⊠연구논문

공정평균이 변하는 생산공정의 공정평균의 초기값 및 재설정 시간 결정

안동근 · 장중순
아주대학교 기계 및 산업공학부

Determination of the Starting Value and the Resetting Time for a Production Process with Linear Shift in the Process Mean

Dong Geun Ahn · Joong Soon Jang
School of Mechanical & Industrial Engineering, Ajou University

Abstract

Mean shifts may be found in tool wear in machining, drawing, stamping and moulding operations, which make the process quality level deteriorate over time. In such situations, it is necessary to reset or readjust the manufacturing process at regular time basis or by inspection to prevent defective items produced. Although the deterioration rate may be assumed to be linear in a production cycle, there are many cases where the rate varies after resetting due to the variation of tool characteristics or by using the resharpened tools. In such cases, the deterioration rate should not be assumed to be a deterministic constant but a random variable. This paper is to find an optimal resetting period and quality level for such production processes.

1. 서론

생산공정에 있어서는 제품을 생산함에 따라서 부품의 열화 또는 헐거워짐 등으로 인해서 품질특성치의 평균이 증가하거나 또는 감소하는 경우들이 많이 존재한다. 이러한 품질특성치의 이동은 몇 가지 사례에서 찾아볼 수 있는데, 예를 들어 캔(can)제품이나 화화제품을 생산하는 경우 노즐(nozzle)을 통해 이동하는 액체의 양은 응고현상 등으로 제품의 품질특성치가 변화하는 경우, 가공산업에서 공구마모에 의해 가공제품의 품질특성치가 이동하는 경우 등이 대표적인 예이다[Rahim과 Banerjee, 1988]. 이러한 품질특성치의 이동문제는 자동화된 설비의 사용이 증가되고 있는 상황에서 점점 더 중요한 문제로 대두되고 있다. 따라서 생산되는 제품의 불량률을 줄이기 위해서는 어느 정도의 일정한 생산시간간격을 두고 주기적으로 공정평균을 재설정하여야 한다. 이러한 상황을 다룬 몇 가지 연구를 요약하면 다음과 같다.

Gibra(1967), Arcelus et al.(1982), Rahim과 Lashkari(1985), Arcelus와 Banerjee (1985), 그리고 Arcelus et al.(1985)은 품질특성이 시간에 따라 선형으로 이동하고 분산은 일정하다는 가정 하에서 제품단위당 기대비용을 최소화하는 최적 생산주기를 결정하였다. Kamat(1976)는 품질특성의 평균이 선형으로 변화할 때 품질특성이 규격한계를 벗어나는 점을 탐색하기 위한 방법으로 베이즈(Bayes) 관리절차를 마련하였다. Schneider et al.(1988)과 Schneider et al.(1990)은 생산이 지속되는 동안 평균품질이 랜덤하게 감소하는 형태의 생산공정에서 규격하한에 미달하는 제품에 대해서는 불량품으로 간주하여 기대생산비용을 최소화하는 초기공정평균과 관리한계를 결정하는 문제를 다루었다. Drezner와 Wesolowsky(1989) 그리고 Makis(1996)는 공정평균의 변화율을 알고 있고 선형으로 변화하는 공정에서 대칭형손실함수와 비대칭손실함수를 사용하여 초기공정평균과 공정평균의 재설정 시간을 결정하는 문제를 다루었다. Christer와 Wang(1992)는 베어링(bearing)의 마모율을 일정한 범위에서 변화하는 미지의 확률변수로 가정하여 베어링 사용동안의 검사빈도와 고장나기 전의 마모 한계값을 결정하는 문제를 다루었다.

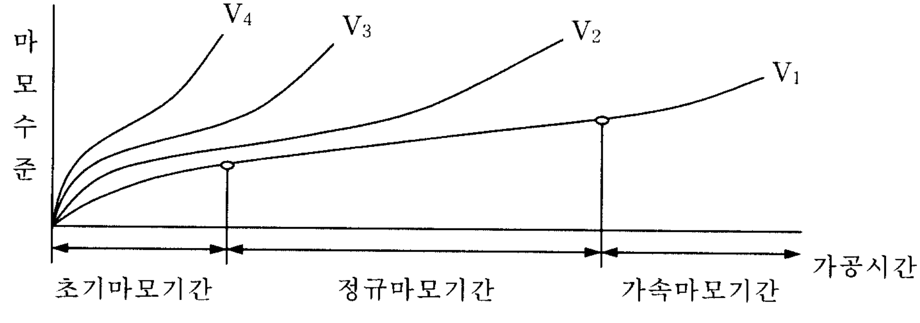
이 분야의 기존 연구들의 대부분은 단위시간당 품질특성치의 평균 변화율을 알고 있는 경우에 대해서만 다루고 있다. 그러나 실제 많은 경우에는 품질특성치의 평균 변화율을 모르는 경우가 많다. 평균 변화율을 모르는 경우, 실제 현장에서는 생산설비의 수명이나 생산제품의 수 등을 근거로 설비의 교체 시기나 보전시기를 추정하여 사용하고 있지만, 이러한 경우 생산되는 제품의 재질, 생산설비의 불량 등의 여러 가지 원인으로 공정평균의 변화가 달라질 수 있는데 이를 감지하지 못하고 생산설비의 교체시기나 보전시기를 잘못 설정함으로서 불량이 양산되는 경우가 있다. 또한 품질특성치의 평균 이동을 가져오는 원인들은 대부분 장시간에 걸쳐 발생되는 현상이므로 단지 몇 개의 생산만으로는 공정평균이 큰 변화를 발생하지는 않지만 생산설비, 부품, 그리고 공구 등은 일정시간 사용되면 교체되거나 보전되어 생산에 다시 사용되므로 이러한 교체주기마다 공정평균의 변화율은 달라진다. 예를 들어, 자동차 및 냉장고용

