⊠연구논문

다구찌의 피드백 제어 시스템에 관한 연구

김지훈
서울대학교 기초과학연구원
정해성
서원대학교 응용통계학과
김재주
서울대학교 통계학과

A Study on Taguchi's Feed-back Control System

Jee Hoon Kim
Research Institute for Basic Science, Seoul National University
Hai Sung Jeong
Dept. of Applied Statistics, Seowon University
Jae Joo Kim
Dept. of Statistics, Seoul National University

Abstract

When driving the expected loss generated by the quality deviation, Taguchi (1991b) assumed that an objective characteristic has the uniform distribution in its control limit. But it is reasonable to assume that an objective characteristic has the normal distribution than the uniform distribution. Since the triangular distribution is similar to the normal distribution and easy to handle as well, in this article, we first find the optimum measurement interval and the optimum contol limit under the triangular distribution. Under the normal assumption, the modified method is compared to Taguchi's. Secondly we find the numerical value solution of the optimum measurement interval and the optimum contol limit under the normal distribution.

1. 서론

현장 근로자가 하고 있는 업무는 원재료 투입, 중간제품 운반, 가공기계에 대한 설치, 작업준비 등 생산관리와 가공공정의 검사, 조정 등의 제어를 통한 품질관리로 구분할 수 있다. 품질관리의 한 영역인 검사정책에서는 일반적으로 주어진 조정한계아래 고장발견때까지의 총 기대비용을 최소로 하는 검사 주기를 결정한다[5, 6, 7]. 한편 다구찌는 품질을 제품이 출하된 후 사회에 끼치는 손실로 정의하였고, 이런 손실을 작게 하는 기법을 품질관리를 하는 주요한 도구로 삼았다. 특히 그는 제품의 특성값이 목표값과 일치할 때 손실이 최소가 되며, 목표값으로부터 벗어날수록 손실이 증가한다고 가정한 것이 다른 연구자들의 접근 방법과는 다르다. 그는 품질관리 분야에서 다양한 관리기법들을 개발하여 현장 업무에 적용을 했는데, 특히 공정제어 분야에서는 일정한 간격으로 제품의 특성값과 공정조건을 체크하여 그 값이 어느 한계 안에 있으면 생산을 계속하고 그 한계를 넘어설 때는 공정을 조정하는 공정의 피드백 시스템을 개발하였다[1, 2, 3, 4, 8].

피드백 시스템 설계에서 다구찌(1991b)는 생산부문에서의 공정관리, 제품관리를 통해 공정관리 비용과 품질 산포에 의한 손실의 합을 최소로 해야 한다고 생각했다. 이 방법은 관리상 필요한 다음 2종류의 단위 생산량당 비용

B = 제품의 특성값을 측정하는데 드는 계측비용

C = 공정을 바람직한 상태로 하거나 불량품을 처리하는데 드는 조정비용

의 합과 품질상의 손실과의 균형을 도모하는 것이라 할 수 있다. 망목특성의 경우 제품 특성값 y의 품질 산포에 의한 손실함수 $L(y)$는 다음과 같이 주어진다.

$$L(y) = \frac{A_0}{\Delta_0^2}(y-m)^2.$$

여기서, m = 제품의 목표값, Δ_0 = 제품의 기능한계 그리고 A_0 = 제품이 기능한계를 벗어났을 때의 평균손실이다.

다구찌(1991b)는 품질에 의한 기대손실을 유도할 때에 제품의 관리한계 안에서 제품의 특성값이 거의 균등분포(uniform distribution)를 따른다고 가정을 하였는데 이는 문제가 있는 가정이 아닌가 생각되어 진다. 생산라인에서의 제품의 특성값은 균등분포 보다는 정규분포(normal distribution)에 가깝다고 생각할 수 있기 때문이다. 이 논문에서는 정규분포 가정을 하면 공정관리 비용과 품질 산포에 의한 손실의 합을 최소로 하는 최적 계측간격과 최적 관리한계를 구하기가 어려워지므로, 먼저 현장에서의 자료에 어느 정도 일치한다고 할 수 있는 삼각형분포(triangular distribution)를 가정함으로써 계측간격과 관리한계의 최적값들을 쉽게 구하고자 한다. 다음으로는 정규분포를 가정함으로써 수치해법을 통해 계측간격과 관리한계의 최적값들을 구하고자 한다.

