

박벽 공간뼈대구조의 자유진동 및 안정성해석을 위한 일반이론

General Theory for Free Vibration and Stability Analysis of Thin-walled Space Frames

김 문 영*
Kim, Moon-Young

김 성 보**
Kim, Sung-Bo

요 지

전단변형 효과를 무시하는 경우에 보존력을 받는 박벽공간뼈대구조의 자유진동 및 안정성해석을 위한 일반이론을 유도한다. 이를 위하여 비대칭 박벽단면의 임의점을 통과하는 부재축과 이와 직각을 이루는 두 개의 좌표축을 도입하여 직각좌표계를 정의하고, 이 좌표축을 기준으로 semitangential 회전의 2차항을 고려하는 변위장을 도입하여 연속체에 대한 가상일의 원리로 부터 운동에너지, 탄성변형에너지, 그리고 초기응력에 의한 포텐셜에너지를 유도한다. 이를 이용하여 선형분포하중을 받는 박벽공간뼈대구조의 자유진동 및 안정성해석을 위한 운동방정식을 제시한다. 3차 Hermitian 다항식을 변위파라미터의 형상함수로 사용하여 박벽 공간 뼈대부재의 질량, 탄성강성 및 기하학적 강성행렬을 산정할 뿐만 아니라, 임의의 위치에 작용하는 분포하중에 대한 하중보정강성행렬(load-correction stiffness matrix)을 제시한다. 본 이론 및 방법의 타당성을 검증하기 위하여 수치해석을 수행하고 문헌의 결과와 비교하여 정당성을 입증한다.

Abstract

The general formulation for free vibration and stability analysis of unsymmetric thin-walled space frames is presented in case where the shear deformation effects are neglected. The kinetic and total potential energies are derived by applying the extended virtual work principle, introducing displacement parameters defined at the arbitrarily chosen axis and including warping deformation and second order terms of finite semitangential rotations. In formulating the finite element procedure, cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions of the two node space frame element. Mass, elastic stiffness, and geometric stiffness matrices for the unsymmetric thin-walled section are evaluated, and load-correction stiffness matrices for off-axis distributed loadings are considered. In order to illustrate the accuracy and practical usefulness of this formulation, finite element solutions for the free vibration and stability problems of thin-walled beam-columns and space frames are presented and compared with available solutions.

Keywords : free vibration, stability analysis, unsymmetric thin-walled space frames, arbitrarily chosen axis, finite semitangential rotations, cubic Hermitian polynomials

* 정희원·성균관대학교 토목공학과, 부교수
** 정희원·충북대학교 토목공학과, 전임강사

* 이 논문에 대한 토문을 1998년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

Vlasov¹⁾와 Timoshenko²⁾에 의해서 박벽보 이론이 개발된 이후, 박벽보 및 뼈대구조의 안정성 및 자유진동이론에 대한 활발한 연구가 수행되었다. 비대칭단면을 갖는 박벽 공간뼈대부재의 비틀 및 횡좌굴에 대한 해석이론은 문헌³⁾⁻⁶⁾에서 다루었으며, 김⁷⁾등은 단면회전의 2차효과를 고려한 박벽 공간뼈대구조의 횡좌굴이론을 제시하였다. 이러한 이론들은 대부분 도심축과 전단중심축의 두축에서 변위 및 단면력이 정의되기 때문에 단면내부의 임의의 점에서 하중이 작용하거나, 부재축을 따라 변단면을 갖는 경우 또는 탄소성해석시 축방향 단면성질의 변화를 정확하게 모델링하기 어렵다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해서는 단면내부의 임의축에서 모든 변위 파라미터 및 단면력의 성분을 정의하고 이에 대한 에너지식을 유도하는 일반이론이 요구된다.

본 논문에서는 박벽 보-기둥과 공간뼈대구조의 안정성거동을 조사하기 위하여, 전단변형효과를 무시하는 경우에 비대칭단면을 갖는 공간뼈대구조의 운동방정식을 유도하는 일반이론을 제시한다. 임의점을 통과하는 부재축과 두 개의 직각 좌표를 도입하고, 이 축에 대한 박벽단면의 이동 변위와 semitangential 회전^{8),9)}에 대응하는 회전 변위 그리고 뒹(warping)으로 인한 비틀변위를 도입하여 연속체의 선형화된 에너지원리를 적용함으로써, 박벽공간뼈대구조의 운동에너지, 탄성 변형에너지, 그리고 semitangential moment에 대응하는 초기 단면력에 의한 포텐셜에너지식을 유도한다. 현재의 일반이론은 비대칭단면의 신장-휨-비틀거동에 의한 연계효과를 정확히 고려한다. 제시된 이론의 유한요소 정식화과정을 다루기 위하여, 전단효과를 무시하는 3차 Hermitian 다항식을 횡변위와 비틀각에 대한 형상함수로 사용하여 질량행렬, 탄성강성행렬, 그리고 기하학적 강성행렬을 산정한다. 뿐만 아니라 off-axis 선형분포하중에 대한 하중보정강성행렬(load-correction stiffness matrices)를 고려한다. 비대칭 단면을 갖는 박벽공간뼈대구조의 자유진동 및 안

정성해석을 위한 수치해석예가 제시되고 문헌의 결과 및 해석해와와 비교, 검토를 통하여 본 이론의 타당성과 정확성을 입증한다.