소구경 튜브인 일중권강관(Bundy Welded Single Wall Tube)과 이중권강관((Bundy Welded Double Wall Tube)의 생산에 사용되는 설비인 롤(roll)은 제품을 생산함에 따라 열화가 진행되어 튜브의 품질특성치인 외경이 점차 선형으로 증가하는 경향이 있다. 또한 롤의 교체는 3~6개월마다 교체가 이루어지고 있는데 롤의 교체에 따른 품질특성치의 평균 이동률은 다르게 발생한다. 이러한 예는 신발창을 만드는 공정에서도 찾아 볼 수 있다. 신발창의 주원료인 고무와 보조원료를 배합하여 반죽을 형성하고 배합된 반죽은 여러 번의 롤링(rolling)공정을 거쳐 단단한 신발창원료로 만들어진다. 이러한 과정을 통해 형성된 원료는 일정한 중량으로 잘려 금형공정으로 옮겨지게 된다. 이때 일정한 중량으로 잘라주는 공정에서 절단기(cutting machine)의 나사조임쇠가 서서히 풀림으로 인해 중량의 선형이동이 발생한다.

이러한 상황을 고려하여 본 연구에서는 생산하는 시간에 따라서 공정평균이 선형적으로 감소(증가)하지만 공정평균의 정확한 변화율은 모르고 어떤 구간 내에서 변화하는 경우, 초기 공정평균과 공정평균 재설정시간을 구하고자 한다.

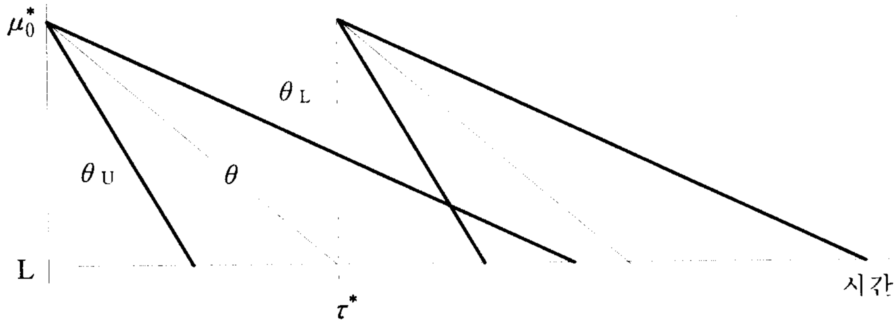
2. 모형 구성

일반적인 가공 시스템에서 품질특성치의 평균 이동은 가공설비를 지속적으로 운용할수록 누적되어 나타난다. 계속적인 생산으로 인한 가공설비의 열화는 적정수준을 초과하게 되면 많은 불량품이 생산될 가능성이 커지게 된다. 특히 가공공구의 마모현상과 같은 경우는 피가공물의 재질, 가공공구의 재질, 새로운 공구, 그리고 재 사용하는 공구 등에 따라서 마모율이 달라진다. 일반적으로 알려진 공구의 마모형태를 살펴보면 초기마모기간(initial wear period), 정규마모기간(normal wear period), 가속마모기간(accelerated wear period)으로 나누어 볼 수 있고 <그림 1>과 같이 표현할 수 있다[Billatos et al., 1986].



