응용통계연구 제 11권 1호, 1998년, pp. 185-192

위치모수를 가지는 이변량지수분포의 개발

홍연웅†

요 약

Freund(1961)가 제안한 이변량지수분포는 두 부품으로 이루어진 병렬체계의 상호종속적인 부품의 수명을 해석하는 등에 응용될 수 있어 널리 이용되고 있다. 본 연구에서는 위치모수를 가지는 이변량지수분포를 Freund모형을 일반화시키는 차원에서 제안하고 모형의 통계적 성질 및 모수에 대한 최우추정량을 구하였다. 또한 최우추정량을 수정하여 편의는 감소시킬 수 있는 새로운 추정량을 제안하였다.

1. 서론

두 개의 부품으로 구성된 병렬체계에서 한 부품이 고장나면 고장난 부품이 분담하던 부하가 정상부품에 전가되어 정상부품의 수명에 영향을 미치게 되는데 이러한 체계를 특별히 부하분배체계(shared parallel system)라한다[Kapur와 Lamberson(1977)]. 예를 들면 쌍발엔진을 장착한 비행기나 두 대의 냉각기를 갖춘 냉동시스템 등의 기계체계나 신장, 허파, 안구 등의 쌍을 이루는 생체기관등이 있으며 체계의 구성요소(부품)의 수명은 상호 의존적이라고 할 수 있다.

병렬체계의 수명을 이변량 지수분포로 모형화한 연구에는 여러 가지가 있다. X, Y를 병렬체계를 이루는 두 부품 C_1과 C_2의 수명을 나타내는 확률변수라고 하자. C_1과 C_2의 순간고장률을 각각 α와 β라고 할 때, 부품 C_1이 x에서 먼저 고장나면 C_2는 C_1의 부하를 이전받아 순간고장률이 β에서 β'으로 변화하고 C_2가 y에서 먼저 고장나면 C_1의 순간고장률이 α에서 α'으로 변화하는 경우, Freund(1961)는 X, Y의 결합확률분포를 다음과 같이 유도하였다.

$$g(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta' e^{-\beta' y-(\alpha+\beta-\beta')x}, & 0 < x < y \\ \alpha'\beta e^{-\alpha' x-(\alpha+\beta-\alpha')y}, & 0 < y < x \end{cases} \tag{1.1}$$

위의 모형에서 두 부품은 동시에 고장나지 않는다고 가정한다. 즉 $P(X = Y) = 0$이다. Freund는 식 (1.1)이 무기억성(memoryless property)과 두 개의 주변분포가 지수분포를 가지지 않는데도 이변량지수분포라고 명명했다. Marshall과 Olkin(1967)은 무기억성을 가지면서 주변분포가 지수분포인 이변량분포를 유도하였는데 동시에 두 부품이 고장날 가능성을 포함하고 있다. Block과 Basu(1974)는 주변분포가 지수분포를 가지지 않지만 절대연속(absolute continuity)이며 무기억성을 가지는 이변량지수분포를 제안하였다.

† (750-711) 경북 영주시 풍기읍, 동양대학교 산업공학과 조교수

Weier(1981)는 동일한 두 개의 부품으로 구성된 부하분배체계를 이변량지수분포로 모형화하고 모수 등을 베이즈추정하였는데, 이는 Freund의 부분모형으로 설명될 수 있다. 그러나 언급한 모든 연구들은 체계의 최소수명이 0인 경우를 다루고 있다. 그러나 현실적으로 생산자가 체계의 최소수명을 보증하는 경우가 있거나, 보증하지 않아도 신뢰성 및 품질개선에 대한 노력의 결과 체계의 사용초기에 고장이 발생하는 경우는 거의 없으므로 이러한 관점에서 최소수명이 0이라는 가정은 보편성이 없다고 할 수 있으며, 더욱이 양의 최소수명을 반영할 수 있는 이변량 지수분포는 전무한 실정이다.

본 연구에서는 두 개의 모수를 가지는 지수분포에 기초하여 최소수명이 보증되며, 고장난 부품의 교체가 불가능한 이중부품 부하분배체계의 수명분포를 이변량지수모형(bivariate exponential model)으로 개발하고자한다. 아울러 개발된 모형의 통계적 성질을 검토하고, 모수의 최우추정량을 구하며 이를 수정하여 추정량의 편의를 감소시키는 수정된 최우추정량과 불편추정량을 제안함을 주요 내용으로 한다.

