⊠연구논문

단방향 누적점수관리도의 설계

최인수
한국과학기술원 산업경영연구소
이윤동
미국 아이오와 주립대학교 통계학과

A Design of One-Sided Cumulative Scored Control Chart

In-Su Choi
Industrial Engineering and Management Research Institute,
Korea Advanced Institiue of Science and Technology
Yun-Dong Lee
Dept. of Statistics, Iowa State University, U.S.A.

Abstract

This paper proposes a method of designing one-sided cumulative scored control charts to control the process mean with a normally distributed quality characteristic. The average run length(ARL) is obtained from the average sample number of sequential probability ratio test(SPRT) on trinomial distribution. Using the analogy between cumulative scored control chart and SPRT for trinomial observations, a procedure is presented to determine three control chart parameters; lower and upper scoring boundaries and action limit. The parameters are determined by minimizing the ARL when the process is out of control with prespecified ARL when the process is in control.

1. 서론

통계적 기법을 품질관리에 활용하기 시작하던 초기에는 주로 완성품을 검사하여 품질이 만족스럽지 못한 제품을 선별하는 샘플링검사가 큰 비중을 차지하였으나, 최근에는 공정을 검사하여 불량품이 생산되지 않도록 미리 예방활동을 하는 통계적 공정관리(statistical process control: SPC)의 체계적인 활용이 강조되고 있다. SPC의 기법

중 생산공정에서 품질특성치에 관한 자료를 해석하여 필요한 정보를 얻고, 이들 정보에 의하여 공정을 관리하기 위해 관리도(control chart)가 사용된다. 관리도란 중심선과 관리상한선 및 관리하한선이 있는 그래프에 품질의 변동상황을 나타낸 것을 말하며, 이것을 사용하는 방법을 관리도법이라 한다. 관리도 중에서 공정평균의 변화를 관리하고자 할 때 특히 슈하르트(Shewhart)형 $\overline{X}$ 관리도가 많이 사용되는데, 이는 부분군을 채취하여 계산한 평균들을 관리도상에 점으로 나타냈을 때 모든 점들이 $\pm 3\sigma$ 관리한계선 사이에 놓이고, 점들의 형태를 볼 때 공정에 이상이 있다고 판단할 만한 별다른 징후가 없으면 공정이 관리상태에 있다고 본다. 만약 한 점이라도 $\pm 3\sigma$ 관리한계선을 벗어나거나 점들이 비정상적인 행태를 보이면 공정이 관리상태를 이탈했을 가능성이 높다고 판단하여 공정에 이상이 있는지를 조사하게 된다.

공정평균의 변화를 관리하고자 할 때 슈하르트형 $\overline{X}$ 관리도 외에도 현재의 데이터 뿐 만이 아니라 앞에서 검사 받은 부분군의 검사결과들을 누적해 얻은 값에 기초하여 공정의 변화를 판단하는 누적합관리도(cumulative sum control chart)가 사용된다. 누적합관리도는 부분군의 결과들을 누적하여 공정의 변화를 판단하므로 아주 작은 공정의 변화를 슈하르트형 관리도에 비해 민감하게 탐지할 수 있다는 장점이 있어서 장치산업을 포함한 일반 산업현장에서 널리 사용되고 있다. 누적합관리도에서 표본평균들을 누적하는 대신 표본평균을 크기에 따라 이산형변수로 바꾸고 이를 누적하여 누적된 값이 주어진 한계를 벗어나면 공정평균에 변화가 있다고 판단하는 누적점수관리도(cumulative score control chart: CUSCORE chart)가 사용되기도 한다. 누적점수관리도는 누적합관리도와 비슷한 수행도를 갖으면서도 -1, 0, 1과 같은 이산화된 변수를 누적하기 때문에 현장에서 사용하기 쉽다는 장점이 있다.

누적점수관리도에 대한 연구로는 Munford(1980), Ncube와 Woodall(1984), 최병철(1987), Xiao(1992) 등이 있다. Munford(1980)는 정규분포를 따르는 공정의 평균을 관리하기 위하여 공정평균의 위치에 따라 -1, 0, 1 등의 값을 누적하는 누적점수관리도를 제안하였다. Ncube와 Woodall(1984)은 Munford의 연구에 슈하르트형 관리도를 결합한 새로운 형태의 공정관리 규칙을 제안하였고, 최병철(1987)은 공정평균을 $-w$, -1, 0, 1, w로 변환하여 누적하는 가중치를 고려한 누적점수관리도를 제안하였다. 또한 Xiao(1992)는 슈하르트형 $\overline{X}$ 관리도에서 관리한계 내의 영역을 중심선으로부터 거리에 따라 여러 개의 구역으로 나누고 $\overline{X}$가 속하는 영역에 따라 -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5의 값을 누적하는 방법을 제안하였다.

