

낮은 원호아치의 좌굴거동에 대한 연구

A Study on Buckling Behavior of Shallow Circular Arches

김연태* 허택녕** 오순택***
Kim, Yeon Tae Huh, Taik Nyung Oh, Soon Taek

국문요약

동하중을 받는 낮은 원호아치의 좌굴거동을 지지조건을 달리하여 해석하여 거동상의 차이를 비교, 분석하였다. 형상의 비선형성은 Lagrangian 운동좌표를 고려하여 해석하였으며, 동적운동방정식의 해를 구하기 위해 유한요소법을 사용하였다. 동적운동방정식의 시간적분은 Newmark해법을 채택하였고, 각 시간단계에서의 비선형거동에 따른 반복계산은 Newton-Raphson방식을 이용하였다. 아치의 좌굴거동해석에는 Humphreys 등이 사용한 좌굴기준 및 무차원 매개변수를 이용하였다. 단, Humphreys 등과는 달리 비대칭 구조물의 좌굴판단시에도 적용할 수 있도록 수평변위를 반영한 처짐비식을 제안하였고, 이를 프로그래밍하여 모형해석에 적용하였다. 모형해석을 통하여 낮은 아치의 지지조건에 따른 좌굴거동해석을 수행하여 양단힌지인 아치가 양단고정아치보다 다소 적은 하중조건에서 좌굴한다는 것을 확인하였다. 아울러 양단힌지아치가 양단고정아치보다 좌굴전·후 큰 처짐비를 보여 좌굴강성면에서 상대적으로 불리한 구조라고 판단된다. 그밖에 같은 형상매개변수를 갖는 아치는 지지조건에 관계없이 같은 하중매개변수를 재하할 경우, 같은 시간매개변수에서 처짐비를 기준으로 같은 거동을 함을 알았다. 따라서 좌굴현상도 같은 하중매개변수에서 나타남을 확인하였다.

주요어 : 낮은 원호아치, 형상의 비선형성, Lagrangian 운동좌표, 무차원매개변수

ABSTRACT

Behavioral characteristics of shallow circular arches with dynamic loading and different end conditions are analysed. Geometric nonlinearity is modelled using Lagrangian description of the motion. The finite element analysis procedure is used to solve the dynamic equation of motion, and the Newmark method is adopted in the approximation of time integration. The behavior of arches is analysed using the buckling criterion and non-dimensional time, load and shape parameters which Humphreys suggested. But a new deflection-ratio formula including the effect of horizontal displacement plus vertical displacement is presented to apply for the non-symmetric buckling problems. Through the model analysis, it's confirmed that fix-ended arches have higher buckling stability than hinge-ended arches, and arches with the same shape parameter have the same deflection ratio at the same time parameter when loaded with the same parametric load.

Key words : shallow circular arches, geometric nonlinearity, Lagrangian description, non-dimensional parameters

1. 서 론

구조물은 기하학적인 형태에 따라 재료는 탄성범위내에 있더라도 과대한 변형이 발생할 수 있다. 이 경우에는 변형전의 기하학적 형상

을 토대로 평형 방정식을 구성하는 미소변위 이론에 의하여는 그 정확한 거동을 규명하기 어렵다. 따라서 대변형의 영향을 고려한 유한 변위이론을 사용하여야 문제를 해결할 수 있다. 낮은 아치는 그 기하학적인 형상 때문에 좌굴 가능성이 높은 구조물이다. 또한 충격, 지진등 예기치 않은 동하중을 받는 경우에 대한 안정성 문제도 중요한 연구대상이 되고 있다.

본 연구에서는 대변형이론을 적용하여 동하

* 정희원 · 서울산업대학교 구조공학과 조교수

** 정희원 · 창원대학교 토목공학과 조교수

*** 정희원 · 서울산업대학교 구조공학과 조교수

중을 받는 낮은 아치의 좌굴거동을 양단고정 구조와 양단힌지구조를 대상으로 비교, 분석한다. 아치가 구조물에 채용될 때 주로 양단이 고정된 무힌지아치와 양단이 핀구조로 된 양단힌지구조가 주로 이용되기 때문에 두 구조를 대상으로 한다. 재료의 비선형 및 감쇄는 고려하지 않으며, 아울러 면내좌굴만을 대상으로 하였다.