2. 모형의 개발

X^*를 C_2가 고장나는 즉시 동일한 C_2로 교체할 경우의 C_1의 수명을 나타내는 확률변수, Y^*를 C_1이 고장나는 즉시 동일한 C_1으로 교체할 경우의 C_2의 수명을 나타내는 확률변수라하고, 체계의 최소수명을 μ라고 하면 체계를 구성하는 부품의 수명도 최소한 μ가 되므로 X^*와 Y^*는 다음과 같이 공통의 위치모수 μ를 가지는 서로 독립인 지수분포가 된다.

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \alpha \exp\{-\alpha(x^* - \mu)\}, \quad x^* > \mu \\ f(y^*) &= \beta \exp\{-\beta(y^* - \mu)\}, \quad y^* > \mu \end{aligned} \tag{2.1}$$

X와 Y를 고장난 부품을 교체하지 않을 때 C_1과 C_2의 수명을 나타내는 확률변수라고하자. 위치모수가 없을 때 식 (1.1)을 유도한 Freund(1961)의 유도방법을 식 (2.1)에 대하여 적용하면 위치모수가 있는 경우 결합확률밀도함수를 다음과 같이 유도할 수 있다(대문자는 확률변수이며 이것에 대응하는 소문자는 실현치를 나타냄).

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta' e^{-\beta'(y-\mu)-(\alpha+\beta-\beta')(x-\mu)}, & \mu < x < y \\ \alpha'\beta e^{-\alpha'(x-\mu)-(\alpha+\beta-\alpha')(y-\mu)}, & \mu < y < x \end{cases} \tag{2.2}$$

여기서 $\mu = 0$이면 식 (2.2)는 식 (1.1)과 동일함을 알 수 있으며 고장난 부품을 교체하지 않는 경우의 체계를 구성하는 상호종속인 두 부품의 수명을 나타내는 확률모형이다.

식 (2.2)로부터 X, Y의 주변확률밀도함수를 유도하면,

1) $\alpha + \beta - \alpha' \neq 0$인 경우;

$$f_X(x) = \frac{(\alpha - \alpha')(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - \alpha'} e^{(\alpha+\beta)(x-\mu)} + \frac{\alpha'\beta}{\alpha + \beta - \alpha'} e^{-\alpha'(x-\mu)} \tag{2.3}$$

2) $\alpha + \beta - \beta' \neq 0$인 경우;

$$f_Y(y) = \frac{(\beta - \beta')(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - \beta'} e^{(\alpha+\beta)(y-\mu)} + \frac{\alpha\beta'}{\alpha + \beta - \beta'} e^{-\beta'(y-\mu)} \tag{2.4}$$

3) $\alpha+\beta-\alpha'=0$인 경우;

$$f_X(x)=\{\alpha+\alpha'\beta(x-\mu)\}e^{-\alpha'(x-\mu)} \tag{2.5}$$

4) $\alpha+\beta-\beta'=0$인 경우;

$$f_Y(y)=\{\beta+\alpha\beta'(y-\mu)\}e^{-\beta'(y-\mu)}. \tag{2.6}$$

특히 $\alpha=\alpha'$이고 $\beta=\beta'$이면 X와 Y는 독립이 되고 각각의 주변분포는 다음과 같다.

$$f_X(x)=\alpha e^{-\alpha(x-\mu)}, \quad f_Y(y)=\beta e^{-\beta(y-\mu)} \tag{2.7}$$

식 (2.3) - (2.7)에서 $\mu=0$라고 하면 식 (1.1)에 대응하는 각각의 주변분포와 같음을 알 수 있다.

3. 통계적 성질 및 모수 추정

본 절에서는 위치모수를 가지는 이변량지수분포의 적률생성함수 및 적률을 유도하고, 모수의 최우추정량과 이들의 성질에 대하여 검토한다.

3.1. 적률생성함수 및 적률

적률생성함수는

$$m(s,t)=\int\int \exp(sx+ty)f(x,y)dxdy \tag{3.1}$$

이므로 식 (2.2)를 식 (3.1)에 대입하여 정리하면

$$m(s,t)=\frac{\alpha+\beta}{1-\frac{s+t}{\alpha+\beta}}\left\{\frac{\beta}{1-\frac{s}{\alpha'}}+\frac{\alpha}{1-\frac{t}{\beta'}}\right\}\exp\{\mu(s+t)\} \tag{3.2}$$

