

지진하중을 받는 축대칭 프리스트레스트 셸 구조물의 동적해석

Dynamic Analysis of Axisymmetric Prestressed Shell Structures Subjected to Seismic Excitations

황 철 성*

Hwang, Chul Sung

국문요약

본 논문에서는 축대칭 셸 구조물에서 자오방향과 주변방향의 프리스트레스트하중이 작용될 경우에 대한 수학적 모델링을 구하였고, 이에 대한 프로그램화를 통하여 지진하중을 주하중으로 한 동적해석을 실시하였다. 이때 기하학적으로 축대칭인 구조물의 특성을 최대한으로 이용할 수 있도록 셸을 링요소로 모델링하였으며, 기하학적 비선형관계식에 의하여 동적 모형식을 유도하였다. 프로그램을 통하여 해석한 결과를 프리스트레스트하중 하에서 고유진동수에 대한 정해와 비교한 결과 20개정도의 링요소로 모델링한 경우에서도 정해와 근접한 해를 얻을 수 있었다. 또한 지진하중에 대한 반경방향의 처짐을 해석한 결과 동일한 크기의 프리스트레스트하중이 작용될 때 자오방향의 프리스트레스트하중이 작용될 경우가 다소 큰 처짐값을 나타내었다. 본 연구를 통하여 개발된 모델은 지진하중 하에서의 축대칭 구조물에 대하여 3차원 구조해석을 실시하지 않아도 정해에 근접한 해석결과를 얻을 수 있어 설계실무에 크게 활용될 수 있을 것이다.

주요어 : 지진하중, 축대칭 셸, 프리스트레스트 하중

ABSTRACT

An axisymmetric shell element which includes the effects of the meridional and circumferential cable prestresses is developed. It is coded for personal computer by the maximum use of axisymmetric properties and the dynamic analysis is performed under the seismic excitations. A ring element is used to fully utilize the characteristics of the axisymmetric shell. The eigenvalue solutions using 20 elements under the initial prestresses are in good agreement with the exact solutions. The results of the seismic analysis show that the radial deflection under the meridional prestress is a little larger than that under the circumferential prestress. The finite element model developed in this study can be very useful to the design applications.

Key words : seismic load, axisymmetric shell, cable prestress

1. 서 론

셸은 원자력 발전소, 해양구조물 및 항공우주구조물 등에서 가장 널리 사용되는 구조물 형태 중의 하나이다. 액체저장 탱크, 원자력 발전소의 핵 연료 구조물, 해양구조물 등 대부분의 셸 구조물은 재료의 효율적인 이용, 해석

의 정확성, 시공의 편리함 등과 다양한 외력에 대한 저항능력을 고려하여 축대칭 구조로 건설하고 있다. 이 때, 구조물의 효율적인 설계를 위하여 링보강을 하는 것이 보통이고, 콘크리트를 사용하는 경우에는 구조물의 응력 및 외벽의 균열을 감소시키기 위해 일반적으로 프리스트레스트를 도입하게 된다. 이 경우 동적 거동은 초기응력이 작용되지 않을 때와는 커다란 차이를 나타낸다. 실 예로 셸내부에 인장

* 정희원 · 경원대학교 토목공학과 교수

강도의 0.2%정도의 초기응력이 작용될 때 기본진동수가 10%정도 증가함을 문헌⁽¹⁾은 밝히고 있다. 또한, 셸내부의 프리스트레스 효과는 균열의 감소와 부식의 방지뿐만 아니라 셸의 하중재하 한계도 크게 증가함을 증명하고 있다.

그러나 지진하중등의 축대칭하중이 아닌 경우는 일반적인 구조해석 프로그램으로 해석할 경우 매우 많은 자유도를 요구하고, 이의 모델링 과정과 결과에 대한 분석 시 많은 시간과 노력이 들어 인적 물적 낭비를 가져왔으며, 이의 동적 모델은 단순화한 1차원 모델에 의해 근사화하거나 대형 컴퓨터에 의한 3차원 구조해석에 의존하고 있다.

본 연구에서는 프리스트레스트 셸 구조물에 대한 수학적 모델을 제시하였으며, 이에 대한 지진하중을 주하중으로 한 축대칭 셸구조물의 동적거동을 구하였다.

특히 셸 요소를 링요소로 모델화하였으며, Sanders⁽²⁾에 의해 제안된 비선형 셸 이론을 사용하여 기하학적 비선형성을 고려하였으며, 재료적 비선형성은 고려하지 않았다.

2. 축대칭 프리스트레스트 셸 요소

2.1 셸 요소의 형상 및 기호 정의

축 대칭 셸 요소는 축 대칭의 회전 링 요소로 정의한다. 그림 1은 i, j 절점의 링 요소의 중립면을 나타낸 그림이다. 하중은 축 대칭으로 정의하지 않았으므로 변위 v 도 존재한다. 중립면 상의 임의의 점은 국지좌표(s, θ)로 표시하며, 이 때 s 는 i 절점으로부터 자오방향의 중립면을 따른 거리이며, θ 는 기준축에 대한 회전각을 뜻한다. 변위는 자오방향, 주변방향 및 반경방향을 각각 u, v, w 로 표시하며 β_s 는 자오방향의 회전각을 나타낸다. 본 연구에서는 위와 같이 8 자유도의 셸 요소를 사용하였으며 이를 $\{u_i, v_i, w_i, \beta_{s,i}, u_j, v_j, w_j, \beta_{s,j}\}$ 로 나타낸다. 또한, 중립면상의 임의의 점에 대한 회전축으로부터 수직거리를 r 로 표시하며, 같은 점에서의 점선과 회전축사이의 각을 ϕ 로 나타낸다.