관리도의 평가를 위해 사용되는 중요한 개념으로는 평균 런의 길이(average run length: ARL)가 있다. 런은 관리도에서 사용하는 통계량(예를 들어 표본평균 또는 표본평균을 누적한 값)이 관리한계선을 벗어 날 때까지 추출한 표본의 개수이고, 평균 런의 길이는 이러한 런들의 평균을 말한다. 특히 공정평균에 변화가 없을 때(공정이 정상상태 일 때)의 평균 런의 길이를 ARL(0)라고 쓰고, 공정평균이 공정평균의 표준편차의 Δ배만큼 변했을 때의 평균런의 길이를 ARL(Δ)라고 쓴다. 따라서 공정에 이상이 없을 때는 ARL(0)가 크면 클수록, 공정에 이상이 발생하여 공정평균이 Δ만큼

변했을 때는 ARL(Δ)가 작으면 작을수록 관리도의 수행도가 좋은 것으로 평가하게 된다.

이 논문에서는 누적점수관리도에 관한 대표적인 연구인 Munford(1980)와 Ncube와 Woodall(1984)의 공정관리 규칙을 비교해보고, 이들의 규칙에 공정평균의 증가를 빨리 탐지하고자 할 때 사용하는 탄성장벽(elastic barrier)과 기준값(reference value)이 있는 경우를 포함하는 일반화된 공정관리 규칙을 제안한다. 특히 누적점수관리도를 삼항분포(trinomial distribution)에 대한 축차 확률비 검정(sequential probability ratio test: SPRT)으로 해석하고, SPRT의 평균 표본개수로부터 누적점수관리도의 평균런의 길이를 구하는 식을 유도한다. 또한 이를 이용하여 주어진 ARL(0)를 만족하고 ARL(Δ)가 최소가 되는 누적점수관리도를 설계한다.

2. 누적점수관리도

연속 생산 공정에서 품질특성치 Y가 평균이 m이고 분산이 σ^2으로 알려진 정규분포를 따를 때, 평균 m을 목표치 m_0로 관리하고자 한다고 하자. 이를 위하여 크기 n인 표본에서 얻어진 표본평균들을 $\overline{Y_i}$라 하고 $X_i = \sqrt{n}(\overline{Y_i} - m_0)/\sigma$라 하면, X_i는 평균이 $\mu(=\sqrt{n}(m-m_0)/\sigma)$이고 분산이 1인 정규분포를 따르게 된다. 따라서 공정관리 문제는 X_i의 평균 μ를 목표치 0으로 관리하는 문제가 된다. 누적점수관리도는 공정평균의 관리를 위하여 X_i를 -1, 0, 1로 변환하여 누적하면서 누적된 값이 정해진 한계보다 크면 공정에 이상이 있는 것으로 판단하는 방법이다. 누적점수관리도의 관리도 운용방법은 X_i를 이산형 변수로 변환하는 '점수부여 방법', 변환된 점수를 누적하는 '누적방법', 그리고 누적 값으로 공정의 변화를 판단하는 기준이 되는 '판단방법'으로 구분할 수 있다.

Munford(1980)는 공정평균의 증가를 관리하기 위하여 다음과 같은 "규칙-I"과 "규칙-II"를 제안하였다.

규칙-I

① 점수부여 방법

$$U(X_i) = \begin{cases} -1, & X_i < -k, \\ 0, & -k \le X_i \le k, \\ 1, & X_i > k. \end{cases} \tag{1}$$

② 누적방법

$$S_n = \begin{cases} 0, & n=0 \text{ 혹은 } S_{n-1}+U(X_n) = -1 \text{ 인 경우}, \\ S_{n-1}+U(X_n), & \text{기타} \end{cases} \tag{2}$$

③ 판단방법

$S_n \geq a$ (a는 양의 정수) 이면 공정에 이상이 있는 것으로 판단한다.