이 됨을 알 수 있고, 각항을 급수 전개하여 다시 쓰면

$$\begin{aligned} m(s,t) &= (\alpha+\beta)\left\{1+\frac{s+t}{\alpha+\beta}+\left(\frac{s+t}{\alpha+\beta}\right)^2+\cdots\right\} \\ &\times\left\{\beta\left[1+\frac{s}{\alpha'}+\left(\frac{s}{\alpha'}\right)^2\right]+\alpha\left[1+\frac{t}{\beta'}+\left(\frac{t}{\beta'}\right)^2+\cdots\right]\right\} \\ &\times\left\{1+\frac{\mu s}{1!}+\frac{(\mu s)^2}{2!}+\cdots\right\}\left\{1+\frac{\mu t}{1!}+\frac{(\mu t)^2}{2!}+\cdots\right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

이 되므로 식 (3.3)으로부터 적률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\alpha'+\beta}{\alpha'(\alpha+\beta)}+\mu, \qquad E(Y)=\frac{\alpha+\beta'}{\beta'(\alpha+\beta)}+\mu \\ Var(X) &= \frac{\alpha'^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha'^2(\alpha+\beta)^2}, \qquad Var(Y)=\frac{\beta'^2+2\alpha\beta+\alpha^2}{\beta'^2(\alpha+\beta)^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{\alpha'\beta' - \alpha\beta}{\alpha'\beta'(\alpha+\beta)^2}$$

3.2. 모수의 추정

부품단위의 수명시험자료는 두 부품간 상호종속성을 반영하지 못하므로 모수의 추정량을 구하기 위해서는 체계단위의 수명시험자료가 있어야 한다. 식 (2.2)를 따르는 n개의 체계를 수명시험하여 C_1이 먼저 고장난 체계의 수를 확률변수 N_1, i번째 체계를 구성하는 두 부품의 고장시각을 (X_i, Y_i)라고 하면 우도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L \;&= (\alpha\beta')^{n_1}(\alpha'\beta)^{n-n_1}\exp\{-(\alpha+\beta-\beta')\sum_{x_i<y_i}(x_i-\mu) \\ &-\beta'\sum_{x_i<y_i}(y_i-\mu) - \alpha'\sum_{x_i>y_i}(x_i-\mu) - (\alpha+\beta-\alpha')\sum_{x_i>y_i}(y_i-\mu). \end{aligned} \tag{3.5}$$

또한 $V_i = \min(X_i, Y_i), V_{(1)} \le V_{(2)} \le \cdots \le V_n$이라 하면 식 (3.5)로부터 모수의 최우추정량은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{N_1}{\sum_{X_i<Y_i}(X_i - V_{(1)}) + \sum_{X_i>Y_i}(Y_i - V_{(1)})} \\ \hat{\beta} &= \frac{n - N_1}{\sum_{X_i<Y_i}(X_i - V_{(1)}) + \sum_{X_i>Y_i}(Y_i - V_{(1)})} \\ \hat{\alpha}' &= \frac{n - N_1}{\sum_{X_i<Y_i}(X_i - V_{(1)}) + \sum_{X_i>Y_i}(Y_i - V_{(1)})} \\ \hat{\beta}' &= \frac{N_1}{\sum_{X_i<Y_i}(X_i - V_{(1)}) + \sum_{X_i>Y_i}(Y_i - V_{(1)})} \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\hat{\mu} = V_{(1)}. \tag{3.7}$$

식 (3.7)을 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{N_1}{\sum_{i=2}^{n}(V_{(i)} - V_1)}, \qquad & \hat{\beta} &= \frac{n - N_1}{\sum_{i=2}^{n}(V_{(i)} - V_{(1)})} \\ \hat{\alpha}' &= \frac{n - N_1}{\sum_{X_i>Y_i}(X_i - Y_i)}, \qquad & \hat{\beta}' &= \frac{N_1}{\sum_{X_i<Y_i}(Y_i - X_i)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

확률밀도함수가 $g(x) = b^a x^{a-1}\exp(-bx)/\Gamma(a), x > 0$인 감마분포를 $Gam(a,b)$로 나타낼 때, C_1이 C_2보다 먼저 고장날 확률이 $P(X < Y) = \alpha/(\alpha+\beta)$이므로 식 (3.8)의 $\hat{\alpha}$식에서 N_1은 모수 n과 $\alpha/(\alpha+\beta)$를 가지는 이항분포를 따르고, $\sum_{i=2}^{n}$는 $Gam(n-1, \alpha+\beta)$를 따르며