2장에서는 다구찌에 의해 제안된 품질특성에 의한 피드백 제어 시스템 설계에 대해서 소개하고, 3장에서는 제품의 특성값의 분포를 삼각형분포와 정규분포로 가정함으로써 다구찌의 방법을 보완·개선할 것이다.

2. 다구찌의 피드백 제어 시스템 소개

제품의 특성값을 조사하는데 경비가 들고 가공 조건 조정에 시간이나 경비가 지나치게 들 때, 전수조사를 행하기보다는 품질공학면에서 경제성을 고려하여 전체의 피드백 시스템을 설계하는 공장이 많은데, 이 장에서는 다구찌의 품질에 대한 피드백 제어의 최적설계를 소개한다.

다음과 같이 파라미터를 정의한다.

제품의 목표값 : m

제품의 규격한계 : $m \pm \Delta_0$

제품이 규격한계를 벗어났을 때의 손실 (불량품의 손실) : A_0 (원)

계측비용 : B (원)

조정비용 : C (원)

현행 계측간격 : n_0 (개)

현행 평균 조정간격 : u_0 (개)

현행 조정 한계 : D_0

계측시의 타임 래그 : l (개)

최적 계측간격 : n (개)

최적 조정 한계 : D

최적 평균 조정간격의 예측값 : u (개)

n개 간격으로 B원의 비용으로 계측하고, u개 간격으로 C원의 비용으로 조정할 때, 제품 1개당 계측·조정 비용은 다음 식으로 주어진다.

$$\text{계측·조정 비용} = \frac{B}{n} + \frac{C}{u} \text{ (원)}$$

임의의 조정한계 D에 대해 평균 조정간격이 어떻게 되는지는 개별공정마다 변화하며, 이는 공정의 안정도에 관계되며 매우 복잡하다. 여기서는 평균 조정간격 u가 조정한계 D의 제곱에 비례하는 것으로 가정하고, 이 가정은 실제 관측결과와 비교해서 검토할 수 있다. 따라서 평균 조정간격 u는

$$u = u_0 \times \frac{D^2}{D_0^2} \tag{2.1}$$

이고, 계측 · 조정 비용은

$$\frac{B}{n} + \frac{C}{u} = \frac{B}{n} + \frac{D_0^2 C}{u_0 D^2} \quad (\text{원}) \tag{2.2}$$

가 된다.

한편 조정한계 $m \pm D$안에서 관리를 할 때 품질 산포에 의한 손실은 계측오차를 고려하지 않는다면 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{A_0}{\Delta_0^2}\left[\frac{D^2}{3} + \left(\frac{n+1}{2} + l\right)\frac{D^2}{u}\right]. \tag{2.3}$$

여기에서 $D^2/3$은 조정한계 $m \pm D$안에서 제품의 특성값이 균등분포를 따름을 가정하고 얻은 품질특성값의 산포이다. 그리고 계측간격 n으로 체크하고 있을 때 앞의 계측 점에서는 조정한계 안에, 현재 계측 점에서는 조정한계 밖일 때 한계를 벗어난 생산개수의 평균은 $(n+1)/2 + l$로 근사시킬수 있고, 이때의 제품의 특성값은 D로 근사시킬수 있다. 따라서 이때의 제품 1개당 손실은 식 (2.3)의 2번째 항으로 주어진다.