규칙-II

① 점수부여 방법 : 규칙-I의 식(1)과 동일

② 누적방법

$$S_n = \begin{cases} 0, & n=0 \text{ 혹은 } S_{n-1}+U(X_n)=-a \text{ 인 경우,} \\ S_{n-1}+U(X_n), & \text{기타} \end{cases} \tag{3}$$

③ 판단방법 : 규칙-I과 동일

Ncube와 Woodall(1984)은 공정이 관리상태($\mu=0$)인지 또는 공정평균이 증가($\mu=\Delta,\ \Delta>0$) 했는지를 판별하기 위하여 Munford(1980)의 절차를 개선한 다음과 같은 "규칙-I*"와 "규칙-II*"를 제안하였다.

규칙-I*

① 점수부여 방법

$$U(X_i) = \begin{cases} -1, & X_i-K < -k, \\ 0, & -k \leq X_i-K \leq k, \\ 1, & k < X_i-K \leq k_a, \\ 2a & k_a \leq X_i-K. \end{cases} \tag{4}$$

단, $K=\Delta/2$ 이다.

② 누적방법 : 규칙-I의 식 (2)와 동일

③ 판단방법 : 규칙-I과 동일

규칙-II*

① 점수부여 방법 : 규칙-I*의 식 (4)와 동일

② 누적방법 : 규칙-II의 식 (3)과 동일

③ 판단방법 : 규칙-I과 동일

"규칙-I*"와 "규칙-II*"는 누적점수 관리도에 슈하르트형 관리도가 결합된 것으로 $U(X_i)=2a$이면 슈하르트형 관리도와 같이 한 개의 관측치 만으로 공정평균의 변화를 판단하게 되는 경우를 의미한다. Ncube와 Woodall(1984)이 제안한 규칙에는 기준값(reference value) $K(=\Delta/2)$가 개입되어 있다. 이를 가설검정의 입장에서 살펴보면, Munford(1980)의 규칙은

$$H_0 : \mu=0 \quad \text{대} \quad H_1 : \mu > 0$$

이고, Ncube와 Woodall(1984)의 규칙은

$$H_0 : \mu=0 \quad \text{대} \quad H_1 : \mu=\Delta(\Delta > 0)$$

이다. 즉 Ncube와 Woodall(1984)의 경우는 반드시 검출되어야 할 공정평균 변화의 최소량이 미리 정해져 있는 것이다.

Ncube와 Woodall(1984)은 ARL(0)의 계산식으로 대칭확률보행(symmetric random walk)의 이론에 근거하여 유도한 Munford(1980)의 식을 사용하였는데, 기준값이 개입되어 있는 Ncube와 Woodall(1984)의 경우에는 대칭성이 깨어지므로 Munford(1980)의 ARL(0) 계산식을 바로 사용할 수 없다. 이 논문에서는 이러한 점에 유의하여 기준값이 개입되어 있는 경우의 정확한 ARL 계산식을 유도하고, 이를 이용하여 최적 누적점수 관리도를 설계한다. 이를 위해 먼저 Munford(1980)와 Ncube와 Woodall(1984)이 제안한 각 규칙들을 일반화하여 표현하면 다음과 같은데 이를 "규칙-B"라고 부르기로 한다.

규칙-B

① 점수부여 방법

$$\begin{aligned} U(X_i) &= I(X_i > k_2) - I(X_i < k_1) \\ &= \begin{cases} -1, & X_i < k_1, \\ 0, & k_1 \le X_i \le k_2, \\ 1, & X_i > k_2. \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

② 누적방법

$$S_n = \begin{cases} 0, & n=0 \text{ 혹은 } S_{n-1}+U(X_n)=-b \text{ 인 경우,} \\ S_{n-1}+U(X_n), & \text{기타} \end{cases} \tag{6}$$

③ 판단방법

$S_n \ge a$ 이면 공정에 이상이 있는 것으로 판단한다.

단, 여기서 $I(\cdot)$는 지시함수(indicator function), $k_1 \le k_2$ 그리고 a와 b는 양의 정수이다. "규칙-B"의 점수부여 방법은 $-k_1=k_2=k$이면 Munford(1980)의 점수부여 방법이 되고, $k_1=-k+K$, $k_2=k+K$ $(K=\Delta/2)$이면 Ncube와 Woodall(1984)에서 슈하르트형 관리도가 결합되지 않은 경우이다. 또한 누적방법에서 $b=1$ 이면 "규칙

-I"이나 "규칙-I*"가 되고, $b=a$이면 "규칙-II" 혹은 "규칙-II*"가 된다.