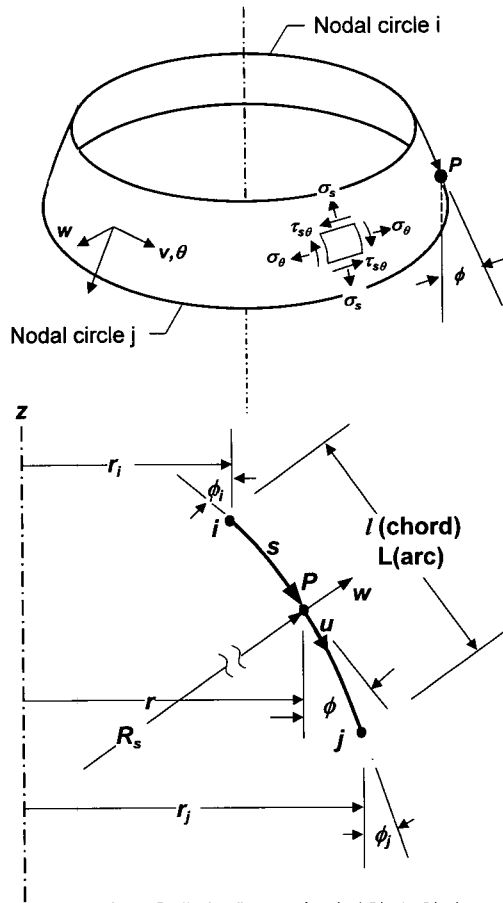


그림 1 축대칭 셸요소의 기하학적 형상

주변방향과 자오방향의 주곡률반경을 각각 R_θ, R_s 로 표시하면 다음과 같은 기하학적 관계를 얻을 수 있다.

$$R_\theta = \frac{r}{\cos \phi}; \frac{d\phi}{ds} = -\frac{1}{R_s}; \frac{dr}{ds} = \sin \phi; \frac{dz}{ds} = -\cos \phi \quad (1)$$

식 (1)에서 ϕ 를 s 로 표현하면 다음과 같다.

$$\phi = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \quad (2)$$

이 때, a_0, a_1 및 a_2 는 다음과 같은 경계조건으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} s=0 \text{ 일때 } & \phi = \phi_i \\ s=L \text{ 일때 } & \phi = \phi_j \end{aligned}$$

$$\int_0^L \sin(\phi - \phi_c) ds \cong \int_0^L (\phi - \phi_c) ds = 0 \quad (3)$$

이 때, c 는 i 와 j 절점을 잇는 현의 회전축과의 각을 나타내며, $\tan \phi_c = (r_j - r_i) / (z_j - z_i)$ 의 관계를 가진다.

식 (3)의 경계조건에 의해 a_0 , a_1 및 a_2 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_0 &= \phi_i \\ a_1 &= \frac{6\phi_c - 4\phi_i - 2\phi_j}{L} \\ a_2 &= \frac{3\phi_i + 3\phi_j - 6\phi_c}{L^2} \end{aligned} \quad (4)$$

이 때, L 은 i 에서 j 까지의 중립면을 따른 호의 길이이며, 보의 처짐식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L \cong l + \int_0^L \frac{w, x^2}{2} dx = l + l \cdot \frac{2\varphi_i^2 - \varphi_i \cdot \varphi_j + 2\varphi_j^2}{30} \quad (5)$$

이 때, $\varphi_i = \phi_i - \phi_c$, $\varphi_j = \phi_j - \phi_c$ 이다.

같은 방법으로 $\phi = \phi_c + \varphi$ 임을 고려 할때 반경 r 은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} r &= r_i + \int_s^0 \sin \phi ds \cong r_i + s \cdot \sin \phi_c + \cos \phi_c \cdot \int_0^X \phi dX \\ &\cong r_i + \frac{a_0 l^2 s \cos \phi_c}{L^2} - \frac{\phi_c l^2 s \cos \phi_c}{L^2} \\ &\quad + \frac{a_1 l^3 s^2 \cos \phi_c}{2L^3} + \frac{a_2 l^4 s^3 \cos \phi_c}{3L^4} + s \sin \phi_c \end{aligned} \quad (6)$$

이 때, $X = sl/L$ 이며, s 에 대응하는 현의 길이이다.

2.2 셸 이론의 가정

셸에 대한 가정은 Love의 이론을 개선하여 Sanders⁽²⁾가 제안한 다음과 같은 가정을 사용한다.

- ① 셸은 반경에 비해 두께가 매우 얇다.
- ② 셸의 변위는 반경에 비해 매우 작다.
- ③ 횡단수직응력은 매우 작다.
- ④ 변형전 중립면에 수직한 면은 변형 후에도 수직을 유지한다.

2.3 셸 요소의 매트릭스

2.3.1 셸 요소의 변형 에너지

셸 요소에 축적되는 변형 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$U_s = (1/2) \int_V (\bar{\sigma}_s \bar{\epsilon}_s + \bar{\sigma}_\theta \bar{\epsilon}_\theta + \bar{\sigma}_\xi \bar{\epsilon}_\xi + \bar{\sigma}_{s\theta} \bar{\epsilon}_{s\theta} + \bar{\sigma}_{\xi s} \bar{\epsilon}_{\xi s} + \bar{\sigma}_{\xi \theta} \bar{\epsilon}_{\xi \theta}) dV \quad (7)$$

가정 ③,④에 의해서 횡단응력과 전단응력이 무시되며, 두께에 따라 선형의 변형도 변화를 가정하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_s &= \epsilon_s + \xi x_s \\ \bar{\epsilon}_\theta &= \epsilon_\theta + \xi x_\theta \\ \bar{\epsilon}_{s\theta} &= \epsilon_{s\theta} + \xi x_{s\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

이 때, ϵ_s , ϵ_θ , 및 $\epsilon_{s\theta}$ 는 중립축에서의 변형도 및 전단변형도를 뜻하고, x_s , x_θ 및 $x_{s\theta}$ 는 중립축의 곡률변화량과 비틀변화량을 뜻하며, ξ 는 중립면상의 임의의 점으로부터 수직거리를 의미한다.

식 (8)과 응력-변형도 관계를 식 (7)에 대입하고, 두께방향으로 적분을 실시하면 변형에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} U_s &= (1/2) \int_0^L \int_0^{2\pi} (C_1 \epsilon_s^2 + C_2 \epsilon_\theta^2 + 2V_{s\theta} C_1 \epsilon_s \epsilon_\theta + G_1 \epsilon_{s\theta}^2 \\ &\quad + D_1 x_s^2 + D_2 x_\theta^2 + 2V_{s\theta} D_1 x_s x_\theta + G_2 x_{s\theta}^2) r d\theta ds \end{aligned} \quad (9)$$

이 때, $C_1 = E_s h / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$

$$C_2 = E_\theta h / (1 - \nu_{\theta s} \nu_{s\theta})$$

$$D_1 = E_s h^3 / 12(1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

$$D_2 = E_\theta h^3 / 12(1 - \nu_{\theta s} \nu_{s\theta})$$

$$G_1 = G h$$

$$G_2 = G h^3 / 12$$

여기서, Sanders⁽²⁾에 의해 제안된 비선형 셸 이론에 의해 변형도는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{s(NL)} &= \epsilon_{s(L)} + (1/2)(\beta_{s(L)}^2 + \beta_{(L)}^2) \\ \epsilon_{\theta(NL)} &= \epsilon_{\theta(L)} + (1/2)(\beta_{\theta(L)}^2 + \beta_{(L)}^2) \\ \epsilon_{s\theta(NL)} &= \epsilon_{s\theta(L)} + (\beta_{s(L)}\beta_{\theta(L)}) \end{aligned} \quad (10)$$