계측조정 비용의 식 (2.2)와 품질 산포에 의한 손실의 식 (2.3)을 더한 총손실 L은 식 (2.1)을 이용하면 다음과 같다.

$$L = \frac{B}{n} + \frac{D_0^2 C}{u_0 D^2} + \frac{A_0}{\Delta_0^2}\left[\frac{D^2}{3} + \left(\frac{n+1}{2} + l\right)\frac{D_0^2}{u_0}\right]. \tag{2.4}$$

식 (2.4)을 n과 D로 편미분하여 제로로 놓고 풀면, 최적 계측간격 n과 최적 조정한계 D를 구할 수 있다. 최적 계측간격 n은

$$n = \sqrt{\frac{2u_0 B}{A_0}} \times \frac{\Delta_0}{D_0} \tag{2.5}$$

이고, 최적 조정한계 D는 다음과 같이 주어진다.

$$D = \left(\frac{3C}{A_0} \times \frac{D_0^2}{u_0} \times \Delta_0^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

3. 다구찌의 피드백 제어 시스템 개선

3.1 삼각형분포의 가정

생산라인에서의 제품의 특성값은 균등분포 보다는 정규분포(normal distribution)에 가깝다고 보는 것이 타당할 것이다. 정규분포 가정을 하면 공정관리 비용과 품질 산포에 의한 손실의 합을 최소로 하는 최적 계측간격과 최적 조정한계를 닫혀진 정식으로 구할 수 없으므로, 현장의 자료와 어느 정도 일치한다고 할 수 있는 절단된 삼각형분포(truncated triangular distribution)를 먼저 가정함으로써 닫혀진 형태의 계측간격과 조정한계의 최적값을 구하고자 한다. $\pm D$에서 절단된 삼각형분포의 확률밀도함수 $f(y)$는 다음과 같다.

$$f(y) = \frac{1}{2hD-D^2}[h-|y-m|], \quad |y-m| \le D.$$

여기서, h는 상수로써 D보다는 크거나 같다. 이때의 조정한계 안의 품질 산포는

$$\frac{1}{2hD-D^2}\int_{m-D}^{m+D}[h-|y-m|](y-m)^2\,dy = \frac{4hD^2-3D^3}{6(2h-D)} \tag{3.1}$$

로 주어진다. 반약 $h=\lambda D$인 비례상수 $\lambda(\ge 1)$가 주어지면, (3.1)식은

$$\frac{4\lambda-3}{6(2\lambda-1)}D^2 \tag{3.2}$$

로 표현된다. 따라서 이를 이용한 총손실은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L = \frac{B}{n} + \frac{D_0^2 C}{u_0 D^2} + \frac{A_0}{\Delta_0^2}\left[\frac{4\lambda-3}{6(2\lambda-1)}D^2 + \left(\frac{n+1}{2}+l\right)\frac{D_0^2}{u_0}\right]. \tag{3.3}$$

식 (3.3)을 이용한 최적 계측간격 n은 식 (2.5)와 같고, 최적 조정한계 D는 다음과 같이 주어진다.

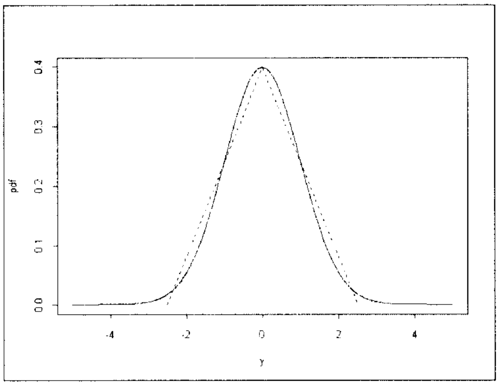
$$D = \left(\frac{6(2\lambda-1)}{4\lambda-3} \times \frac{C}{A_0} \times \frac{D_0^2}{u_0} \times \Delta_0^2\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.4}$$

평균이 m이고 폭이 $2h$인 삼각형분포의 평균에서 확률밀도함수값과 평균이 m이

고 분산이 σ^2인 정규분포의 평균에서 확률밀도함수값이 같을 경우에는, <그림 2.1>과 <그림 2.2>에서 보여지는 바와 같이 두 분포가 거의 일치하는데, 이 사실을 이용하면 다음과 같은 관계를 유도 할 수 있다.