"규칙-B"는 Δ와 b가 주어진 경우 k_1, k_2, a에 의하여 완전히 결정된다. 즉, 누적점수관리도의 설계문제는 점수부여와 판단을 위한 관리도의 모수 k_1, k_2, a를 결정하는 문제가 된다.

3. 축차 확률비 검정과 평균런의 길이

표본평균으로부터 얻은 X_i가 $N(\mu, 1)$을 따른다고 할 때, 공정평균의 증가를 탐지하고자 하는 것은 가설

$$H_0 : \mu=0 \quad \text{대} \quad H_1 : \mu=\Delta(\Delta>0) \tag{7}$$

을 검정하는 것과 같다. 그런데 누적점수 관리도에서는 X_i를 그대로 사용하지 않고 $U(X_i)$로 바뀐 값을 사용하게 되고, 이때의 $U(X_i)$는 -1, 0, 1의 값을 갖는 삼항분포(trinomial distribution)를 따르게 된다. 시행횟수가 n이고 1의 값을 가질 확률이 p, -1의 값을 가질 확률이 q 이고 0의 값을 가질 확률이 $1-p-q$인 삼항분포를 $Tri(n, p, q)$라 쓰기로 하면, $U(X_i)$는 $Tri(n, p, q)$를 따르고

$$p=\Pr(U(X_n)=1)=1-\Phi(k_2-\mu), \tag{8.a}$$

$$q=\Pr(U(X_n)=-1)=\Phi(k_1-\mu), \tag{8.b}$$

이 된다. $\mu=0$에서의 p, q값을 각각 p_0, q_0라 하고, $\mu=\Delta$에서의 값을 p_1, q_1이라 하면, 공정평균 μ를 관리하는 것은 (p, q)쌍을 관리하는 것과 같아져서 가설 (7)을 다음의 가설

$$H_0 : (p, q)=(p_0, q_0) \quad \text{대} \quad H_1 : (p, q)=(p_1, q_1) \tag{9}$$

로 대체할 수 있게 된다. Y_1을 k_1보다 작은 X_i의 개수, Y_2를 k_2보다 작은 X_i의 개수라 하면, 가설 (9)에 대한 축차 확률비 검정을 위한 로그우도비 L_n은

$$\begin{aligned} L_n &= (Y_2-Y_1)\log(p_1/p_0) \\ &= \log(p_1/p_0)\sum_{i=1}^{n} U(X_i) \end{aligned} \tag{10}$$

이 된다. 따라서 가설(9)에 대하여 제1종 과오(type I error)의 확률이 α이고 제2종 과오(type II probability)의 확률이 β인 축차 확률비 검정 방법은 다음과 같다.

① $\sum_{i=1}^{n} U(X_i) \le h_b$ 이면 H_0를 채택

② $\sum_{i=1}^{n} U(X_i) \ge h_a$ 이면 H_1을 채택

③ $h_b < \sum_{i=1}^{n} U(X_i) < h_a$ 이면 표본을 하나 더 취한다.

단, 여기서 $h_a = \dfrac{\log((1-\beta)/\alpha)}{\log(p_1/p_0)}$, $h_b = \dfrac{\log(\beta/(1-\alpha))}{\log(p_1/p_0)}$ 이다.

이러한 축차 확률비 검정에서 $h_b = -b$, $h_a = a$ 라 하면 누적점수관리도는 가설(7)에 대한 축차 확률비 검정을 계속적으로 반복하는 것과 같다. 즉, 누적점수관리도에서는

① $\sum_{i=1}^{n} U(X_i) \le -b$ 이면

$\sum U(X_i)$를 0으로 재 설정하여 다시 시작한다.

② $\sum_{i=1}^{n} U(X_i) \ge a$ 이면

공정에 변화가 있는 것으로 판단하여 공정에 이상원인이 있는지를 조사하여 바로 잡은 후에 $\sum U(X_i)$를 0으로 재 설정하여 다시 시작한다.

③ $-b < \sum_{i=1}^{n} U(X_i) < a$ 이면 표본을 하나 더 취한다.