이 때, β_s , β_θ 및 β 는 각각 자오방향, 주변방향 및 반경방향의 회전각을 뜻하며, 아래첨자 (L)은 선형이론에 의한 값이고, (NL)은 비선형이론에 의한 값을 뜻한다. 표현을 간단히 하기 위해 (L)은 생략하고, 변형도 벡터 $\{\epsilon\}$ 를 초기 변형도 $\{\epsilon^i\}$ 와 동적하중에 의한 부가변형도 $\{\epsilon^a\}$ 로 나누어 식 (10)을 식 (9)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_s &= (1/2) \int_0^L \int_0^{2\pi} [C_1 \{(\epsilon_s^i)^2 + 2\epsilon_s^i \epsilon_s + \epsilon_s^i \beta_s^2 + \epsilon_s^i \beta^2 + \epsilon_s^2\} \\ &+ C_2 \{(\epsilon_\theta^i)^2 + 2\epsilon_\theta^i \epsilon_\theta + \epsilon_\theta^i \beta_\theta^2 + \epsilon_\theta^i \beta^2 + \epsilon_\theta^2\} \\ &+ 2v_{s\theta} C_1 \{ \epsilon_s^i \epsilon_\theta^i + \epsilon_s^i \epsilon_\theta + \epsilon_\theta^i \epsilon_s + \frac{1}{2} \epsilon_s^i (\beta_\theta^2 + \beta^2) \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon_\theta^i (\beta_s^2 + \beta^2) + \epsilon_s \epsilon_\theta \} \\ &+ G_1 \{(\epsilon_{s\theta}^i)^2 + 2\epsilon_{s\theta}^i \epsilon_{s\theta} + 2\epsilon_{s\theta}^i \beta_s \beta_\theta + \epsilon_{s\theta}^2\} \\ &+ D_1 \{ (x_s^i)^2 + 2x_s^i x_s + x_s^2 \} + D_2 \{ (x_\theta^i)^2 + 2x_\theta^i x_\theta \\ &+ x_\theta^2 \} + 2v_{s\theta} D_1 \{ x_s^i x_\theta^i + x_s^i x_\theta + x_\theta^i x_s + x_s x_\theta \} \\ &+ G_2 \{ (x_{s\theta}^i)^2 + 2x_{s\theta}^i x_{s\theta} + x_{s\theta}^2 \}] r \, d\theta \, ds \quad (11) \end{aligned}$$

이 때, 초기변형도는 주변방향으로 일정한 상수이고, 초기변형도만으로 구성된 2차항 $(\epsilon_s^i)^2$, $(\epsilon_\theta^i)^2$ 및 $(\epsilon_s^i \epsilon_\theta^i)$ 등은 변분과정에서 소거된다.

회전링 요소의 변위에 대한 가정은 Tillerson과 Haisler⁽³⁾이 사용한 형태와 같은 값으로 정하였다.

$$\begin{aligned} w(s) &= \sum_n (\alpha_1^n + \alpha_2^n s + \alpha_3^n s^2 + \alpha_4^n s^3) \cos n\theta = \sum_n w^n(s) \cos n\theta \\ u(s) &= \sum_n (\alpha_5^n + \alpha_6^n s + \alpha_7^n s(s-L) + \alpha_8^n s^2(s-L)) \cos n\theta = \sum_n u^n(s) \cos n\theta \\ v(s) &= \sum_n (\alpha_7^n + \alpha_8^n s + \alpha_{11}^n s(s-L) + \alpha_{12}^n s^2(s-L)) \sin n\theta = \sum_n v^n(s) \sin n\theta \\ \beta_s(s) &= \sum_n \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) u = \sum_n \beta_s^n(s) \cos n\theta \end{aligned} \quad (12)$$

이 때, $\alpha_1 - \alpha_{12}$ 는 일반좌표계의 값이고, 이는 쉘 요소의 경계조건으로부터 절점변위와의 변환관계를 얻을 수 있다.

또한 부가변형도, 곡률변화 및 회전각을 주변각 θ 에 관한 Fourier Series로 다음과 같이

표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \sum_n e_s^n(s) \cos n\theta \\ \epsilon_\theta &= \sum_n e_\theta^n(s) \cos n\theta \\ \epsilon_{s\theta} &= \sum_n e_{s\theta}^n(s) \sin n\theta \\ \kappa_s &= \sum_n k_s^n(s) \cos n\theta \\ \kappa_\theta &= \sum_n k_\theta^n(s) \cos n\theta \\ \kappa_{s\theta} &= \sum_n k_{s\theta}^n(s) \sin n\theta \\ \beta_s &= \sum_n b_s^n(s) \cos n\theta \\ \beta_\theta &= \sum_n b_\theta^n(s) \sin n\theta \\ \beta &= \sum_n b^n(s) \sin n\theta \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)을 식 (12)에 대입하고, 주변각에 관해 적분하면 변형에너지는 초기변형에너지와 부가변형에너지의 합으로 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned} U_s &= U_s^i + U_s^a \\ U_s^a &= (\pi/2) \int_0^L [C_1 (e_s^n)^2 + C_2 (e_\theta^n)^2 + 2v_{s\theta} C_1 e_s^n e_\theta^n + G_1 (e_{s\theta}^n)^2 \\ &+ D_1 (k_s^n)^2 + D_2 (k_\theta^n)^2 + 2v_{s\theta} D_1 k_s^n k_\theta^n + G_2 (k_{s\theta}^n)^2] r \, ds \\ U_s^i &= (\pi/2) \int_0^L [C_1 e_s^i ((b_s^n)^2 + (b^n)^2) + C_2 e_\theta^i ((b_\theta^n)^2 + (b^n)^2) \\ &+ v_{s\theta} C_1 \{ \epsilon_s^i ((b_\theta^n)^2 + (b^n)^2) + \epsilon_\theta^i ((b_s^n)^2 + (b^n)^2) \}] r \, ds \end{aligned} \quad (14)$$

2.3.2 프리스트레스트 케이블의 변형에너지

프리스트레스트 케이블을 사용할 경우 프리스트레스트 케이블에 의한 변형에너지를 고려해야 하며, 이를 위한 가정은 다음과 같다.

- ① 케이블에 의한 하중은 중립면을 따라 작용한다.
- ② 케이블과 쉘 사이에 발생하는 마찰력은 무시한다.
- ③ 케이블의 변위는 쉘의 중립면에서 발생하는 변위와 같은 값이다.
- ④ 케이블의 인장력에 의한 변형에너지 이외에 발생하는 에너지는 무시한다.