N_1과 독립이므로 $\hat{\alpha}$의 기대치와 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[\hat{\alpha}] &= E[N_1]\cdot E[1/\sum(V_{(i)}-V_{(1)})] \\ &= \frac{n}{n-2}\alpha, \qquad n>2 \qquad (3.9)\\ Var[\hat{\alpha}] &= \frac{n^2\alpha^2+n(n-2)\alpha\beta}{(n-2)^2(n-3)}, \qquad n>3. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

C_1이 C_2보다 먼저 고장났을 때 C_2의 수명분포는

$$f_2(y)=\beta' e^{-\beta'(y-x)}, \quad 0<x<y \qquad (3.11)$$

이므로, N_1이 n_1으로 주어지면 $\sum_{i=1}^{n_1}(Y_i-x_i)$는 식 (3.11)의 분포를 따르는 독립인 지수확률변수의 n_1 합성(convolution)이므로 $\hat{\beta}'$의 기대값과 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}'] &= \frac{n_1}{n_1-1}\beta', \qquad n_1>1 \qquad (3.12)\\ Var[\hat{\beta}'] &= \frac{n_1^2}{(n_1-1)^2(n_1-2)}\beta'^2, \qquad n_1>2 \qquad (3.13)\end{aligned}$$

식 (3.12)로부터 β'의 불편추정량은 $(n_1-1)\hat{\beta}'/n_1$ 이다. $\hat{\alpha}'$의 기대값과 분산은 식 (3.12)와 식 (3.13)에서 n_1과 β' 대신에 $n-n_1$과 α'을 대입하여 얻을 수 있고, α'의 불편추정량은 $(n-n_1-1)\hat{\alpha}'/(n-n_1)$임을 알 수 있다. 또한 $\hat{\mu}=V_{(1)}$의 분포는 순간고장률이 $n(\alpha+\beta)$인 지수분포를 따르므로 기대치와 분산은

$$\begin{aligned} E[\hat{\mu}] &= \mu+\{n(\alpha+\beta)\}^{-1}, \qquad (3.14)\\ Var[\hat{\mu}] &= \{n(\alpha+\beta)\}^{-2}, \qquad (3.15)\end{aligned}$$

이다. 만약 식 (3.14)에서 α와 β를 알고 있다면 $V_{(1)}-\{n(\alpha+\beta)\}^{-1}$가 μ의 불편추정량이됨을 알 수 있다. α와 β를 모르는 경우에는 이들의 최우추정량 $\hat{\alpha}$과 $\hat{\beta}$을 대입하여 μ의 새로운 추정량 $\hat{\hat{\mu}}$을 다음과 같이 얻고 이를 수정된 최우추정량이라하자.

$$\hat{\hat{\mu}}=V_{(1)}-\{n(\hat{\alpha}+\hat{\beta})\}^{-1} \qquad (3.16)$$

한편 식 (3.8)로부터 $1/(\hat{\alpha}+\hat{\beta})=\sum_{i=2}^{n}(V_{(i)}-V_{(1)})/n$이므로

$$\begin{aligned} E[1/(\hat{\alpha}+\hat{\beta})] &= (n-1)/\{n(\alpha+\beta)\},\\ Var[1/(\hat{\alpha}+\hat{\beta})] &= (n-1)/\{n^2(\alpha+\beta)^2\}\end{aligned}$$

이다. 따라서 수정된 최우추정량의 기대치와 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[\hat{\hat{\mu}}] &= \mu+\{n^2(\alpha+\beta)\}^{-1} \qquad (3.17)\\ Var[\hat{\hat{\mu}}] &= Var[V_{(1)}]+var[1/n(\hat{\alpha}+\hat{\beta})]\\ &= \frac{n^2+n-1}{n^4(\alpha+\beta)^2}. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

식 (3.14)와 식 (3.17)을 비교하면 $\hat{\hat{\mu}}$의 편의는 $\hat{\mu}$의 편의보다 $(n-1)/\{n^2(\alpha+\beta)\}$만큼 작고, 식 (3.15)와 식 (3.18)을 비교하면 $\hat{\hat{\mu}}$의 분산은 $\hat{\mu}$의 분산보다 $(n-1)/\{n^4(\alpha+\beta)^2\}$만큼 큼을 알 수 있다. 또한 식 (3.16)과 식 (3.17)로부터 μ의 불편추정량과 그 분산이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\tilde{\mu} = V_{(1)} - \{(n-1)(\hat{\alpha}+\hat{\beta})\}^{-1} \quad (3.19)$$

$$Var[\tilde{\mu}] = 1/\{n(n-1)(\alpha+\beta)^2\} \quad (3.20)$$

식 (3.14), (3.17), (3.19)로부터 $bias[\hat{\mu}] > bias[\hat{\hat{\mu}}] > bias[\tilde{\mu}] = 0$임을 알 수 있고 식 (3.15), (3.18), (3.20)으로부터 $Var[\hat{\mu}] < Var[\hat{\hat{\mu}}] < Var[\tilde{\mu}]$ 의 관계가 있음을 알 수 있다.