Wald(1947)가 구한 축차 확률비 검정에 관한 여러 가지 관계식들에 대하여 누적점수관리도의 삼항분포에 적용한 후 μ가 0, $\Delta/2$, Δ일 때를 대입하여 각 경우의 ARL을 구해보면

$$
\begin{aligned}
ARL(0) &= \frac{h_b + \alpha(h_a - h_b)}{\alpha(p_1 - p_0)} \\
ARL(\Delta/2) &= \frac{h_a(h_a - h_b)}{2p^*} \\
ARL(\Delta) &= \frac{h_a - \beta(h_a - h_b)}{(1-\beta)(p_1 - p_0)}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

이다. 여기서 $p^* = 1 - \Phi(-k_1 + \Delta/2)$ 이다. 또한

$$a = h_a = \frac{\log((1-\beta)/\alpha)}{\log(p_1/p_0)}$$
$$b = -h_b = \frac{\log(\beta/(1-\alpha))}{\log(p_1/p_0)} \tag{12}$$

이고, 이를 이용하여 μ의 각 값에 대한 ARL을 a, b, p_0, p_1, α, β의 식으로 나타낸 <표 1>과 α, β에 대한 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\alpha = \frac{p_0^a(p_1^b - p_0^b)}{p_1^{a+b} - p_0^{a+b}},$$
$$\beta = \frac{p_0^b(p_1^a - p_0^a)}{p_1^{a+b} - p_0^{a+b}}. \tag{13}$$

< 표 1 > 누적점수 관리도의 ARL식

μ	$-\infty$	$0(H_0)$	$\Delta/2$	$\Delta(H_1)$	∞
p/q	0	p_0/p_1	1	p_1/p_0	∞
h	∞	1	0	-1	$-\infty$
$L(\mu)$	1	$1-\alpha$	$\frac{a}{a+b}$	β	0
$ARL(\mu)$	∞	$\frac{-b+\alpha(a+b)}{\alpha(p_0-p_1)}$	$\frac{a(a+b)}{2p^*}$	$\frac{a-\beta(a+b)}{(1-\beta)(p_1-p_0)}$	a

식 (12)와 (13)을 <표 1>의 ARL식에 대입하여 정리하면

$$ARL(0) = \frac{1}{p_0-p_1}\left(a - b\frac{p_1^b(p_0^a - p_1^a)}{p_0^a(p_0^b - p_1^b)}\right)$$
$$ARL(\Delta/2) = \frac{a(a+b)}{2p^*} \tag{14}$$
$$ARL(\Delta) = \frac{1}{p_0-p_1}\left(a - b\frac{p_0^b(p_1^a - p_0^a)}{p_1^a(p_1^b - p_0^b)}\right)$$

이 된다. 또한 식 (8)에서 $k_1 = -s$, $k_2 = s + \varDelta$, 즉 $k_1 + k_2 = \varDelta$, 라 하면 p_0와 p_1은 s의 함수이다. 따라서 ARL의 식 (14)는 a, b, $p_0(s)$, $p_1(s)$의 함수이고 수치적인 방법으로 조사해 보면 위의 세 식은 각각 a, b, s에 대한 단조증가함수 임을 알 수 있다.

4. 누적점수관리도의 설계

누적점수관리도의 설계를 위하여 $\tau = p_1/p_0$라 하면 τ는 s의 함수이고, $ARL(0)/ARL(\varDelta)$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} ARL(0)/ARL(\varDelta) &= \Lambda(a, b, \tau) \\ &= \frac{\tau^a(b\tau^{a+b} - (a+b)\tau^b + a)}{a\tau^{a+b} - (a+b)\tau^a + b} \end{aligned} \tag{15}$$

만약 b의 값이 b_0이고 $ARL(0)$가 A_0로 주어진 경우 $ARL(\varDelta)$를 최소화시키는 a와 s를 찾는 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &Maximize \quad \Lambda(a, b_0, \tau(s)) \\ &s.t. \quad \frac{1}{p_0 - p_1}\left(a - b\frac{p_1^b(p_0^a - p_1^a)}{p_0^a(p_0^b - p_1^b)}\right) = A_0 \end{aligned} \tag{16}$$

