Advances in Life-Testing and Reliability*,Eds. N. Balakrishnan, pp. 319~334, CRC Press.