해석방법은 대변형이론의 하나인 Total Lagrangian 문제형성^(1,6)에 따라 구조물의 거동을 수식화하고 가상일의 원리를 이용하여 운동방정식을 도출한 후 이식을 등매개유한요소 기법에 따라 행렬식으로 이산화한다. 본 연구에서는 2차원 평면응력 8절점 등매개유한요소를 사용하였다. 이산화된 운동방정식은 Newmark 방법에 따라 시간적분하여 해를 구한다. 아울러 비선형거동에 따른 반복계산은 Newton-Raphson방법에 의한다.

아치의 동적임계좌굴하중을 결정하기 위한 방법에는 여러 가지 기준이 사용되고 있는 데, 본 논문에서는 Humphreys 등⁽⁷⁾이 제안한 좌굴기준 및 무차원매개변수를 사용하여 좌굴거동을 해석하였다.

2. Total Lagrangian 운동방정식

뉴턴의 제2법칙에 따르면 선형운동량의 시간미분은 외적으로 가해진 작용력과 같다. 즉

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \{v\} dV = \int_A \{s\} dA + \int_V \rho \{f\} dV \quad (1)$$

이다. 여기서 D/Dt 는 시간미분, $\{s\}$ 는 단위 면적당으로 치환된 표면력벡터, $\{f\}$ 는 단위체적당 물체력, ρ , V , A 는 단위체적당의 질량, 체적, 표면적, $\{v\}$ 는 속도벡터이다.

이 식에 질량보전의 법칙 및 발산정리를 적용하여 정리하면 임의의 체적에 대하여 아래 식이 성립된다.

$$\rho \frac{D^2 u_i}{Dt^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi_j} - \rho f_i = 0 \quad (2)$$

위 식에서 u_i 는 변위벡터, σ_{ij} 는 Cauchy의 응력텐서, ξ_j 는 Eulerian 좌표이다. 식 (2)에 가상일의 원리를 적용하여 양변에 가상변위 δu_i 를 곱한후 전체체적에 걸쳐 적분하고, 여기에 발산정리 및 Piola Kirchhoff 제2응력을 이용하여 다시 쓰면 다음과 같이 초기형상에 투영된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\int_{V_o} \overline{\sigma}_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV_o = \int_{A_o} s_{oi} \delta u_i dA_o + \int_{V_o} \rho_o (f_i - \frac{D^2 u_i}{Dt^2}) \delta u_i dV_o \quad (3)$$

식 (3)에서 $\overline{\sigma}_{ij}$ 는 Piola Kirchhoff 제2응력 텐서이고, $\delta \epsilon_{ij}$ 는 Piola Kirchhoff 제2응력에 대응하는 Green변형율이며, s_{oi} 는 변형전의 단위면적당으로 치환된 표면력의 i 방향성분, ρ_o , V_o , A_o 는 각각 변형이 일어나기 전의 단위체적당 질량, 체적, 표면적을 나타낸다.

식 (3)을 유한요소이론에 따라 이산화하여 임의의 시간에서의 운동방정식을 구성하면 다음 식으로 표시된다.

$$[M] \{ \dot{q} \} + ([K_L] + [K_{NL}]) \{ q \} = \{ F \} \quad (4)$$

식 (4)에서 $[M]$ 은 consistent 질량행렬로서

$$[M] = \int_{V_o} [N]^T [M] \rho_o dV_o \quad \text{이며, } [K_L] \text{은 선형 강성도행렬로서 } [K_L] = \int_{V_o} ([B_L] + [B_{NL}])^T [C] ([B_L] + [B_{NL}]) dV_o \quad \text{이며, } [K_{NL}] \text{은 비선형 강성도행렬로서 } [K_{NL}] = \int_{V_o} [G]^T [S] [G] dV_o \quad \text{이며, } \{ F \} \text{는 임의의 시간에서의 하중항으로 } \{ F \} = \int_{V_o} [M]^T \{ f \} \rho_o dV_o + \int_{A_o} [M]^T [s_o] dA_o \quad \text{이다.}$$

상기 식들에서 $[M]$ 은 형상함수 행렬이며, $[B_L]$ 과 $[B_{ML}]$ 은 선형변형율-절점변위 관계행렬 및 비선형 변형율-절점변위 관계행렬, $[C]$ 는 Piola-Kirchhoff 제2응력-변형율 관계행렬, $[G]$ 는 변위경사-절점변위 관계행렬, $[S]$ 는 Piola-Kirchhoff 제2응력으로 구성된 행렬이다.