즉, p_0, p_1, τ가 s의 함수이고, 식(14)의 ARL(0)도 s에 대한 단조 증가함수이다. 그러므로 a의 각 값에 대하여 (16)의 조건식을 만족하는 s가 존재한다면 그 값은 유일하다. 그러므로 조건식 (16)을 만족하는 가능집합(feasible set)에서의 (a, s)쌍 들은 서로 다른 a값을 갖고, a의 값에 따라 정렬이 가능하다. 따라서 이러한 (a, s)의 쌍 중에서 $\Lambda(a, b_0, \tau(s))$를 최대로 하는 (a^*, s^*)를 찾아야 한다. 그런데 가능집합에서의 (a, s)쌍 들과 그때의 ARL의 값들을 구해보면, $ARL(\varDelta)$는 가능집합 내에서 a의 변화에 따라 볼록함수 형태임을 알 수 있다. 또한 <표 1>에서 a가 커지면 공정평균 μ가 매우 큰 값으로 변했을 때 $ARL(\infty)$가 커지는 것을 알 수 있으므로, $ARL(\varDelta)$를 최소로하는 (a, s)중에서 a값이 작은 (a, s)쌍을 선택하면 유일한 (a^*, s^*)를 구할 수 있다. <표 2>는 $\varDelta(=2K)$가 0.3~0.7이고 $ARL(0)$가 100, 200, 300, 400, 500, 1000인 경우 $\Lambda(a, b_0, \tau(s))$를 최대로 하는 (a^*, s^*)와 그때의

$ARL^*(\varDelta)$를 구한 것이다.

< 표 2 > 주어진 $ARL(0)$를 만족하고 $ARL(\varDelta)$를 최소로 하는 (a^*, s^*)쌍과 $ARL^*(\varDelta)$

(a) $b=1$인 경우

$ARL(0)$	$\varDelta$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
100	a	5	4	4	3	3
	s	0.3425	0.4763	0.2859	0.5299	0.3697
	$ARL(\varDelta)$	28.2	21.2	16.7	13.6	11.1
200	a	6	5	5	4	4
	s	0.4509	0.4919	0.2802	0.4208	0.2413
	$ARL(\varDelta)$	40.0	29.0	22.1	17.4	14.2
300	a	7	6	5	5	4
	s	0.4207	0.4039	0.4551	0.2506	0.3981
	$ARL(\varDelta)$	48.0	33.9	25.5	19.9	16.1
400	a	7	6	6	5	5
	s	0.5582	0.5288	0.2948	0.3612	0.1662
	$ARL(\varDelta)$	54.2	37.8	28.0	21.7	17.5
500	a	8	7	6	5	5
	s	0.4557	0.3849	0.3815	0.4422	0.2441
	$ARL(\varDelta)$	58.9	40.7	30.0	23.2	18.5
700	a	9	7	7	6	5
	s	0.4202	0.5201	0.2687	0.2814	0.3561
	$ARL(\varDelta)$	66.7	45.5	33.2	25.3	20.1
1000	a	10	8	7	6	6
	s	0.4030	0.4477	0.4537	0.3987	0.1886
	$ARL(\varDelta)$	75.3	50.4	38.2	27.7	21.9
1500	a	11	9	8	7	6
	s	0.4104	0.4067	0.3183	0.2858	0.3080
	$ARL(\varDelta)$	85.3	56.2	40.3	30.4	23.8

(b) $b=2$인 경우

$ARL(0)$ \ Δ		0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
100	a	4	4	3	3	3
	s	0.5276	0.3237	0.5240	0.3546	0.1922
	$ARL(\Delta)$	27.7	20.9	16.2	13.0	10.8
200	a	5	5	4	4	3
	s	0.5984	0.3677	0.4689	0.2774	0.4921
	$ARL(\Delta)$	39.7	28.6	21.6	17.0	13.8
300	a	6	5	5	5	4
	s	0.5476	0.5555	0.3333	0.4442	0.2583
	$ARL(\Delta)$	47.6	33.6	25.0	19.5	15.6
400	a	7	6	5	5	4
	s	0.4638	0.4231	0.4511	0.2409	0.3650
	$ARL(\Delta)$	53.6	37.2	27.5	21.4	16.9
500	a	7	6	6	5	4
	s	0.5660	0.5165	0.2765	0.3237	0.4442
	$ARL(\Delta)$	58.7	40.3	29.7	22.7	18.1
700	a	8	7	6	5	5
	s	0.5186	0.4275	0.4022	0.4426	0.2399
	$ARL(\Delta)$	66.3	44.8	32.6	24.9	19.7
1000	a	9	8	7	6	5
	s	0.4916	0.3647	0.3018	0.2971	0.3537
	$ARL(\Delta)$	74.7	50.0	36.0	27.2	21.4
1500	a	10	8	7	6	6
	s	0.4908	0.5079	0.4353	0.4240	0.2088
	$ARL(\Delta)$	84.8	55.9	39.8	30.0	23.5