⑤ 동적하중에 의한 부가변형은 프리스트레스에 의한 값에 비해 작기 때문에 케이블에 항상 인장력만 작용한다.

1) 자오방향 케이블의 변형에너지
위의 가정에 따라 변형에너지는 다음과 같이 표현된다

$$U_m = (1/2) \int_V \sigma_m \epsilon_m dV \quad (15)$$

이 때, 아래첨자 m은 자오방향의 케이블을 의미한다.

가정 ④에 따라 인장변형도는 다음과 같다.

$$\epsilon_m = \epsilon_m^i + \epsilon_m^a + \epsilon_{m(NL)} \quad (16)$$

이 때, ϵ_m^i : 초기 인장변형도
 ϵ_m^a : 부가변형도 (= ϵ_s^a)
 $\epsilon_{m(NL)}$: 비선형 부가변형도 (= $\epsilon_{s(NL)}$)

케이블의 부가변형도는 $\epsilon_m^a + \epsilon_{m(NL)}$ 는 구조물 내에서 같이 거동하는 값이므로 $\epsilon_s^a + \epsilon_{s(NL)}$ 과 동일하다. N_m^i 를 자오방향의 단위길이 당 초기케이블 하중이라 할 때, $2\pi N_m^i = E_m A_m \epsilon_m^i$ 가 되며, 식 (16)를 식 (15)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$U_m = (\pi N_m^i / 2) \int_0^L ((b_s^n)^2 + (b_n)^2) r ds + (E_m A_m / 4) \int_0^L (\epsilon_s^n)^2 ds \quad (17)$$

2) 주변방향 케이블의 변형에너지
 N_c^i 를 주변방향의 단위길이 당 초기케이블 하중이라 할 때, $N_c^i L = E_c A_c \epsilon_c^i$ 가 되며, 자오방향의 과정과 같은 방법에 의하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$U_c = (\pi N_c^i / 2) \int_0^L ((b_\theta^n)^2 + (b_n)^2) r ds + \frac{1}{2} E_c (A_c / L) \pi \int_0^L (\epsilon_\theta^n)^2 r ds \quad (18)$$

2.3.4 셸 요소의 운동에너지

셸 요소의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = (\rho h / 2) \int_0^L d((\dot{u}^n)^2 + (\dot{v}^n)^2 + (\dot{w}^n)^2 + (h^2 / 12) ((\dot{b}_s^n)^2 + (\dot{b}_\theta^n)^2)) r ds \quad (19)$$

이 때, ρ 는 셸 요소의 밀도이다.

2.3.5 셸 요소의 매트릭스 구성

Hamilton's Principle에 따라 운동에너지와 변형에너지 및 비보존력에 의해 한 일의 합을 변분하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \pi dt = 0$$

$$\pi = U_s^i + U_s^a + U_m + U_c + U_f - W - T \quad (20)$$

$\delta \alpha_{1-12}$ 는 서로 독립적이고, 가상의 값이므로 식 (20)은 $\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \pi_i} \right\} = 0, i=1, \dots, 12$ 와 같이 12개의 선형방정식으로 표현할 수 있고, 이는 다음과 같은 매트릭스식으로 정리된다.

$$[K] \{ \alpha \} + [M] \{ \ddot{\alpha} \} = \{ F \}$$

$$[K] = [K_s^i] + [K_s^a] + [K_m] + [K_c] \quad (21)$$

일반좌표 α 로 표현된 식을 절점좌표계로 표현하기 위한 변환매트릭스를 [B]라 하고, 국지좌표계를 전체좌표계로 표시하기 위한 변환매트릭스를 [T]로 표시하면 일반좌표계와 전체좌표계와의 관계는 다음과 같다.

$$\{ \alpha \} = [A] \{ q \}$$

$$[A] = [B]^{-1} [T] \quad (22)$$

따라서 구조물의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[K] \{ q \} + [M] \{ \ddot{q} \} = \{ F \}$$

$$[K] = [A]^T [K] [A]$$

$$[M] = [A]^T [M] [A] \quad (23)$$

3. 동적해석

3.1 자유진동해석

각 요소매트릭스로부터 전체매트릭스를 구성하면 다음과 같은 고유치문제로 표현할 수 있다.

$$[[K] - \omega^2[M]]\{U\} = \{0\} \quad (24)$$

Choleski's Decomposition에 의해 식 (24)는 다음과 같이 변환시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} [[L] - \lambda[I]]\{U\} &= \{0\} \\ [L] &= [K]^{-1}[M] \\ \lambda &= 1/\omega^2 : \text{고유치} \end{aligned} \quad (25)$$

3.2 동적응답해석

지진하중에 대한 동적응답해석은 고유진동해석의 결과로 얻어지는 모우드형상을 이용한 모우드해석법을 사용하였다. 모우드형상을 사용했을 때 변위벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\{U\} = \sum_m \{\Phi\}_m Y_m \quad (26)$$

이 때, $\{\Phi\}_m$ 은 모우드형상벡터이고, Y_m 은 모우드진폭이다. 또한, 감쇠매트릭스가 모우드형상과 수직인 성질을 유지할 때 다음과 같은 식을 만족시킨다.

$$[C] = [M] \sum_i a_i ([M]^{-1} [K])^i \quad (27)$$

이 때, $-\infty < i < \infty$ 이고, m -모우드에 대한 감쇠계수를 ξ_m 이라 하면 이에 대한 감쇠매트릭스의 값은 다음과 같다.

$$C_m = \{\Phi\}_m^T [C] \{\Phi\}_m = 2\xi_m \omega_m M_m \quad (28)$$

식 (27)을 식 (28)에 대입하고 $[K]\{\Phi\}_m = \omega_m^2[M]\{\Phi\}_m$ 임을 고려하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_m &= \{\Phi\}_m^T [M] \sum_i a_i ([M]^{-1} [K])^i \{\Phi\}_m \\ &= \sum_i a_i \omega_m^2 M_m = 2\xi_m \omega_m M_m \end{aligned} \quad (29)$$

3.3 지진하중에 대한 운동방정식

전체시스템에 대한 운동방정식을 나누어 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sg} \\ M_{gs} & M_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_s \\ \ddot{U}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sg} \\ C_{gs} & C_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_s \\ \dot{U}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sg} \\ K_{gs} & K_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s \\ U_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_g \end{Bmatrix} \quad (30)$$