3. 수치해석

식 (4)의 모든 제변량은 Jacobian행렬을 이용하여 자연좌표계상의 값으로 변환할 수 있다. 즉 질량, 강성도행렬 및 외력벡터는 그 구성요소들이 자연좌표의 함수이므로 2차원해석의 경우 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 [M] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M]^T [M] \rho_o |J_c| d dr ds \\
 [K_L] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C] [B] |J_c| d dr ds \\
 [K_{ML}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G]^T [S] [G] |J_c| d dr ds \\
 \{F\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M]^T \{f\} \rho_o |J_c| d dr ds + \\
 &\quad \int_{-1}^1 [M]^T \{s_o\} |J_c^{(A)}| d dr \quad (5)
 \end{aligned}$$

이 식들에서 $|J_c|$ 및 $|J_c^{(A)}|$ 는 좌표 Jacobian 행렬의 행렬식이며, d 는 단면의 폭, r, s 는 자연좌표를 의미한다.

식 (5)는 Gauss Legendre 수치적분방식⁽⁵⁾을 이용하면 구할 수 있으며, 적분된 행렬과 벡터는 전체구조계로 적절하게 조립할 수 있다. 다음, 식 (4)와 같은 형태로 전체구조계에 대하여 이산화된 운동방정식을 각 시간단계별로 시간에 대한 2차미분방정식의 수치적분이 수행된다. 본 연구에서는 implicit 직접적분방식의 하나인 Newmark 근사법⁽⁴⁾에 의하여 해를 구한다. 아울러 식 (4)의 평형방정식은 각 시간 단계에서의 기하학적 형상을 모르기 때문

에 각 단계에서 변량을 가정하고 이 가정이 식 (4)를 만족할 때까지 계산을 반복하는 작업이 필요하다. 여기서는 반복작업방식으로 Newton-Raphson방식⁽⁴⁾을 이용한다.

4. 낮은 아치의 임계좌굴하중

낮은 아치에 하중이 가해져 일정한 크기에 이르면 snap through 좌굴이 발생하여 불안정해진다. 이 현상은 동일한 하중재하에서 한 평형상태에서 다른 평형상태로 갑자기 변위가 증가되는 현상을 말한다.

Snap through 좌굴이 일어나는 순간의 하중을 임계좌굴하중이라 한다. 임계좌굴하중에 대하여는 많은 학자들⁽¹⁾⁽⁷⁻¹¹⁾에 의하여 연구되었는데, 본 연구에서는 이 중에서 Humphreys⁽⁷⁾등이 제안한 기준을 적용하여 임계하중을 구하기로 한다. Humphreys 등은 하중과 개개하중에 대한 구조물의 응답변수중 최대치와의 상관도에서 하중의 미소증가에 따른 응답변수의 급격한 증가가 발생하는 하중을 임계좌굴하중이라고 정의하였다.

본 연구에서는 응답변수를 식 (6)과 같이 아치의 원래의 형상과 변위량의 비를 나타내는 처짐비로 정하였다. 단 Humphreys 등이 제안한 수직변위만을 수식에 포함시키는 방법과는 달리 수평변위를 수식에 포함시켜 비대칭좌굴 등 수평변위의 영향이 좌굴판단시 중요한 경우에도 적용할 수 있도록 하였다. 따라서 하중을 점증시키며 아치의 힘-변위관계를 해석할 때 식 (6)의 처짐비가 급격히 증가하는 순간의 하중을 임계하중으로 한다.

$$\text{처짐비 } (\Delta) = \frac{\int_0^L [u_1^2(x, t) + u_2^2(x, t)]^{1/2} dx}{\int_0^L Y_o(x) dx} \quad (6)$$

식 (6)에서 $u_1(x, t)$ 와 $u_2(x, t)$ 는 시간 t 에서의 수평변위와 수직변위이며 $Y_o(x)$ 는 위치에 따라 변하는 아치의 높이, L 은 아치의 지

간이다.