$$h=\sqrt{2\pi}\sigma. \tag{3.5}$$

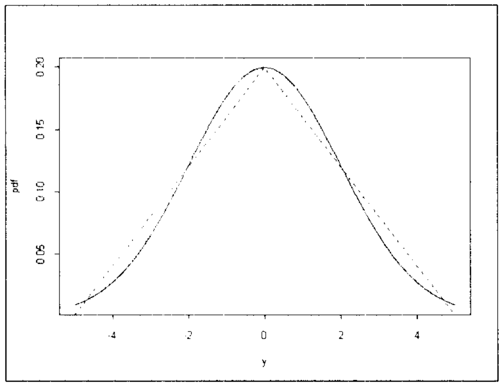
식 (3.5)에서 경험을 통한 또는 계측된 자료를 이용한 표준편차 σ의 추정으로 h를 구할 수 있게 된다. 따라서 식 (3.4)에서 필요한 상수 λ는 현행조정한계 D_0를 이용하여 근사적으로 얻어진다.



< 그림 2.1 > 확률밀도함수

— ; 정규분포 ($\sigma=1$)

-- ; 삼각분포



< 그림 2.2 > 확률밀도함수

— ; 정규분포 ($\sigma=2$)

-- ; 삼각분포

3.2 정규분포하에서의 비교

목표값 m을 0으로 설정하고, 조정한계 $0\pm D$안에서 제품의 특성값이 $\pm D$에서 절단된 평균이 0이고 분산이 σ^2인 정규분포($\pm D$ truncated $N(0,\sigma^2)$)를 따른다고 가정하자. $D=0.5\sigma$, σ, 1.5σ, 2σ, $\sqrt{2\pi}\sigma$인 경우에 표준편차 σ를 변화시키면서, 절단된 정규분포(참값), 절단된 삼각형분포, 균등분포 등의 가정 하에 얻어진 조정한계 안의 품질산포 $E(y^2)$의 값들은 <표 3.1>과 같다. 절단된 삼각형분포에서의 $E(y^2)$은 된 정규분포(참값), 절단된 삼각형분포, 균등분포 등의 가정 하에 얻어진 조정한계 안의 품질산포 $E(y^2)$의 값들은 <표 3.1>과 같다. 절단된 삼각형분포에서의 $E(y^2)$은 (3.2)식이고 균등분포에서의 $E(y^2)$은 $D^2/3$이다.

<표 3.1>에서 보면, $D=0.5\sigma$인 경우에는 삼각형분포나 균등분포의 산포들이 정규

분포와 비교해서 별 차이가 없으나, D가 커짐에 따라 삼각형분포나 균등분포의 산포들이 정규분포의 산포보다는 커짐을 알 수 있다. 그러나 전반적으로 삼각형분포의 산포가 균등분포의 산포보다는 훨씬 더 정규분포의 산포에 가깝다는 것을 알 수 있고, σ가 커짐에 따라 이런 현상이 더욱 뚜렷해짐을 알 수 있다.

< 표 3.1 > 조정한계 안의 품질산포

σ	D	정규분포	삼각형분포	균등분포
1인경우	0.5σ	0.08	0.08	0.08
	σ	0.29	0.29	0.33
	1.5σ	0.55	0.59	0.75
	2σ	0.77	0.89	1.33
	$\sqrt{2\pi}\sigma$	0.91	1.05	2.09
2인경우	0.5σ	0.32	0.31	0.33
	σ	1.16	1.17	1.33
	1.5σ	2.21	2.36	3.00
	2σ	3.09	3.56	5.33
	$\sqrt{2\pi}\sigma$	3.65	4.19	8.38
3인경우	0.5σ	0.73	0.71	0.75
	σ	2.62	2.63	3.00
	1.5σ	4.96	5.31	6.75
	2σ	6.96	8.02	12.00
	$\sqrt{2\pi}\sigma$	8.21	9.42	18.85

한편 (3.2)식에 있는 λ의 추정이 품질산포의 정밀도에 어느정도 영향을 미치는지 알아보기 위해 $\sigma=1$인 경우에, 참값 λ대신에 $\lambda=1$, $\pm 50\%$ 오염된 값 ($\lambda/2$, $3\lambda/2$), ∞ 등을 대입하여 얻은 품질산포는 <표 3.2>와 같다. <표 3.2>에서 보면, λ의 추정편차가 $-$(λ의 참값)/2보다 크게만 발생한다면 삼각형분포의 품질산포가 균등분포의 품질산포보다 정밀함을 알 수 있다. 따라서 비례상수 λ의 추정이 $-$(λ의 참값)/2보다 큰 추정편차를 갖는다면 삼각형분포를 가정하는 것이 최적 조정한계를 예측하는데에 정밀도를 높여줄 것이다.