이 때, 아래첨자 s와 g는 각각 구조물과 지반을 뜻한다. 구조물의 변위 $\{U_s\}$ 는 의사정적변위 $\{U_{ps}\}$ 와 동적변위 $\{U_{vs}\}$ 로 나누어 표현할 수 있으며, $\{U_{ps}\}$ 는 지반의 움직임에 기준을 한 강제운동으로 볼 수 있으므로 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} U_s \\ U_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{ps} \\ U_{pg} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_{vs} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

지반의 움직임에 의한 의사정적거동만을 고려한 시스템을 가정하면 다음과 같은 지반거동과 구조물의 의사정적거동간의 관계식이 성립된다.

$$[K_{ss}]\{U_{ps}\} + [K_{sg}]\{U_{pg}\} = \{0\} \quad (32)$$

따라서, $\{U_s\}$ 와 $\{U_g\}$ 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \{U_{ps}\} &= [R]\{U_{pg}\} \\ [R] &= -[K_{ss}]^{-1}[K_{sg}] \end{aligned} \quad (33)$$

식 (31) 및 식 (33)을 식 (30)에 대입하고 식을 정리하면 다음과 같이 표현된다

$$\begin{aligned} [M_{ss}]\{\ddot{U}_{vs}\} + [C_{ss}]\{\dot{U}_{vs}\} + [K_{ss}]\{U_{vs}\} \\ = -([M_{ss}][R] + [M_{sg}])\{\ddot{U}_{pg}\} - ([C_{ss}][R] + [C_{sg}])\{\dot{U}_{pg}\} = \{P_{eff}\} \end{aligned} \quad (34)$$

이 때, 지진하중에 대한 감쇠의 영향은 매우 작은 것이 보통이므로 식 (34)의 우변에서 둘째항은 무시할 수 있다. 이에 따라 다음과 같이 정리된다.

$$[M_{ss}]\{\ddot{U}_{vs}\} + [C_{ss}]\{\dot{U}_{vs}\} + [K_{ss}]\{U_{vs}\} = -([M_{ss}][R] + [M_{sg}])\{\ddot{U}_{pg}\} = \{P_{eff}\} \quad (35)$$

{P_{eff}}는 유효지진하중 벡타이고, 지진가속도의 기록값에 의한 하중이다.

식 (35)를 모우드 해석법에 의해 다음과 같이 각 모우드에 대한 개별방정식으로 변환시킬 수 있다. {Φ}_m을 m번째 Mode Shape Vector 라 하고, Y_m을 모우드 진폭이라 할 때 식 (35)는 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{Y}_m(t) + 2\xi_m \omega_m \dot{Y}_m(t) + \omega_m^2 Y_m(t) = \frac{P_m(t)}{M_m} \quad (36)$$

이때,
 $P_m(t) = \{\Phi\}_m^T \{P_{eff}\}$
 $M_m = \{\Phi\}_m^T [M_{ss}] \{\Phi\}_m$

식 (36)을 Duhamel Integration하면 Y_m(t)를 얻을 수 있고, 식 (26)에 의해 절점의 변위 {U}를 얻을 수 있다. 따라서, 응력과 부재력을 구할 수 있으며, 지점에서의 반력 {F_g}는 다음의 식으로부터 구할 수 있다.

$$\{F_g\} = ([M_{gg}] + [M_{gs}][R])\{\ddot{U}_{pg}\} + [M_{gs}]\{\ddot{U}_{vs}\} + [C_{gs}]\{\dot{U}_{vs}\} + [K_{gs}]\{U_{vs}\} \quad (37)$$

4. 해석 예

4.1 자유진동해석 예

본 연구를 통해 개발된 프로그램을 검증하기 위하여 Armenakas⁽⁴⁾에 의해 계산된 정해와 상용 프로그램(ABAQUS)에 의한 3차원 셸 해석 결과⁽⁵⁾에 대한 고유진동수를 비교하였다.

4.1.1 적용 예 1

하단이 회전단이고, 상단은 이동단인 원통 셸의 고유진동수에 대한 Armenakas⁽⁴⁾의 정해와의 비교를 실시하였으며, 해석에 사용된 구조물의 제원은 셸의 높이가 25.4m(1000in), 반경이 25.4m(1000in), 두께가 0.0254m(1in)인 원통 셸구조물을 대상으로 하였으며 탄성계수는 20.67×10⁷kPa(3.0×10⁷psi), 포아송비는 0.3, 구조물의 밀도는 7.84×10³kg/m³(7.33×10⁴lbs²/in)을 사용하였다. 프리스트레스트하중을 사용한 경우는 하중이 작용되는 방향의 변형도가 약 0.001 정도가 되는 57.815kN/m(33000 lb/in)의 인장력이 작용될 경우에 대하여 해석하였다.

본 해석에서는 20개의 요소를 사용하였으며, 프리스트레스트가 없을 때 및 자오방향의 프리스트레스트가 작용될 때에 대한 값을 각각 Wave Number에 대한 모우드별로 비교하였다. 이의 결과는 표 1과 표 2에 정리되어 있으며, 프리스트레스트 하중이 작용되지 않았을 경우 8번째 Wave Number의 2차 모우드에서 최대 2.3%의 오차가 발생되었으며, 기타의 경우는 1%이내의 오차범위를 나타냄으로써 정해와 거의 일치함을 알 수 있다. 주변방향의 프리스트레스트 하중이 작용될 경우도 8번째 Wave Number의 4차 모우드에서 최대 2.6%의 오차가 발생되었으며, 기타는 1.6~0.2%의 오차를 나타냄으로써 정해에 근사한 값을 나타내었다.

표 1 프리스트레스트 하중이 가해지지 않았을 경우에 대한 비교 (단위 : Hz)

Mode No. Wave No.	2	4	6	8	10
1 This Study	31.28	32.01	32.29	32.73	33.58
Reference [4]	31.37	31.89	32.41	32.93	33.46
3 This Study	26.01	30.49	31.60	32.36	33.36
Reference [4]	-	-	-	-	-
5 This Study	19.60	27.82	30.31	31.63	32.93
Reference [4]	19.63	27.92	30.30	31.87	33.06
8 This Study	12.62	22.97	27.57	30.01	31.94
Reference [4]	12.92	23.21	27.60	30.11	31.87

표 2 축방향 프리스트레스 하중이 가해졌을 경우에 대한 비교 (단위 : Hz)

Mode No. Wave No.	2	4	6	8	10
1 This Study	31.99	34.70	38.04	42.32	47.46
Reference [4]	32.61	35.13	37.83	42.34	47.67
3 This Study	26.85	33.31	37.47	42.04	47.32
Reference [4]	-	-	-	-	-
5 This Study	20.70	30.88	36.38	41.48	47.01
Reference [4]	21.01	31.36	36.57	42.03	47.04
8 This Study	14.28	26.59	34.14	40.27	46.33
Reference [4]	14.11	27.28	34.49	40.58	46.41

4.1.2 적용 예 2

일단은 고정단이고, 일단은 자유단인 원통셸 구조물에 대한 고유진동수를 3차원 셸 해석을 통한 결과와 비교하였으며, 이는 참고문헌(조의 경⁶⁾)의 결과를 이용하였다. 문헌의 결과는 원통셸을 112개의 절점으로 모델링한 결과이며, 본 해석은 21개의 절점에 의한 결과이다. 해석에 사용된 구조물의 제원은 셸의 높이가 7m, 반경이 3.5m, 두께가 0.0035m인 원통 셸구조물을 대상으로 하였으며 탄성계수는 $20.67 \times 10^7 \text{kPa}$, 포아송비는 0.3, 구조물의 밀도는 $7.84 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 을 사용하였다.