5. 모형해석 및 분석

5.1 무차원 매개변수

앞에서 기술한 이론 및 기준을 토대로 아치 모형을 선정하여 해석을 실시하였다. 해석결과 는 재료의 물성과 하중의 크기, 기하학적 형상 등에 따라 결정되는 무차원 매개변수를 이용하여 나타내었다. 본 연구에서 사용한 무차원 매개변수는 Humphreys 등이 사용한 것으로서 아래식으로 표기되는 시간매개변수 τ , 하중매개변수 P_0 , 형상매개변수 γ 이다.

$$\begin{aligned} \tau &= (t/R) (\sqrt{E/\rho}) \\ P_0 &= (R/h)^2 (q/E) \\ \gamma &= \beta^2 (R/h) \end{aligned} \quad (7)$$

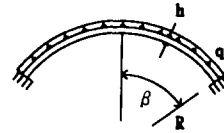
식 (7)에서 E : 탄성계수, ρ : 단위질량, R : 아치의 반경, h : 아치단면의 높이, q : 하중강도, β : radian으로 환산된 아치중심각의 반, t : 경과시간을 나타낸다.

5.2 모형 및 해석기준

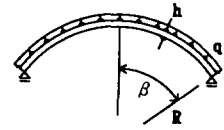
수치해석을 위하여 선정한 아치는 그림 1과 같다. 모형에서 아치의 지지조건은 (a)양단이 모두 고정된 경우와 (b)양단이 모두 힌지인 두 가지로 나누었다. 아치의 형상은 반경 $R=100$ cm, 단면의 높이 $h=1$ cm, 아치 중심각의 반 $\beta =12^\circ$ 이다. 즉 형상매개변수 $\gamma=4.382$ 인 아치를 대상으로 하였다. 이 모형에 그림과 같은 step load가 등분포 face하중으로 재하된 경우를 대상으로 하였다. 해석에 사용한 시간간격은 0.1×10^{-3} 초로 하였다.

이 모형에 Humphreys 등이 제안한 임계하중의 정의에 따라 처짐비가 갑자기 증가하는 현상이 나타날 때까지 하중을 점증시키며 해석을 실시하였다. 해석결과는 처짐비 Δ 와 시간

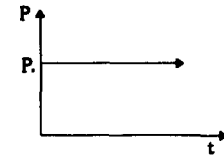
매개변수 τ 와의 상관관계를 그림으로 도시하여 제시하였고, 좌굴전후의 아치의 형상을 그림으로 표기하였다.



(a) 양단고정



(b) 양단힌지



(c) 하중조건

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\ \rho &= 8.1 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^4/\text{sec}^2 \\ \nu &\approx 0.3 \end{aligned}$$

그림 1 모형 및 하중조건

5.3 지지조건에 따른 임계좌굴하중

5.3.1 양단고정의 경우

지지조건이 양단고정인 경우에 대하여 하중을 점증시키며 해석한 결과를 그림 2에 나타내었다. 그림에서 보면 하중매개변수 P_0 가 0.186까지는 처짐비가 최대 1.1정도에서 진동하는 현상을 보이나, 하중이 미소하게 증가한 $P_0=0.190$ 에 도달하면 처짐비가 갑자기 증가하여 최고 3.4에 이르는 것을 알 수 있다.

하지만 하중을 계속하여 증가시키면 그 증가폭에 비례하여 처짐비가 커지는 않고 단지 처짐비의 급등현상이 보다 빨리 나타난다는 것을 확인할 수 있다. 이 현상을 처짐비가 급등하기 전후의 아치의 변형된 형상을 그려

나타내면 그림 3과 같다. 그림에서 보면 $P_o=0.186$ 까지는 아치가 원래의 형상과 유사한 형태(위로 볼록한 형상)를 보이나 약간의 하중증가인 $P_o=0.190$ 에서는 아치가 전도된 모습으로 되어 있음을 알 수 있다. 이상의 검토에서 볼 때 대상모형아치는 $P_o=0.190$ 정도에서 Humphreys 등의 기준에 따른 snap through 좌굴이 일어나는 것으로 판단할 수 있다.