< 그림 1 > 가공속도에 따른 공구의 마모곡선

<그림 1>에서와 같이 가공공구의 마모수준은 S자형의 곡선으로 표현될 수 있지만, 일반적으로 공구의 마모와 같은 생산 시스템의 설비 열화현상은 장시간에 걸쳐 발생하므로 어떤 일정한 시간내에서는 선형으로 표현할 수 있다. 설비의 열화현상으로 인해 생산되는 품질특성치의 평균도 역시 서서히 이동하고 열화수준의 변화에 따른 품질특성치의 평균 이동도 위에서 언급한 여러 가지 원인으로 다양하게 발생한다. 예를 들어, 같은 재질의 설비일지라도 새로운 설비와 사용하다 보전을 통한 재사용되는 설비를 비교한다면 품질특성치의 이동은 다르게 나타난다. 또한 새로운 설비일지라도 설비의 재질이 다르거나 생산되는 원자재의 재질이 다르다면 품질특성치의 평균 이동율이 다르게 나타난다. 이러한 경우 품질특성치의 평균 이동은 한 생산사이클(cycle) 내에서는 선형으로 변화하지만 공정의 재조정 후 생산사이클마다의 변화율은 다르게 나타난다. 이러한 생산사이클마다 다르게 나타나는 품질특성치의 평균 변화율과 사이클 내에서는 선형으로 변화하는 경우를 고려하면 <그림 2>와 같이 나타낼 수 있다. 이러한 경우 생산사이클 마다 품질특성치의 평균 이동율은 일정한 상수라고 할 수 없는 확률변수가 된다.



< 그림 2 > 공정평균의 변화와 공정평균의 재설정 시간

본 연구에서 사용하는 기호와 가정은 다음과 같다.

기호

X_t	: t시점에서 제품의 품질특성치
μ_0	: 초기 공정평균
σ^2	: X_t의 분산
θ	: 단위시간당 공정평균 변화율, $\theta_L \le \theta \le \theta_U \le 0$
θ_U	: 단위시간당 공정평균 변화율의 최대값
θ_L	: 단위시간당 공정평균 변화율의 최소값

L : 규격하한
$f(x_t)$: X_t의 확률밀도함수
$g(\theta)$: θ의 분포함수
C_1 : 단위제품당 변동비
C_r : L 미만의 제품을 불합격 처리하여 발생하는 비용
K : 공정평균의 재설정 비용
τ : 공정평균의 재설정 시간
$\phi(\cdot)$: 표준정규분포의 확률밀도함수
$\Phi(\cdot)$: 표준정규분포의 누적밀도함수
μ_t : t시점에서의 공정평균
EPC : 제품당 기대 생산비용
ERC : 제품당 기대 불량손실비용
$E(C_t)$: 제품당 기대 비용
$C(\mu_0, \tau, \theta)$: 단위 시간당 총 기대 비용

가정

1. 생산하는 시간에 따라서 공정평균은 단위시간당 θ_U와 θ_L 사이의 비율로 감소한다.
2. 품질특성치 X_t는 정규분포를 한다, $X_t \sim N(\mu_t, \sigma^2)$.
3. t시점에서의 공정평균 $\mu_t = \mu_0 + \theta \cdot t$
4. 품질특성치 X_t는 하한 규격 L만 존재한다.
4. σ^2는 변하지 않으며 그 값을 알고 있다.
5. 단위 시간마다 한 개의 제품이 생산된다.

본 연구에서는 생산시스템의 비용요소들로 생산비용, 제품이 불량으로 인한 손실비용, 그리고 공정을 재조정하는데 드는 비용을 고려한다. 제품이 생산으로 생산비용이 발생하고 품질특성치 X_t가 규격하한 L을 넘는 제품은 양품으로 생산비용만 발생하지만 규격하한에 미달하는 제품은 이에 따른 불량으로 인한 손실 C_r이 발생한다. 그러므로 품질특성치 X_t의 규격하한이 설정되어 있는 제품에 대해 만일 공정평균을 높게 설정하면 제품의 불량으로 인한 손실은 감소하지만 제품 생산비용이 증가하고, 반대로 공정평균을 낮게 설정하면 제품 생산비용은 감소하나 불량의 증가로 인한 손실비용의 증가를 가져오게 된다. 따라서 이러한 비용요소들의 관계로부터 최적공정평균을 결정하는 것은 제품의 생산원가를 줄이는데 있어서 중요한 문제가 된다. 본 연구에서

는 생산비용, 불량으로 인한 손실비용, 공정평균의 재설정 비용의 합으로 이루어진 단위당 총 기대비용함수를 구성하여 이를 위험함수(risk function)로 정의한다.

먼저 제품당 기대 생산비용을 살펴보면 규격을 만족하는 제품은 품질특성치가 규격하한을 초과하는 양에 비례해서 단위당 C_1의 비용이 발생하므로

$$EPC = \int_L^{\infty} C_1 (x_t - L) f(x_t)\, dx_t \tag{1}$$

이다. 품질특성치가 규격하한에 미달하면 불량이 발생하여 생산비용을 포함한 불량으로 인한 손실이 발생한다.