< 표 3.2 > 오염된 λ값에서의 품질산포

D	정규분포	삼각형분포 (λ=1)	삼각형분포 (-50%)	삼각형분포 (+50%)	균등분포 ($\lambda=\infty$)
0.5	0.08	0.04	0.07	0.08	0.08
1.0	0.29	0.17	0.22	0.31	0.33
1.5	0.55	0.38	0.38	0.66	0.75
2.0	0.77	0.67	0.67	1.09	1.33
$\sqrt{2\pi}$	0.91	1.05	1.05	1.57	2.09

3.3 정규분포의 가정

생산라인에서의 제품의 특성값을 절단된 정규분포(truncated normal distribution)로 가정을 하면 공정관리 비용과 품질 산포에 의한 손실의 합을 최소로 하는 최적 계측간격과 최적 조정한계를 닫혀진 정식으로 구할 수는 없지만 수치해법을 이용하여 구할 수 있다. $\pm D$에서 절단된 정규분포의 확률밀도함수 $f(y)$는 다음과 같다.

$$f(y)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)\Big/\Phi\left(\frac{D}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{D}{\sigma}\right),\quad |y-m|\le D.$$

여기서, $\varphi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$는 각각 정규분포의 확률밀도함수, 분포함수이다. 이때의 조정한계 안의 품질 산포는

$$\frac{-2D\sigma^2\varphi(D/\sigma)}{\Phi(D/\sigma)-\Phi(-D/\sigma)}+\sigma^2$$

로 주어진다. 따라서 총손실은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L=\frac{B}{n}+\frac{D_0^2C}{u_0D^2}+\frac{A_0}{\Delta_0^2}\left[\frac{-2D\sigma^2\varphi(D/\sigma)}{\Phi(D/\sigma)-\Phi(-D/\sigma)}+\sigma^2+\left(\frac{n+1}{2}+l\right)\frac{D_0^2}{u_0}\right]. \quad (3.6)$$

식 (3.6)을 이용한 최적 계측간격 n은 식 (2.5)와 같고, 최적 조정한계 D는 수치해법을 이용하여 구해야 한다. D_0^2C/u_0을 상수1 이라 하고 A_0/Δ_0^2을 상수 2라 하면, <표 3.3>와 <표 3.4>와 같이 수치해법을 이용하여 D의 값을 구할 수 있다. 따라서 경험을 통한 또는 계측된 자료를 이용한 표준편차 σ의 추정으로 D를 구할 수 있게 된다. 하지만 수치해법의 사용으로 인해 다소 불편할 것으로 사료되어 진다.

< 표 3.3 > 수치해법을 이용한 D의 값 ($\sigma=3$ 경우)

(단, *는 수렴 안하는 경우)

D		상수1									
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0.1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	0.2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	0.3	4.5	4.6	4.7	4.8	*	*	*	*	*	*
상	0.4	4.1	4.1	4.2	4.3	4.3	4.4	4.5	4.5	4.6	4.6
수	0.5	3.8	3.8	3.9	3.9	4.0	4.0	4.1	4.1	4.2	4.3
2	0.6	3.5	3.6	3.6	3.7	3.7	3.8	3.8	3.9	3.9	4.0
	0.7	3.4	3.4	3.5	3.5	3.6	3.6	3.7	3.7	3.7	3.8
	0.8	3.2	3.3	3.3	3.4	3.4	3.5	3.5	3.5	3.6	3.6
	0.9	3.1	3.2	3.2	3.3	3.3	3.3	3.4	3.4	3.4	3.5
	1.0	3.0	3.1	3.1	3.2	3.2	3.2	3.3	3.3	3.3	3.4