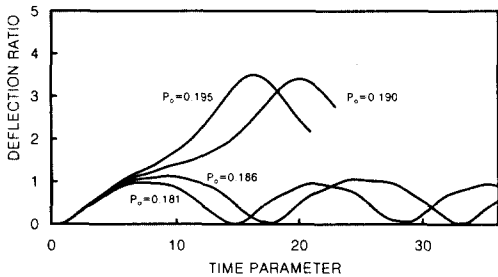


그림 2 양단고정 아치의 처짐비

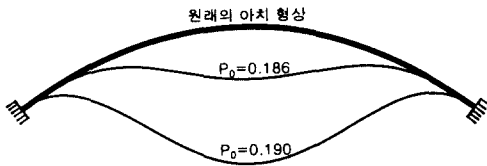


그림 3 양단고정 아치의 처짐비 급등전·후의 형상

5.3.2 양단힌지의 경우

양단이 고정된 경우와 마찬가지로의 방법으로 해석을 수행하여 그 결과를 그림 4에 나타내었다.

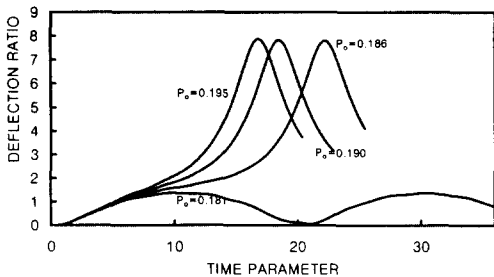


그림 4 양단힌지 아치의 처짐비

그림에서 보면 하중매개변수 $P_o=0.181$ 정도까지는 처짐비가 하중에 따라 비례하여 증가되나 약간의 하중증가인 $P_o=0.186$ 에 이르면 처짐비가 갑자기 증가하여 최고 7.8이상으로 높아지는 것을 확인할 수 있다. 이 이상 하중을 증가시키면 양단고정의 경우와 마찬가지로 처짐비가 급증하지는 않고 거의 일정한 값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 다만 하중이 커질수록 처짐비 급등현상이 상대적으로 빨리 나타나는 것을 보여 주고 있다.

양단힌지인 경우에도 처짐비 급등전·후의 아치의 형상을 그림으로 나타낼 경우 그림 5와 같다. 그림에서 보면 $P_o=0.181$ 까지는 원래의 아치형상과 유사하나 $P_o=0.186$ 에 이르면 아치가 완전히 전도된 모습으로 되어 있는 것을 확인할 수 있다. 따라서 양단힌지인 경우에는 $P_o=0.186$ 정도에서 snap through형 좌굴이 처음 나타나는 것으로 추정된다.

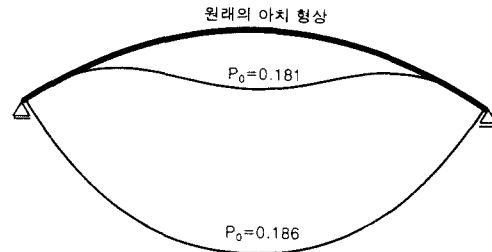


그림 5 양단힌지 아치의 처짐비 급등전·후의 형상

5.3.3 비교고찰

양단고정과 양단힌지인 두 모형아치에 대하여 하중을 점증시키며 아치의 좌굴거동을 살펴 보았다. 검토결과 지지조건에 따라 좌굴이 일어나는 양상이 다소 다른 것을 알 수 있다. 양단고정아치와 양단힌지아치의 하중매개변수에 따른 최대처짐비를 나타낸 그림 6을 보면 그 현상을 쉽게 알 수 있다. 즉 하중매개변수가 0.181 까지는 두 모형아치가 최대처짐비에

다소의 차이(양단고정:0.98, 양단힌지:1.38)는 있으나 좌굴이 발생하기 전의 상태에 있다. 그러나 하중이 미소하게 증가된 $P_o=0.186$ 에서는 양단고정아치는 처짐비가 최대 1.13에 머물러 있어 아직 좌굴이 일어나기 전이나 양단힌지아치는 좌굴이 발생하여 최대처짐비가 7.8에 도달되어 있음을 알 수 있다. 이어, 하중이 또 다시 미소 증가된 $P_o=0.190$ 에서는 양단고정아치도 비로소 좌굴이 일어나 최대처짐비가 3.4에 이르른다. 반면에 양단힌지아치는 이미 좌굴이 발생된 후로서 최대 처짐비가 거의 일정한 상태를 유지하고 있다.