한편 제품의 품질특성치가 규격하한에 미달되어 불량일 확률은

$$p_r = \int_{-\infty}^{L} f(x_t)\, dx_t$$

이므로 제품당 기대 불량손실비용은

$$ERC = C_r p_r = C_r \int_{-\infty}^{L} f(x_t)\, dx_t \tag{2}$$

이 된다. 따라서 위의 두 비용항목의 합으로 구성된 시간 t에서 제품당 기대비용은

$$E(C_t) = \int_L^{\infty} C_1 (x_t - L) f(x_t)\, dx_t + C_r \int_{-\infty}^{L} f(x_t)\, dx_t \tag{3}$$

이 된다.

(3)식은

$$\int_L^{\infty} \frac{x_t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_t-\mu_t)^2/2\sigma^2} dx_t = \mu_t - \mu_t \Phi(\frac{L-\mu_t}{\sigma}) + \sigma\phi(\frac{L-\mu_t}{\sigma})$$

의 관계를 이용하여 정리하면

$$E(C_t) = C_1\mu_t - C_1 L - (C_1\mu_t - C_1 L - C_r)\Phi(\frac{L-\mu_t}{\sigma}) + C_1\sigma\phi(\frac{L-\mu_t}{\sigma}) \tag{4}$$

이 된다.

공정을 재조정하는데 τ시간마다 K의 비용이 들고 재조정 시간은 무시할 만큼 작고 생산시간은 일정하다고 가정하면 단위시간당 총 기대비용은

$$C(\mu_0, \tau, \theta) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} E(C_t)\,dt + \frac{K}{\tau}$$

$$= C_1\mu_0 + \frac{C_1\theta\tau}{2} - C_1L - \frac{(C_1\mu_0 - C_1L - C_r)}{\tau}\int_0^{\tau}\Phi\left(\frac{L-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)dt$$

$$-\frac{C_1\theta}{\tau}\int_0^{\tau} t\,\Phi\left(\frac{L-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)dt + \frac{C_1\sigma}{\tau}\int_0^{\tau}\phi\left(\frac{L-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)dt + \frac{K}{\tau} \tag{5}$$

이다. (5)식의 우변에 있는 적분항은

$$\int_0^{\tau}\Phi(z_t)\,dt = \frac{\sigma}{\theta}[z_0\Phi(z_0) - z_\tau\Phi(z_\tau) + \phi(z_0) - \phi(z_\tau)] \tag{6}$$

$$\int_0^{\tau} t\,\Phi(z_t)\,dt = \frac{\tau^2}{2}\Phi(z_\tau)$$
$$+\frac{\sigma^2}{2\theta^2}[(z_0^2+1)(\Phi(z_0) - \Phi(z_\tau)) + z_0\phi(z_0) + \phi(z_\tau)(z_\tau - 2z_0)] \tag{7}$$

$$\int_0^{\tau}\phi(z_t)\,dt = \frac{\sigma}{\theta}[\Phi(z_0) - \Phi(z_\tau)] \tag{8}$$

이 된다. 여기서 $z_0 = (L-\mu_0)/\sigma$ 이고 $z_\tau = (L-\mu_0-\theta\tau)/\sigma$ 이다.

(6)식, (7)식 그리고 (8)식을 (5)식에 대입하여 정리하면

$$C(\mu_0, \tau, \theta) = \frac{K}{\tau} + C_1\mu_0 + \frac{C_1\theta\tau}{2} - C_1L$$
$$-\frac{\sigma(C_1\mu_0 - C_1L - Cr)}{\theta\tau}[z_0\Phi(z_0) - z_\tau\Phi(z_\tau) + \phi(z_0) - \phi(z_\tau)] - \frac{C_1\theta\tau}{2}\Phi(z_\tau)$$
$$-\frac{C_1\sigma^2}{2\theta\tau}[(z_0^2-1)(\Phi(z_0) - \Phi(z_\tau)) + z_0\phi(z_0) + \phi(z_\tau)(z_\tau - 2z_0)] \tag{9}$$

으로 표시된다.

한편 (9)식에서 θ가 확률변수이므로 베이즈위험함수(Bayes risk function) 혹은 기대위험함수(expected risk function)는

$$R(\mu_0, \tau) = \int_{\theta_L}^{\theta_U} C(\mu_0, \tau, \theta)\, g(\theta)\, d\theta \tag{10}$$