(c) $b=a$인 경우

$ARL(0)$ \ Δ		0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
100	a	4	3	3	3	3
	s	0.2837	0.5595	0.3805	0.2096	0.0467
	$ARL(\Delta)$	26.9	20.1	15.6	12.6	10.6
200	a	5	4	4	3	3
	s	0.3084	0.4503	0.2447	0.5295	0.3587
	$ARL(\Delta)$	37.8	26.9	20.5	16.3	13.0
300	a	5	5	4	4	4
	s	0.5221	0.2773	0.4283	0.2310	0.0473
	$ARL(\Delta)$	44.7	31.6	23.4	18.3	15.0
400	a	6	5	4	4	4
	s	0.3654	0.4101	0.5494	0.3478	0.1601
	$ARL(\Delta)$	50.2	34.6	25.9	29.8	15.9
500	a	6	5	5	4	4
	s	0.5566	0.5073	0.2756	0.4343	0.2436
	$ARL(\Delta)$	58.2	37.4	27.4	21.1	16.7
700	a	7	6	5	5	4
	s	0.3738	0.3499	0.4082	0.1920	0.3635
	$ARL(\Delta)$	61.4	41.3	30.0	23.1	18.2
1000	a	7	6	6	5	5
	s	0.5290	0.4919	0.2412	0.3184	0.1158
	$ARL(\Delta)$	68.7	45.7	33.1	24.9	19.9
1500	a	8	7	6	5	5
	s	0.4766	0.3915	0.3841	0.4540	0.2456
	$ARL(\Delta)$	77.3	50.7	36.1	27.4	21.4

[예제] 공정에 이상이 없는 경우의 품질특성치가 $N(200, 2^2)$을 따르는 어떤 공정에서는 공정평균을 가능한 201이하로는 유지하기를 원한다. 크기 8인 표본들로부터 구한 표본평균을 이용하여 공정을 관리한다고 할 때 $ARL(0)$가 400인 누적점수 관리도를 설계하면 다음과 같다.

우선 $m_0=200$, $\sigma=2$, $n=8$, $\Delta=(201-200)/2=0.5$, $ARL(0)=400$이다. 만약 $b=1$을 사용한다고 하면("규칙-I"), <표 2>로부터 $\Delta=0.5$, $ARL(0)=400$인 경우에 $a^*=6$, $s^*=0.2948$, $ARL^*(\Delta)=28.0$을 얻을 수 있다. 이로부터 $k_1=-s=-0.2948$, $k_2=s+\Delta=0.7948$이고, $m_0+k_1\sigma/\sqrt{n}=199.79$ 그리고 $m_0+k_2\sigma/\sqrt{n}=200.56$이다. 따라서 표본평균 $\overline{Y}_i$에 대하여

$$U(\overline{Y}_i) = \begin{cases} -1, & \overline{Y}_i < 199.79, \\ 0, & 199.79 \le \overline{Y}_i \le 200.56, \\ 1, & \overline{Y}_i > 200.56. \end{cases}$$

이고, $\sum_{i=1}^{k} U(\overline{Y}_i) \ge 6$ 이면 공정에 이상이 있는 것으로 판단한다.

또한 $b=a$인 "규칙-II"를 사용한다면, <표 2>로부터 $a^*=4$, $s^*=0.5494$, $ARL^*(\Delta)=25.9$를 얻을 수 있다. 이로부터 $k_1=-s=-0.5494$, $k_2=s+\Delta=1.0494$이고, $m_0+k_1\sigma/\sqrt{n}=199.61$ 그리고 $m_0+k_2\sigma/\sqrt{n}=200.74$이다. 따라서 표본평균 $\overline{Y}_i$에 대하여

$$U(\overline{Y}_i) = \begin{cases} -1, & \overline{Y}_i < 199.61, \\ 0, & 199.61 \le \overline{Y}_i \le 200.74, \\ 1, & \overline{Y}_i > 200.74. \end{cases}$$

이고, $\sum_{i=1}^{k} U(\overline{Y}_i) \ge 4$ 이면 공정에 이상이 있는 것으로 판단한다.

이 논문에서 제안된 방법으로 설계한 누적점수 관리도를 동일한 $ARL(0)$를 갖는 다른 관리도들과 $ARL(\Delta)$의 면에서 비교한 것이 <표 3>에 있다. <표 3>에서 사용된 기호 K는 기준값이고, 누적합관리도의 H는 결정구간(decision interval)을 나타낸다. <표 3>의 결과로 보면 새로운 방법으로 설계된 누적점수관리도는 $ARL(\Delta)$면에서 누적합관리도 보다는 떨어지지만 슈하르트형 관리도나 Munford(1980) 또는 Ncube와 Woodall(1984)의 방법 보다는 우수함을 알 수 있다. 특히 $ARL(0)$가 큰 값으로 주어진 경우에는 누적합관리도와 거의 유사한 수행도를 가짐을 알 수 있다.