< 표 3.4 > 수치해법을 이용한 D의 값 ($\sigma=4$ 경우)

D		상수1									
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0.1	5.9	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4	*	*	*	*
	0.2	4.6	4.7	4.8	4.8	4.9	5.0	5.0	5.1	5.2	5.2
	0.3	4.1	4.2	4.2	4.3	4.3	4.4	4.4	4.5	4.5	4.6
상	0.4	3.8	3.8	3.9	3.9	4.0	4.0	4.1	4.1	4.1	4.2
수	0.5	3.5	3.6	3.6	3.7	3.7	3.8	3.8	3.8	3.9	3.9
2	0.6	3.4	3.4	3.4	3.5	3.5	3.6	3.6	3.6	3.7	3.7
	0.7	3.2	3.3	3.3	3.3	3.4	3.4	3.5	3.5	3.5	3.6
	0.8	3.1	3.1	3.2	3.2	3.3	3.3	3.3	3.4	3.4	3.4
	0.9	3.0	3.0	3.1	3.1	3.2	3.2	3.2	3.3	3.3	3.3
	1.0	2.9	3.0	3.0	3.0	3.1	3.1	3.1	3.2	3.2	3.2

3.4 예제

어떤 부품치수를 관리하고 있는데, 이들의 파라미터는 다음과 같다.

제품의 규격 : $m \pm 15$ (μm)

불합격의 손실 : A_0=80 (원)

계측비용 : B=150 (원)
조정비용 : C=1200 (원)
현행 계측간격 : n_0=600 (개)
현행 평균 조정간격 : u_0=1200 (개)
현행 조정 한계 : D_0=5 (μm)
계측시의 타임 래그 : l=1 (개)
표준편차 σ의 추정값 = 4

이런 경우에 최적계측간격 n은 201(개)로 동일하게 나오고, 최적 조정한계 D는 균등분포의 가정하에서는 3.8 (μm), 삼각형분포의 가정하에서는 4.0 (μm), 그리고 절단된 정규분포의 가정하에서는 4.2 (μm)로 나오게 된다.

4. 결론

다구찌(1991b)는 공정의 피드백 제어 시스템에서 품질산포에 의한 기대손실을 유도할 때에 제품의 관리한계 안에서 제품의 특성값이 균등분포(uniform distribution)를 따른다고 가정을 하였다. 그러나 생산라인에서의 제품의 특성값은 균등분포 보다는 정규분포(normal distribution)를 따른다고 가정하는 것이 타당하기 때문에, 이 논문에서는 정규분포에 비교적 가까운 삼각형분포(triangular distribution)를 가정함으로써 계측간격과 조정한계의 최적값을 닫혀진 형태로 구하였다. 정규분포의 가정 하에 기대손실들을 비교해 본 결과, 삼각형분포하의 기대손실이 균등분포하의 그것보다는 훨씬 정밀함을 알 수 있었다. 또한 정규분포를 가정함으로써 계측간격과 조정한계의 최적값을 수치해법을 통하여 다소 불편하지만 좀 더 정밀하게 구하도록 제안하였다.

참고문헌

[1] 다구찌 겐이찌(1991a), 「개발 · 설계단계의 품질공학」, 한국공업표준협회.
[2] 다구찌 겐이찌(1991b), 「제조단계의 품질공학」, 한국공업표준협회.
[3] 박성현(1990), 「응용실험계획법」, 영지문화사.
[4] 박성현(1993), 「품질공학」, 민영사.
[5] Barlow, R.E. and Proschan, F.(1965), *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
[6] Munford, A.G.(1981), "Comparison among Certain Inspection Policies," *Management Science* 27, No. 3, pp. 256-260.

[7] Nakagawa, T. and Yasui, K.(1979), "Approximate Calculation of Inspection Policy with Weibull Failure Times," *IEEE Transactions on Reliability* 28, No. 5, pp. 403-404.

[8] Taguchi, G.(1987), *Introduction to Quality Engineering*, American Supplier Institute, Inc., Michigan.