으로 표현된다. 따라서 (10)식을 최소화하는 초기 공정평균과 공정평균의 재설정 시간을 구하면 되는데, 본 연구에서는 이러한 최적해를 구하기 위해 θ의 분포함수로 g(θ)가 균등분포인 경우에 대해 구하고자 한다. 공정의 재조정 싸이클마다 발생하는 공정평균의 변화는 일정한 변화율을 보이지 않고 매우 다양하게 나타나는 경우가 대부분이기 때문이다[Christer와 Wang, 1992]. g(θ)가 균등분포인 경우 (10)식은

$$\begin{aligned}
R(\mu_0, \tau) &= \frac{1}{\theta_U - \theta_L} \int_{\theta_L}^{\theta_U} C(\mu_0, \tau, \theta)\, d\theta \\
&= \frac{K}{\tau} + C_1\mu_0 + \frac{C_1\tau(\theta_U + \theta_L)}{4} - C_1 L \\
&\quad - \frac{\sigma(C_1\mu_0 - C_1 L - Cr)}{\tau(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta}\, [z_0 \Phi(z_0) - z_\tau \Phi(z_\tau) + \phi(z_0) - \phi(z_\tau)]\, d\theta \\
&\quad - \frac{C_1\tau}{2(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \theta\, \Phi(z_\tau)\, d\theta - \frac{C_1\sigma^2}{2\tau(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\, (z_0^2 - 1) \\
&\quad (\Phi(z_0) - \Phi(z_\tau)) + z_0\phi(z_0) + \phi(z_\tau)(z_\tau - 2z_0)]\, d\theta
\end{aligned} \tag{11}$$

이 된다.

3. 최적해

3.1 초기 공정평균의 결정

본 절에서는 공정평균의 재설정시간 τ가 주어진 경우 베이즈위험함수를 최소로 하는 초기 공정평균 μ_0을 구한다. $R(\mu_0, \tau)$에서 τ가 고정된 값이므로 베이즈위험함수를 $R_\tau(\mu_0)$로 표시하기로 한다. 초기 공정평균 μ_0를 결정하는 문제는 (11)식을 최소로 하는 μ_0^*를 결정하는 문제가 되기 때문에 $R_\tau(\mu_0)$를 μ_0에 대해 미분하면

$$\frac{\partial R_\tau(\mu_0)}{\partial \mu_0} = C_1 + \frac{C_1(\mu_0 - L) - C_r}{\tau(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\Phi(z_0) - \Phi(z_\tau)]\, d\theta$$

$$- \frac{C_1}{(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \Phi(z_\tau)\, d\theta$$

$$- \frac{\sigma C_1}{\tau(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\phi(z_0) - \phi(z_\tau)]\, d\theta \tag{12}$$

이 된다. (12)식은 $\partial R_\tau(\mu_0)/\partial \mu_0 = 0$ 의 관계로부터

$$C_r - C_1(\mu_0 - L) \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\Phi(z_0) - \Phi(z_\tau)]\, d\theta + C_1 \tau \int_{\theta_L}^{\theta_U} \Phi(z_\tau)\, d\theta$$

$$+ C_1 \sigma \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\phi(z_0) - \phi(z_\tau)]\, d\theta = C_1 \tau (\theta_U - \theta_L) \tag{13}$$

으로 표시된다. 그러므로 (13)식으로부터 μ_0의 최적값을 구하면 된다.

일반적으로 (13)식을 만족하는 유일해가 존재함을 증명하기는 어렵다. 그러나 현실적으로 공정평균을 규격하한 이하인 경우는 고려대상에서 제외할 수 있다는 점을 감안 하다면, $0 \le t \le \tau$ 사이에서는 $z_t \le 0$와 $\phi(z_0) \le \phi(z_\tau)$가 성립함을 알 수 있다. 이를 증명하기 위해 (12)식을 다시 μ_0에 대하여 미분하면

$$\frac{\partial^2 R_\tau(\mu_0)}{\partial^2 \mu_0} = \frac{C_1}{\tau(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\Phi(z_0) - \Phi(z_\tau)]\, d\theta$$

$$+ \frac{C_r}{\sigma \tau(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\phi(z_0) - \phi(z_\tau)]\, d\theta \tag{14}$$

이 된다. (14)식에서 $\phi(z_0) \le \phi(z_\tau)$이고 θ가 음수이기 때문에 모든 μ_0의 값에 대하여 항상 양의 값을 갖는다. 그러므로 (13)식에서 구한 최적해는 유일하게 존재하게 된다.

< 예 제 1 > 시안화 나트륨(Sodium Cyanide)을 생산하는 공장에서 시안화 나트륨의 규격하한(L)이 10(Kg)으로 주어졌을 때 시안화나트륨을 용기에 담는데 있어서 규격하한에 미치지 못하는 제품은 품질비용이 발생되는데 불량처리비용(C_r)은 300이고 생산비용은 C_1이 500이다. 이 공정은 정규분포를 따르며 공정의 표준편차(σ)는 0.5이

다. 평균은 $\mu_t = \mu_0 + \theta t$이며 평균변화율(θ)은 미지이지만 단위시간당 [-0.009σ, -0.001σ]사이에 있다. 또한 공정을 재설정하는데 소요되는 비용(K)은 94000이다. 공정평균의 재설정시간(τ)은 공정평균의 변화율이 가장 큰 경우, 즉 -0.009σ을 기준으로 $\tau \cdot \theta = 3\sigma$($\tau = 333$)인 시점에서 다시 설정한다고 할 때 (13)식을 만족하는 $(\mu_0 - L)/\sigma = z_0 = -0.48$이 되어 $\mu_0 = 10.0 - (-0.48 \times 0.5) = 10.24$이다. 따라서 최적 초기 공정평균은 10.24가 된다.