< 표 3 > 여러 가지 단방향 관리도의 ARL비교

관리도	관리도 상수	평균		관리도 상수	평균		관리도 상수	평균	
		0.0	Δ =0.5		0.0	Δ =0.5		0.0	Δ =0.5
누적합	$H=4.42$ $K=0.25$	100	15	$H=7.58$ $K=0.25$	592	27	$H=8.43$ $K=0.25$	940	31
슈하르트	$k=2.33$	100	29	$k=2.93$	590	132	$k=3.07$	940	198
규칙-I	$a=4$ $k=1.28$	100	21	$a=8$ $k=1.55$	590	62	$a=15$ $k=1.14$	940	70
규칙-II	$a=4$ $k=1.28$	100	18	$a=8$ $k=1.23$	590	42	$a=15$ $k=0.71$	940	49
규칙-I*	$K=0.25$ $a=3$ $k_1=0.95$ $k_2=3.38$	100	17	$K=0.25$ $a=6$ $k_1=1.00$ $k_2=3.38$	591	42	$K=0.25$ $a=10$ $k_1=0.90$ $k_2=3.38$	940	66
규칙-II*	$K=0.25$ $a=3$ $k_1=0.685$ $k_2=3.38$	100	16	$K=0.25$ $a=6$ $k_1=0.627$ $k_2=3.38$	590	35	$K=0.25$ $a=10$ $k_1=0.48$ $k_2=3.38$	940	46
규칙-B $b=1$	$K=0.25$ $a=4$ $b=1$ $s=0.286$	100	16.7	$K=0.25$ $a=6$ $b=1$ $s=0.450$	600	31.7	$K=0.25$ $a=7$ $b=1$ $s=0.393$	1000	36.4
규칙 B $b=a$	$K=0.25$ $a=3$ $b=3$ $s=0.381$	100	15.6	$K=0.25$ $a=5$ $b=5$ $s=0.349$	600	28.7	$K=0.25$ $a=6$ $b=6$ $s=0.241$	1000	33.1

5. 결론

이 논문에서는 탄성장벽과 기준값이 있는 경우를 포함하는 일반화된 공정관리 규칙을 사용하는 누적점수관리도의 설계문제를 다루었다. 특히 누적점수관리도를 삼항분포에 대한 축차 확률비 검정로 해석하여 평균 런의 길이를 구하는 식을 유도하였다. 또한 이를 이용하여 주어진 ARL(0)를 만족하고 ARL(Δ)가 최소가 되는 누적점수관리도를 설계한다. 그 결과 새로운 방법으로 설계된 누적점수관리도는 슈하르트형 관리도나 Munford(1980) 또는 Ncube와 Woodall(1984)의 방법 보다는 우수하였고, $ARL(0)$가 큰 값으로 주어진 경우에는 누적합관리도와 거의 유사한 수행도를 가짐을 알 수 있었다.

이 논문에서는 누적점수관리도의 설계를 위하여 $ARL(0)$와 탄성장벽이 주어져 있을 때, 점수부여와 판단을 위한 한계를 정하는 방법만을 다루었으나 탄성장벽의 설정까지도 고려하는 새로운 설계 방법의 연구가 필요하리라 여겨진다. 또한 누적점수관리도에 슈하르트형 관리도를 결합하여 사용하는 경우와 양방향 누적점수관리도의 최적설계에 관한 연구도 필요할 것이다.

참고문헌

[1] 최병철(1987), 「연속생산공정에서의 평균값 관리를 위한 누적 가중점수 관리도」, 서울대학교 박사학위 논문.

[2] Munford, A.G.(1980), "A Control Chart Based on Cumulative Scores," 「Applied Statistics」, Vol. 29, pp. 252-258.

[3] Ncube, M.M. and Woodall, W.H.(1984), "A combined Shewhart-Cumulative Score Quality Control Chart," 「Applied Statistics」, Vol. 33, pp. 259-265.

[4] Xiao, H.(1992), "A Cumulative Score Control Scheme," 「Applied Statistics」, Vol. 41, pp. 47-54.

[5] Wald, A.(1947), 「Sequential Analysis」, John Wiley & Sons, New York.