표 3 셸 모델에 의한 결과와의 비교 (단위: Hz)

Mode No.	Wave No.	This Study	ABAQUS	조[5]
1	3	18.509	18.499	17.622
	4	11.416	11.414	11.994
	5	7.786	7.790	8.299
	6	5.948	5.959	6.072
	7	5.273	5.292	5.646
	8	5.440	5.470	5.712
	9	6.177	6.227	6.323
	10	7.284	7.365	7.879
2	7	22.301	22.401	23.090
	8	18.146	18.283	18.880
	9	15.438	15.614	16.023
	10	13.875	14.095	15.465
3	13	22.966	23.912	26.610
	14	22.286	23.407	25.953
	15	22.378	23.716	26.330

표 3에 나타난 결과에 나타난 바와 같이 본 연구에서의 결과는 3차원 F.E.M해석의 결과와도 잘 일치하고 있음을 보여준다. 따라서 본 연구에서 유도된 모형식은 적은 요소의 수에서도 정밀한 결과를 얻을 수 있었다.

4.2 지진하중에 대한 해석

시간이력 지진기록은 그림 3과 같은 시간간격이 0.01초, 지속시간이 24초이며 최대지반가속도가 0.2g인 인공지진을 사용하여 해석하였다. 적용예 1 및 2의 결과는 비교적 높은 진동수를 나타내므로 시간이력해석 시 지진기록을 매우 세분화하여야 하므로 기본고유진동수가 3Hz범위에 있는 가상의 구조물을 택하여 해석하였다. 해석에 사용된 구조물의 제원은 셸의 높이가 15m, 반경이 10m, 두께가 0.02m이고 일단은 고정단, 일단은 자유단인 원통 셸구조물을 대상으로 하였으며, 그림 2와 같이 20개의 요소로 모델링하였다. 탄성계수는 $2.067 \times 10^6 \text{kPa}$, 포아송비는 0.3, 구조물의 밀도는 $7.84 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 감쇠계수는 0.05를 사용하였다. 프리스트레스 하중을 사용한 경우는 하중이 작용되는 방향의 변형도가 약 0.001정도가 되는 45.4kN/m의 압축력이 작용될 경우에 대하여 해석하였으며, 표 4는 각 경우별 고유진동수를 비교한 표이다.

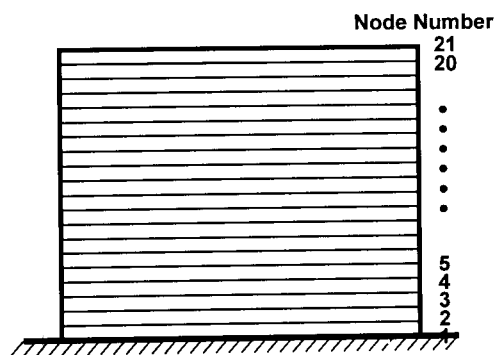


그림 2 지진하중에 대한 해석예의 모델도

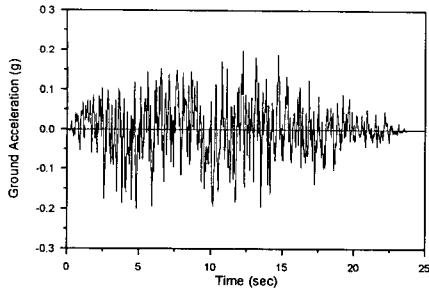
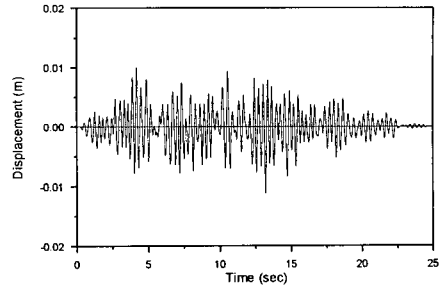


그림 3 인공지진기록



(Prestressed(M), 최대변위:1.117cm)

표 4 각 하중 경우별 고유진동수(Wave Number:1, 단위: Hz)

Mode No.	No prestressed	Prestressed (C)	Prestressed (M)	Prestressed (C+M)
1	3.2405	3.2385	3.2290	3.2270
2	7.1920	7.1885	3.7495	3.7398
3	7.7771	7.7731	3.7674	3.7576
4	8.0159	8.0117	3.9258	3.9165
5	8.0760	8.0716	4.1729	4.1642
6	8.1340	8.1297	4.5023	4.4942

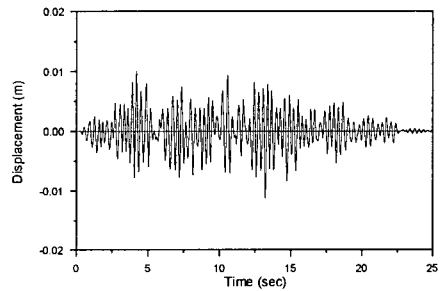
C : 주변방향 프리스트레스(Circumferential Prestress)

M : 자오방향 프리스트레스 (Meridional Prestress)

C+M : 주변방향 및 자오방향 프리스트레스

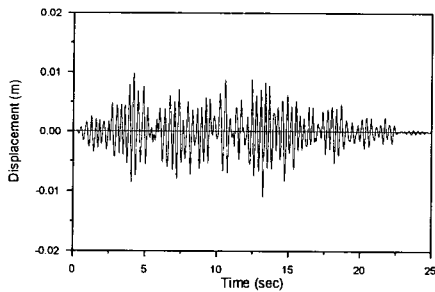
(Circumferential and Meridional Prestress)