3.2 초기 공정평균이 설정되어 있을 때 공정평균 재설정 시간의 결정

본 절에서는 초기 공정평균 μ_0가 주어진 경우 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다루고자 한다. $R(\mu_0, \tau)$에서 μ_0는 고정된 값이므로 베이즈위험함수를 $R_{\mu_0}(\tau)$로 표시하기로 한다. 공정평균의 재설정 시간 τ를 결정하기 위해 (8)식에서 주어진 $R_{\mu_0}(\tau)$를 τ에 대해 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\mu_0}(\tau)}{\partial \tau} &= -\frac{K}{\tau^2} + \frac{C_1(\theta_U + \theta_L)}{4} - \frac{C_1}{2(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \theta \Phi(z_\tau)\, d\theta \\ &+ \frac{C_1(L-\mu_0)^2 + 2C_r(L-\mu_0) + C_1\sigma^2}{2\tau^2(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\Phi(z_\tau) - \Phi(z_0)]\, d\theta \\ &+ \frac{C_1\sigma(L-\mu_0) + 2C_r\sigma}{2\tau^2(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\phi(z_\tau) - \phi(z_0)]\, d\theta \\ &+ \frac{C_1\sigma}{2\tau(\theta_U - \theta_L)} \int_{\theta_L}^{\theta_U} \phi(z_\tau)\, d\theta \end{aligned} \tag{15}$$

이 된다. (15)식은 $\partial R_{\mu_0}(\tau)/\partial \tau = 0$ 의 관계로부터

$$\begin{aligned} &2[C_1(L-\mu_0)^2 + 2C_r(L-\mu_0) + C_1\sigma^2] \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\Phi(z_\tau) - \Phi(z_0)]\, d\theta + 2\sigma[C_1(L-\mu_0) \\ &+ 2C_r] \int_{\theta_L}^{\theta_U} \frac{1}{\theta} [\phi(z_\tau) - \phi(z_0)]\, d\theta + 2C_1\tau\sigma \int_{\theta_L}^{\theta_U} \phi(z_\tau)\, d\theta = 4K(\theta_U - \theta_L) - C_1\tau^2 \\ &(\theta_U^2 - \theta_L^2) + 2C_1\tau^2 \int_{\theta_L}^{\theta_U} \theta \Phi(z_\tau)\, d\theta \end{aligned} \tag{16}$$

으로 표시된다. 그러므로 (16)식으로부터 τ의 최적값을 구하면 된다.

공정평균의 재설정 시간 τ의 최적값은 $\partial R_{\mu_0}(\tau)/\partial\tau=0$을 만족하는 τ^*를 구하면 되므로 (16)식에서 구한 τ^*가 유일해 임을 보이기 위해 (15)식을 다시 τ에 대해 미분하면

$$\frac{\partial^2 R_{\mu_0}(\tau)}{\partial^2\tau} = \frac{2K}{\tau^3} - \frac{C_r}{\sigma\tau(\theta_U-\theta_L)}\int_{\theta_L}^{\theta_U}\theta\phi(z_\tau)\,d\theta$$
$$+\frac{C_1(L-\mu_0)^2+2C_r(L-\mu_0)+C_1\sigma^2}{\tau^3(\theta_U-\theta_L)}\int_{\theta_L}^{\theta_U}\frac{1}{\theta}[\Phi(z_0)-\Phi(z_\tau)]\,d\theta$$
$$+\frac{C_1\sigma(L-\mu_0)+2C_r\sigma}{\tau^3(\theta_U-\theta_L)}\int_{\theta_L}^{\theta_U}\frac{1}{\theta}[\phi(z_0)-\phi(z_\tau)]\,d\theta \tag{17}$$

이 된다. (17)식에서 $\Phi(z_0)\le\Phi(z_\tau)$, $\phi(z_0)\le\phi(z_\tau)$이고 θ 〈 0 이기 때문에 (17)식의 두 번째항, 세 번째항과 네 번째항은 모두 양수의 값을 갖는다. 그러므로 $\partial^2 R_{\mu_0}(\tau)/\partial^2\tau$ 가 모든 τ의 값에 대하여 항상 양의 값이다. 따라서 (16)식에서 구한 최적해는 유일한 최적해 임을 알 수 있다.