좌굴규모면에서는 양단고정아치는 좌굴후의 최대처짐비가 3.4~3.5 정도인데 반해, 양단힌지아치는 7.8~7.9에 이를 정도로 큰 것을 알 수 있다. 이것은 양단고정아치의 경우 지점에서 각 변위의 구속으로 변형이 제약을 받는 반면, 양단힌지아치는 각변위가 자유로워 완전히 전도된 형태가 되기 때문으로 보인다. 따라서 모형아치에 국한하여 판단할 때 양단힌지아치에 비하여 양단고정아치가 좌굴강성면에서 유리한 구조로 분석된다.

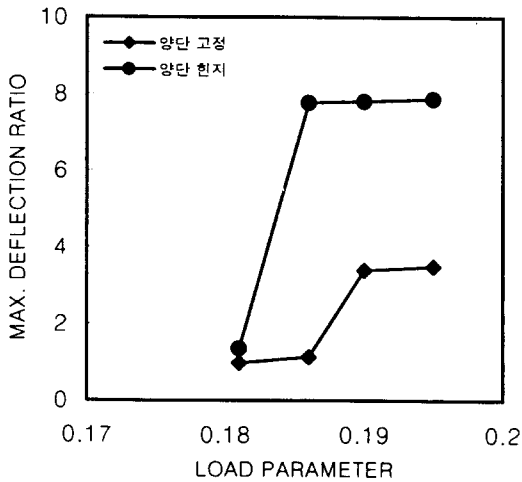


그림 6 지지조건에 따른 최대처짐비 비교

하지만 좌굴이 시작되는 하중을 비교할 때

(양단고정: $P_o=0.190$, 양단힌지: $P_o=0.186$), 양단힌지구조가 좌굴안정성면에서 비교할 수 없을 정도로 불리한 것은 아닌 것으로 판단된다.

5.4 형상함수에 따른 임계좌굴하중

5.3절에서는 $R=100\text{cm}$, $h=1\text{cm}$, $\beta=12^\circ$ 의 $\gamma=4.382$ 의 낮은 아치를 대상으로 지지조건에 따른 좌굴거동을 살펴보았다.

본절에서는 같은 매개변수 $\gamma=4.382$ 를 갖는 $R=64\text{cm}$, $h=1\text{cm}$, $\beta=15^\circ$ 의 또다른 아치를 선정하여 지지조건에 따른 좌굴거동을 조사한다. 단 좌굴이 일어나기 전후의 하중매개변수 $P_o=0.181$ 과 $P_o=0.195$ 에 대하여 같은 해석을 수행하여 형상은 다르나 형상매개변수가 같은 두 아치의 거동을 비교하였다. $R=100\text{cm}$ 의 $P_o=0.181$ 및 $P_o=0.195$ 에 해당하는 등분포하중 q 는 38kg/cm , 41kg/cm 이고, $R=64\text{cm}$ 의 $P_o=0.181$ 및 $P_o=0.195$ 에 해당하는 등분포하중 q 는 93kg/cm , 100kg/cm 이다.

이 하중들의 재하에 따른 시간매개변수와 처짐비의 상관관계를 양단고정인 경우와 양단힌지인 경우에 대하여 그림 7 및 그림 8에 각각 도시하였다. 그림에서 같은 하중매개변수에 대하여 시간매개변수에 따른 처짐비의 형상이 거의 같은 것을 확인할 수 있다. 약간의 차이가 있는 것은 두 아치의 형상, 하중매개변수를 일치시키는 과정에서 발생한 오차 때문인 것으로 보인다.