그림 6 자유단의 반경방향 변위



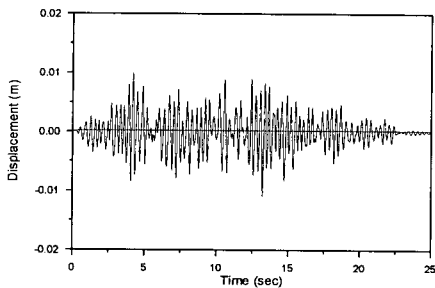
(Prestressed(C+M), 최대변위:1.119cm)

그림 7 자유단의 반경방향 변위



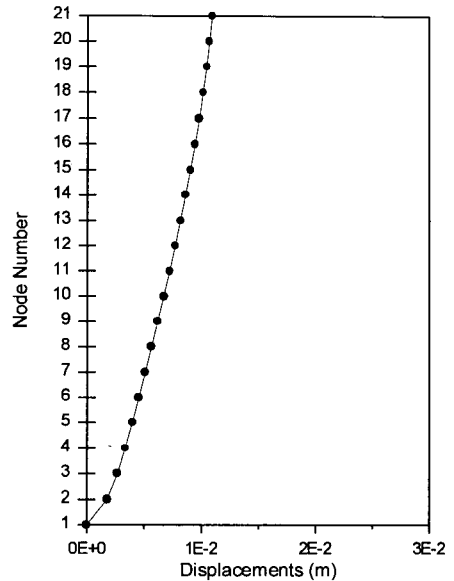
(No Prestressed, 최대변위:1.091cm)

그림 4 자유단의 반경방향 변위



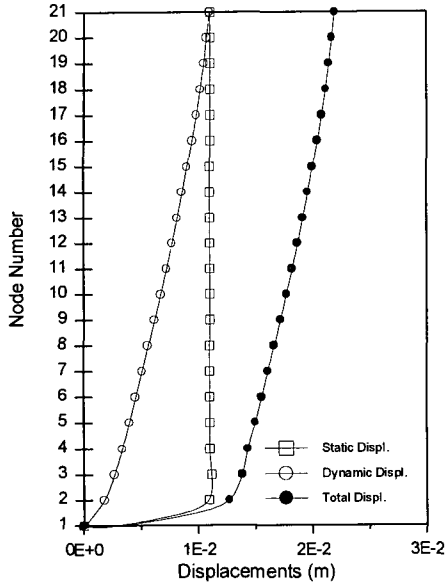
(Prestressed(C), 최대변위:1.098cm)

그림 5 자유단의 반경방향 변위



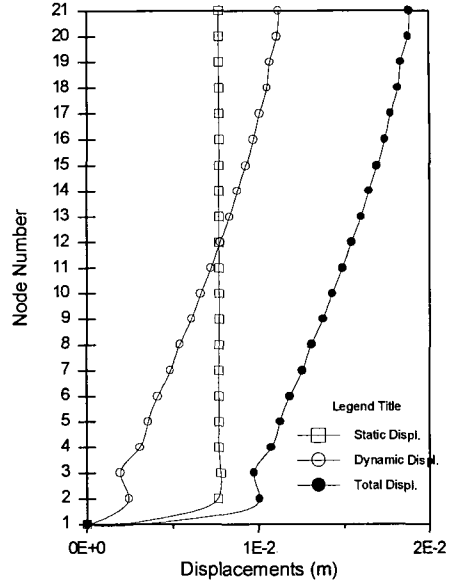
(No Prestressed, t=13.2sec)

그림 8 반경방향 변위



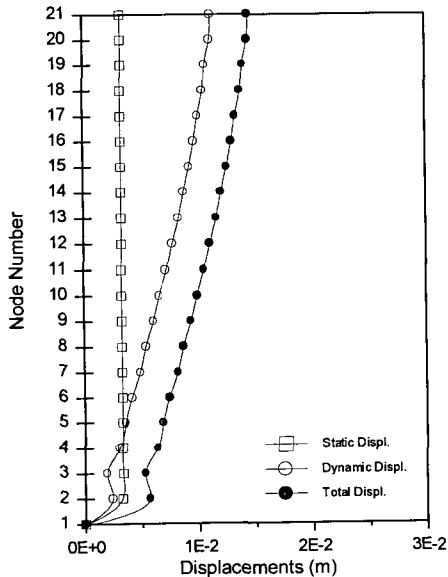
(Prestressed(C) ,t=13.2sec)

그림 9 반경방향 변위



(Prestressed(C+M) ,t=13.2sec)

그림 11 반경방향 변위



(Prestressed(M) ,t=13.2sec)

그림 10 반경방향 변위

5. 결 론

본 연구에서는 기하학적으로 축대칭인 구조물의 특성을 최대한으로 이용할 수 있도록 셸을 링요소로 모델링하였으며, 구조물내에 주변방향 및 자오방향의 프리스트레스트하중이 작용될 경우의 동적 모형식을 유도하였다. 프로그램을 통하여 해석한 결과에 대한 고유진동수와 기존의 정해의 비교 결과 20개 정도의 링요소로 모델링한 경우에서도 정해와 근접한 해를 얻을 수 있었다. 본 연구에서 개발된 모형식은 원통형 셸 뿐만 아니라 축대칭의 동형 구조물에 적용이 가능하며, 지진하중의 비대칭 하중에 대하여도 해석이 가능하다. 인공지진하중에 대한 반경방향의 처짐을 해석한 결과 동일한 크기의 프리스트레스트하중이 작용될 때 자오방향의 프리스트레스트하중이 작용될 경우가 다소 큰 처짐값을 나타내었다. 본 연구를 통하여 개발된 모델은 지진하중하에서의 축대칭구조물에 대하여 3차원 구조해

석을 실시하지 않고도 정해에 근접한 해석결과를 얻을 수 있어 설계실무에 크게 활용될 수 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 학술진흥재단 자유공모과제의 연구지원에 의한 결과입니다. 재단의 지원에 깊이 감사드립니다.

참고 문헌

1. Dym, C.L., "Vibrations of prestressed orthotropic cylindrical members," *AIAA J.* 8, 1970, pp. 693-699.
2. Sanders, J.L., "Nonlinear theories for thin shells," *Quarterly Appl. Math.*, 21, 1963, pp. 21-36.
3. Tillerson, J.R. and Haisler, W.E., "SAMMSOR-II, A finite element program to determine stiffness and mass matrices of shells of revolution," Texas A & M University TEES-RPT-70-18, 1970.
4. Armenakas, A.E., "Influence of initial stress on the vibrations of simply supported circular cylindrical shells," *AIAA J.* 2., 1964, pp. 1607-1612.
5. 조의경, "유연지반상에 놓인 액체저장탱크의 3차원 지진응답해석", 박사학위논문, 서울대학교, 1993, 208pp.
6. Cook, R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 2nd Ed*, John Wiley and Sons, 1981. 537pp.
7. Clough, R.W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw Hill, 1989, 634pp.