< 예 제 2 > <예제 1>에서 공정평균 재설정 시간이 주어져 있지 않고 초기공정평균이 설정되었을 때 단위시간당 비용을 최소로 하는 공정평균 재설정 시간을 구하고자 한다. 초기공정평균으로부터 3σ 이상 벗어나면 양품의 비율이 아주 작은 값이 되기 때문에 이를 감안하여 초기공정평균이 10.15로 설정되었을 때 단위시간당 비용을 최소로 하는 공정평균 재설정시간을 구하기 위해 이분법(bisection method)을 이용하여 (16)식을 풀면 $\tau^*=299$을 구할 수 있다. 그러므로 최적 공정평균의 재설정 시간은 299 단위시간된다.

3.3 초기공정평균의 수준과 공정평균 재설정 시간의 결정

본 절에서는 초기 공정평균이나 공정평균의 재설정 시간이 미리 정해져 있지 않은 경우 초기 공정평균과 공정평균의 재설정 시간을 동시에 결정하는 문제를 다루고자 한다. $R(\mu_0,\tau)$은 μ_0와 τ에 대한 함수이므로 $R(\mu_0,\tau)$가 μ_0와 τ에 대해서 위로 오목함수라면 $\partial R(\mu_0,\tau)/\partial\mu_0=0$와 $\partial R(\mu_0,\tau)/\partial\tau=0$을 만족하는 μ_0와 τ가 $R(\mu_0,\tau)$를 최소로 하는 초기 공정평균과 공정평균 재설정 시간이 된다. 방정식 (12)와 (15)의 근을 (μ_0^*,τ^*)라 할 때 이 점에서 $\dfrac{\partial R(\mu_0,\tau)}{\partial\mu_0}=\dfrac{\partial R(\mu_0,\tau)}{\partial\tau}=0$이므로 (μ_0^*,τ^*) 점에서 $\partial^2 R_\tau(\mu_0)/\partial^2\mu_0>0$, $\partial^2 R_{\mu_0}(\tau)/\partial^2\tau>0$임을 알 수 있다.

그러나 (μ_0^*, τ^*)에서의 헤시안 행렬(Hessian matrix)이 양의 정부호(positive definite)임을 해석적으로 보이기가 어려우므로 (11)식을 의미 있는 영역에서 컴퓨터로 분석한 결과 한 점에서 최적해을 얻을 수 있었다. (μ_0^*, τ^*)을 얻기 위한 절차는 (12)식과 (16)식을 동시에 만족하는 해를 결정해야 하므로 우선 초기 공정평균의 값을 얻기 위해 (12)식에 적당한 공정평균의 재설정 시간을 부여하면 (12)식으로부터 초기 공정평균의 값을 얻을 수 있다. 여기서 얻은 초기 공정평균을 (16)식에 대입하면 (16)식으로부터 공정평균의 재설정 시간을 구할 수 있게된다. (12)식과 (16)식을 동시에 만족하는 값을 찾기 위해서는 이러한 절차를 반복 수행하면 최적해로 수렴이 됨을 알 수 있다.

< 예 제 3 > 앞의 <예제 1>에서 공정평균을 재설정하는 시점과 품질특성치의 평균이 명확히 정해진 기준이 없는 경우 단위시간당 기대비용을 최소로 하는 초기 공정평균과 공정평균 재설정 시간을 구하고자 한다. 위에서 설명한 절차를 반복 수행하면 최적해로 수렴이 됨을 알 수 있고 <표 1>은 반복 수행한 결과를 나타낸 것이다. <표 1>로부터 공정평균의 재설정 시간(τ^*)은 309이고 초기 공정평균(μ_0^*)은 10.231을 알 수 있다.

< 표 1 > 초기 공정평균과 공정평균의 재설정 시간의 해

반복	초기 공정평균(μ_0)	공정평균의 재설정 시간(τ)
1	10.24	333
2	10.236	321
3	10.233	315
4	10.231	310
5	10.231	309
6	10.231	309

4. 결론

본 연구에서는 제품의 생산시간에 따라서 공정평균이 변화하지만 정확한 변화율은 모르고 대략적인 범위만을 알고 있을 때, 초기 공정평균과 공정평균의 재설정 시간을 구하는 문제를 다루었다. 공정평균의 변화는 부품, 설비 등의 열화 혹은 헐거워짐 등으로 인해서 공정평균이 증가하거나 감소하는 경우가 존재한다. 이러한 공정평균의 변화는 일정한 변화율을 보이지 않고 매우 다양하게 나타나는 경우가 대부분이다. 그러므로 공정평균의 변화율을 확률변수로 고려하여 본 연구에서는 한 생산사이클 동안에는 품질특성치의 평균이 선형으로 이동하지만 각 생산사이클마다에서는 선형이동율이 변하는 생산시스템을 고려하였다.