4. 수치예제

본 절에서는 모의실험자료를 이용하여 3절에서 유도한 다섯 가지 모수의 최우추정치 및 수정된 최우추정치를 구한다. 제안된 이변량지수분포를 따르는 확률표본을 생성하는 절차는 다음과 같다. $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \mu = \mu_0$로 주어졌을 때 식 (2.1)의 단변량지수분포를 따르는 난수 x^*와 y^*를 생성한다. 만약 $x^* < y^*$이면 $\beta' = \beta_0', \mu = 0$인 단일변량지수분포를 따르는 난수 z_1를 생성시켜 $x = x^*, y = x + z_1$이라 하면 (x, y)는 $\mu < x < y$일 때 식 (2.2)를 따르게 된다. 만약 $x^* > y^*$이면 $\alpha' = \alpha_0', \mu = 0$인 지수분포를 따르는 난수 z_2를 생성시켜 $y = y^*, x = y + z_2$라하면 (x, y)는 $\mu < y < x$일 때 식 (2.2)를 따름을 알 수 있다. 이와 같은 방법으로 $\alpha = 0.1, \beta = 0.2, \alpha' = 0.22 \beta' = 0.25, \mu = 5$에 대하여 크기 10의 이변량 난수를 생성하면 다음과 같다; (5.3436, 8.2898), (8.1485, 7.6633), (7.6623, 9.3290), (10.6328, 11.3952), (6.6862, 9.7817), (27.1153, 13.1286), (5.1290, 6.7930), (10.2603, 9.6447), (6.0940, 8.8466), (14.6534, 16.5897). 이 자료를 이용하여 모수의 최우추정치를 구하면 다음과 같다; $\hat{\alpha} = 0.1980, \hat{\beta} = 0.0849, \hat{\alpha}' = 0.1988, \hat{\beta}' = 0.4722, \hat{\mu} = 5.1290, \hat{\hat{\mu}} = 4.7755, \tilde{\mu} = 4.7362$. 모든 추정치의 편의가 매우 크게 나타남을 알 수 있는데, 이는 표본의 크기가 작은 영향도 있겠지만 보다 자세한 원인은 추가적으로 연구되어야할 것이다.

5. 맺음말

최소수명을 보증하는 이중부품병렬체계의 상호 종속적인 두 부품의 수명을 이변량지수분포로 모형화하였다. 즉 제안된 모형은 위치모수 μ를 포함하는 이변량지수분포인데 이는 Freund 모형에 위치모수를 추가한 형태로 표현되며, μ를 알 경우 Freund모형과 동일하다. 또한 모형의 여러 가지 통계적 성질과 다섯 개의 모수 $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \mu$에 대한 최우추정량을 구하였다.

참고문헌

[1] Block, H.W. & Basu, A. P. (1974). A Continious Bivariate Exponential Extension. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, 1031-1037.

[2] Freund, J. E. (1961). A Bivariate Extension of the Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 56, pp. 971-977.

[3] Kapur, K. C. & Lamberson, L. R. (1977). *Reliability in Engineering Design*, John Wiley & Sons, New York.

[4] Marshall, A. W. & Olkin, I. (1967). A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 62, 30-40.

[5] Weier, D. R. (1981). Bayes Estimation for a Bivariate Survival Model Based on Exponential Distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 10, pp. 1415-1427.

[1997년 8월 접수, 1997년 12월 최종수정]

A Bivariate Extension of the Two-parameter Exponential Distribution

Yeon Woong Hong †

ABSTRACT

A bivariate extension of the two-parameter exponential distribution is proposed as a model for certain problems in system level life testing. In particular, it applies to two-component shared parallel systems having a minimum guarantee time. Various statistical properties of the model are investigated, including maximum likelihood estimators(MLEs), modified MLEs, and unbiased estimators of the parameters and their distributions.

† Assistant Professor, Dept. of Industrial Engineering, Dongyang University, Youngju City, Kyungpuk 750-800, Korea.