부 록 1. $[K_s^i], [K_s], [K_m], [K_c]$ 매트릭스

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_s^i}{\partial \alpha_m} &= [K_s^i]\{\alpha\} \quad [m=1, 12] \\ &= (\pi/2) \int_0^L \left[C_1 \epsilon_s^i \left\{ \frac{\partial(b_s^n b_s^n)}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial(b^n b^n)}{\partial \alpha_m} \right\} \right. \\ &\quad + C_2 \epsilon_\theta^i \left\{ \frac{\partial(b_\theta^n b_\theta^n)}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial(b^n b^n)}{\partial \alpha_m} \right\} \\ &\quad + v_{s\theta} C_1 \left\{ \frac{\partial(b_s^n b_\theta^n)}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial(b^n b^n)}{\partial \alpha_m} \right\} \\ &\quad \left. + \epsilon_\theta^i \left\{ \frac{\partial(b_s^n b_s^n)}{\partial \alpha_m} \right\} + \left\{ \frac{\partial(b^n b^n)}{\partial \alpha_m} \right\} \right] r \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_s^a}{\partial \alpha_m} &= [K_s^a]\{\alpha\} \quad [m=1, 12] \\ &= (\pi/2) \int_0^L \left[C_1 \left(\frac{\partial(e_s^n e_s^n)}{\partial \alpha_m} \right) + C_2 \left(\frac{\partial(e_\theta^n e_\theta^n)}{\partial \alpha_m} \right) \right. \\ &\quad + 2v_{s\theta} C_1 \left(\frac{\partial(e_s^n e_\theta^n)}{\partial \alpha_m} \right) + G_1 \left(\frac{\partial(e_{s\theta}^n e_{s\theta}^n)}{\partial \alpha_m} \right) \\ &\quad + D_1 \left(\frac{\partial(k_s^n k_s^n)}{\partial \alpha_m} \right) + D_2 \left(\frac{\partial(k_\theta^n k_\theta^n)}{\partial \alpha_m} \right) \\ &\quad \left. + 2v_{s\theta} D_1 \left(\frac{\partial(k_s^n k_\theta^n)}{\partial \alpha_m} \right) + G_2 \left(\frac{\partial(k_{s\theta}^n k_{s\theta}^n)}{\partial \alpha_m} \right) \right] r \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m}{\partial \alpha_m} &= [K_m]\{\alpha\} \quad [m=1, 12] \\ &= -(\pi N_m^i / 2) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial(b_s^n b_s^n)}{\partial \alpha_m} \right) + \left(\frac{\partial(b^n b^n)}{\partial \alpha_m} \right) \right] r \, ds \\ &\quad + (E_m A_m / 4) \int_0^L \left(\frac{\partial(e_s^n e_s^n)}{\partial \alpha_m} \right) r \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_c}{\partial \alpha_m} &= [K_c]\{\alpha\} \quad [m=1, 12] \\ &= -(\pi N_c^i / 2) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial(b_\theta^n b_\theta^n)}{\partial \alpha_m} \right) + \left(\frac{\partial(b^n b^n)}{\partial \alpha_m} \right) \right] r \, ds \\ &\quad + (\pi E_c A_c / 2L) \int_0^L \left(\frac{\partial(e_\theta^n e_\theta^n)}{\partial \alpha_m} \right) r \, ds \end{aligned}$$

부 록 2. $[M]$ 매트릭스

$$\begin{aligned} T &= (\pi h / 2) \int_0^L \rho \left[(\alpha_1^n + \alpha_2^n s + \alpha_3^n s^2 + \alpha_4^n s^3)^2 \right. \\ &\quad + (\alpha_5^n + \alpha_6^n s)^2 + (\alpha_7^n + \alpha_8^n s)^2 \left. \right] r \, ds \\ &\quad + (\pi h^3 / 24) \int_0^L \rho \left[(\alpha_2^n + 2\alpha_3^n s + 3\alpha_4^n s^2)^2 \right. \\ &\quad + 2(\alpha_2^n + 2\alpha_3^n s + 3\alpha_4^n s^2) + (\alpha_5^n + \alpha_6^n s) \phi' \\ &\quad \left. + (\alpha_5^n + \alpha_6^n)^2 \phi^2 \right] r \, ds \\ &\quad + (\pi h^3 / 24) \int_0^L \rho \left[n^2 (\alpha_1^n + \alpha_2^n s + \alpha_3^n s^2 + \alpha_4^n s^3)^2 \right. \\ &\quad + 2n \cos \phi (\alpha_1^n + \alpha_2^n s + \alpha_3^n s^2 + \alpha_4^n s^3) (\alpha_7^n + \alpha_8^n s) \\ &\quad \left. + \cos^2 \phi (\alpha_7^n + \alpha_8^n s)^2 \right] (1/r) \, ds \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_m} \right) = [M]\{\dot{\alpha}\} \quad [m=1, 2]$$

$$\rho = \rho_s \left(1 + \frac{A_c}{Lh} \frac{\rho_c - \rho_s}{\rho_s} + \frac{A_m}{2\pi h} \frac{\rho_m - \rho_s}{\rho_s} \right)$$

부록 3. Static condensation

비절점좌표값 $\alpha_9 \sim \alpha_{12}$ 를 $\{\alpha'\}$ 라 하고, 나머지를 $\{\alpha\}$ 라 하면 관성력은 다음과 같은 매트릭스 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\alpha}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

이 때, 자오방향 및 주변방향을 따라 초기하중이 선형변화를 한다고 가정했으므로 $\{\alpha'\}$ 에 의한 관성력은 존재하지 않는다. 따라서, 관성력은 다음과 같이 Condensation된다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{\alpha}\} = \{F_1\}$$

따라서, 비감쇠 동역학 기본방정식에 대한 Condensation은 다음과 같이 수행할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\alpha}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

윗식을 $\{F_1\}$ 에 의한 부분과 $\{0\}$ 에 의한 부분으로 나누면 아래부분의 방정식으로부터 $\{\alpha\}$ 와 $\{\alpha'\}$ 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\{\alpha'\} = -[K_{bb}]^{-1}[K_{ba}]\alpha$$

이 식을 기본방정식에 대입하면 다음과 같이 감소된 매트릭스를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [M_{aa}]\{\ddot{\alpha}\} + [K]\{\alpha\} &= \{F\} \\ [K] &= [K_{aa}] - [K_{ab}][K_{bb}]^{-1}[K_{ba}] \end{aligned}$$