제품의 품질특성치가 정규분포를 따르고 제조공정의 분산을 알고 있다는 가정 하에 단위시간당 총 기대비용함수를 모형화하여 이를 손실함수로 고려하고, 공정평균의 변화율에 대한 각 생산사이클에서의 변화율은 균등분포인 경우에 대해 베이즈위험함수를 구하고 이를 최소로 하는 초기 공정평균과 공정평균 재설정 시간을 결정하는 방법을 제시하였다. 초기 공정평균이나 공정평균의 재설정 시간이 미리 정해져 있는 경우에는 해석적으로 최적해가 존재함을 보일 수 있었으나 미리 정해져 있지 않는 경우에는 최적해가 존재함을 해석적으로 보이지는 못했지만 의미 있는 영역에서 수리적으로 분석해본 결과 최적 초기 공정평균과 공정평균의 재설정 시간을 구할 수 있었다. 이 분야에서의 추후연구과제로는 공정평균 이동율(θ)의 분포가 일반분포인 경우로 확장하여 생각할 수 있으며, 공정평균의 변화가 선형이 아닌 비선형인 경우로 확장하여 고려할 수 있을 것으로 사료된다. 또한 본 연구에서는 단지 제품불량으로 인한 손실비용만을 고려하였지만 이와 더불어 공정 평균의 변화에 따라 품질 및 공정능력의 변화를 연계하여 품질에 대한 영향도를 조사할 수 있는 척도를 병용하는 연구가 필요하다고 사료된다. 품질의 변동을 고려하기 위해 비용요소로 손실함수를 사용한 접근방법도 가능하다고 사료된다. 그리고 주요 설비 및 치공구의 가공상태 및 부위를 실시간으로 모니터링하는 첨단 기법을 많이 사용하고 있으므로 이 경우에는 시계열 및 스펙트랄 모형을 사용한 분석도 가능하다.

참고문헌

[1] Arcelus, F.J., Banerjee, P.K.(1985), "Selection of the most economical production plan is a tool-wear process," *Technometrics*, Vol. 27, No. 4, pp. 433-437.

[2] Arcelus, F.J., Banerjee, P.K. and Chandra, R.(1982), "The optimal production run for a normally distributed quality characteristic exhibiting non-negative shifts in the process mean and variance," *IIE Transactions*, Vol. 14, No. 2, pp. 90-98.

[3] Arcelus, F.J., Banerjee, P.K. and Chandra, R.(1985), "The optimal schedule to produce a given number of acceptable parts with a specified confidence level," *International Journal of Production Research*, Vol. 23, No. 1, pp. 185-196.

[4] Billatos, S.B., Bayoumi, A. E., Kendall, L.A. and Saunders, S. C.(1986), "A Statistical Wear Model for Certain Tools Materials with Applications to Machining," *Wear*, Vol. 112, pp. 257-271.

[5] Bisgaard, S,. Hunter, W.G., and Pallesen, L.(1984), "Economic Selection of Quality of Manufactured Product," *Technometrics*, Vol. 26, No. 1, pp. 9-18.

[6] Christer, A.H. and Wang, W.(1992), "A Model of Condition Monitoring of A Production Plant," *International Journal of Production Research*, Vol. 30, No. 9, pp. 2199-2211.

[7] Drezner, Z. and Wesolowsky, G.O.(1989), "Optimal control of a linear trend process with quadratic loss," *IIE Transactions*, Vol. 21, No. 1, pp. 66-72.

[8] Gibra, I.N.(1967), "Optimal control of processes subject to linear trends," *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 18, No. 1, pp. 35-41.

[9] Kamat, S.J.(1976), "A Smoothed Bayes Control Procedure for the Control of a Variable Quality Characteristic with Linear Shift," *Journal of Quality Technology*, Vol. 8, No. 2, pp. 98-104.

[10] Makis, V.(1996), "Optimal tool replacement with asymmetric quadratic loss," *IIE Transactions*, Vol. 28, No. 6, pp. 463-466.

[11] Rahim, M.A. and Banerjee, P.K.(1988), "Optimal production run for a process with random linear drift," *Omega*, Vol. 16, No. 4, pp. 347-351.

[12] Rahim, M.A. and Lashkari, R.S.(1985), "Optimal Decision Rules for Determining the Length of the Production Run," *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 9, No. 2, pp. 195-202.

[13] Schneider, H., O'Cinneide, C. and Tang, K.(1988), "Optimal Control of a Production Process Subject to AOQL Constraint," *Naval Research Logistics*, Vol. 35, pp. 383-395.

[14] Schneider, H., Tang, K. and O'Cinneide, C.(1990), "Optimal control of a production process subject to random deterioration," *Operations Research*, Vol. 38, No. 6, pp. 1116-1122.