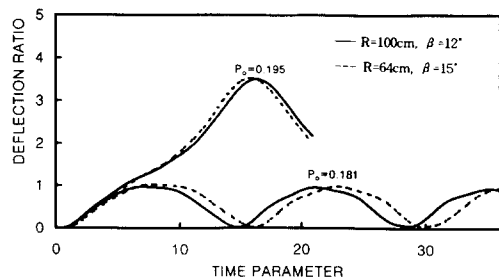


그림 7 형상매개변수가 같은 아치의 처짐비(양단고정)

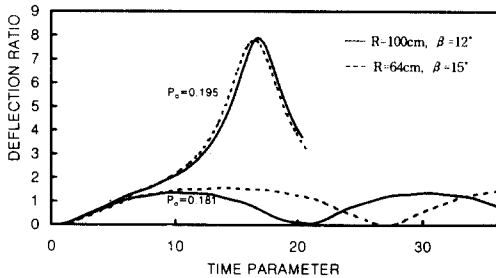


그림 8 형상매개변수가 같은 아치의 처짐비(양단힌지)

따라서 본 연구에서 사용한 시간매개변수를 사용할 때, 같은 형상매개변수 γ 를 갖는 아치들은 하중을 식 (7)에 따라 하중매개변수로 환산하여 같은 하중매개변수를 재하할 경우 같은 거동을 하는 것으로 추정된다.

6. 결 론

본 연구에서는 Total Lagrangian 문제형성에 따라 낮은 아치의 비선형 좌굴거동을 지지조건을 달리하여 해석하였다. Humphreys 등의 좌굴기준을 비선형 동적 거동해석에 반영하여 지지조건에 따른 낮은 아치의 좌굴거동을 모형해석을 통하여 비교·분석하였다.

본 논문에서 Humphreys 가 제안한 수직변위만을 고려하는 방법과는 달리 비대칭구조물의 좌판단시에도 적용할 수 있도록 수평변위를 반영한 처짐비식을 제안하고, 이를 프로그래밍하여 모형해석에 적용하였다.

모형해석결과, 양단힌지구조가 양단고정구조보다 다소 작은 하중매개변수에서 좌굴한다는 것을 확인하였다. 또한 양단 ힹ지구조가 양단 고정구조보다 좌굴전·후 모두 큰 처짐비가 얻어짐을 보았다. 따라서 예상대로 양단힌지구조가 양단고정구조보다 좌굴강성면에서 상대적으로 불리한 구조로 판단된다.

이밖에 같은 형상매개변수를 갖는 아치들은 지지조건에 관계없이 같은 하중매개변수를 재하할 경우, 같은 시간매개변수에서 처짐비를 기준으로 같은 거동을 하는 것으로 확인되었

다. 따라서 낮은 아치를 구조물에 채용할 경우에는 지지조건과 형상의 선택이 유의할 필요가 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. Raithel, A. and Franciosi, C., "Dynamic analysis of arches using Lagrangian approach," *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, Vol. 110, 1984, pp. 847-857.
2. Bathe, K.J., Ramm, E., and Wilson, E.L., "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 9, 1975, pp. 353-386.
3. Wood, R.D. and Zienkiewicz, O.C., "Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells," *Computer and Structures*, Vol. 7, No. 6, 1977, pp. 725-735.
4. Owen, D.R.J. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press, 594p.
5. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Inc., 1996, 1,037p.
6. Bathe, K.J., Ozdemir, H., and Wilson, E.L., "Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis," *Rep. No. UC SESM 74-4*, University of California, Berkeley, 1974, 178p.
7. Humphreys, J.S., "On dynamic snap buckling of shallow arches," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 3, No. 5, 1966, pp. 878-886.
8. 김연태, 허택녕, 김문겸, 황학주, "비선형운동해석에 의한 낮은 아치의 동적임계좌굴하중의 결정", *대한토목학회 논문집*, 제12권 제2호, 1992, pp. 43~54.
9. Fung, Y.C. and Kaplan, A., "Buckling of low arches and curved beams of small

- curvature, *Technical Note 2840*, National Advisory Committee for Aeronautics, 1952, pp.1-75.
10. Gregory, W.E. and Plaut, R.H., "Dynamic stability boundaries for shallow arches," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 108, No. EM6, 1982, pp. 1036-1050.
11. Walker, A.C., "A nonlinear finite element analysis of shallow circular arches," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 5, 1969, pp. 97-107.