2. 임의의 부재축에 대한 박벽 공간뼈대부재의 변위장

Semitangential 회전의 정의에 근거하여 임의의 부재좌표축에 대한 단면의 회전운동을 조사하고, 뒹함수를 고려하여 박벽 공간뼈대부재의 변위장을 유도하며, 또한 단면계수 및 단면력을 정의하고 좌표축의 변환에 따른 이들 계수 및 힘들의 변환관계식을 유도한다.

2.1 Semitangential 회전

본 연구에서는 박벽단면의 회전변위 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, 를 Argyris^{8),9)}의 semitangential 회전으로 가정한다. Semitangential 회전은 3차원 강체회전시 회전순서에 상관없이 최종위치가 동일하다는 기하학적 성질을 갖기 때문에 기하학적 비선형해석 및 좌굴해석시 유일한 포텐셜에너지를 정의할 수 있다. 본 절에서는 이전의 연구⁷⁾에서 적용하였던 Rodriguez의 유한한 회전각의 2차항이 semitangential 회전의 2차항과 동일하다는 것을 보이고, 전단을 무시하는 경우에 뒹으로 인한 비틀변형을 고려한 박벽단면의 변위장을 도입한다. Argyris에 의하여 정의된 semitangential 회전각의 변환 규칙을 다음과 같이 적용한다. 처음에 x_1 축에 대한 회전각 ω_1 에 의한 초기위치벡터 X_0 의 변환은 회전각의 이차항까지 고려하면 아래와 같이 표시된다.

$$X_1 = T_1 X_0 \quad (1a)$$

$$\text{여기서, } X_0^T = (x_1, x_2, x_3) \quad (1b)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_1 & -\sin\omega_1 \\ 0 & \sin\omega_1 & \cos\omega_1 \end{bmatrix}$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega_1^2/2 & -\omega_1 \\ 0 & \omega_1 & 1-\omega_1^2/2 \end{bmatrix} \quad (1c)$$

식 (1b)에서 윗첨자 T 는 전치행렬을 나타낸다. 회전각 ω_1 에 의하여 x_2, x_3 축에 대한 회전각을 나타내는 회전축벡터 $(0, \omega_2, 0)$ 과 $(0, 0, \omega_3)$ 는 각각 semitangential 회전의 정의에 따라 x_1 축에 대하여 $\omega_1/2$ 만큼 회전을 일으킨다. 이를 2차항까지 고려한 행렬식으로 나타내면 식 (2)와 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega_1/2 \\ 0 & \omega_1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \omega_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \omega_1/2 \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega_1/2 \\ 0 & \omega_1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \omega_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2b)$$

이제, 식 (1a)의 벡터 X_1 을 식 (2a)와 같이 변환된 새로운 회전축 $(0, 1, \omega_1/2)$ 에 대하여 ω_2 만큼 회전시키면 위치벡터 X_1 의 변환은 아래와 같이 표시된다.

$$X_2 = T_2 X_1 \quad (3a)$$

여기서,

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1-\omega_2^2/2 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 1-\omega_2^2/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1\omega_2/2 & 0 \\ \omega_1\omega_2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

식 (3b)의 첫 번째항과 두 번째항은 각각 회전축 $(0, 1, 0)$ 과 $(0, 0, \omega_1/2)$ 에 대하여 ω_2 만큼의 회전변환을 나타낸다. 한편, 식 (3a)로 표현되는 ω_2 만큼의 회전변환이 발생되는 동안 식 (2b)의 회전축 $(0, -\omega_1\omega_3/2, \omega_3)$ 은 semitangential 회전의 정의에 따라 $\omega_2/2$ 만큼 회전을 일으킨다. 이를

2차항까지 고려한 행렬식으로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \omega_2/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\omega_2/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_1\omega_3/2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \omega_3 \begin{bmatrix} \omega_2/2 \\ -\omega_1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

마지막으로, 식 (3a)의 벡터 X_2 를 식 (4)의 변환된 회전축 $(\omega_2/2, -\omega_1/2, 1)$ 에 대하여 ω_3 만큼 회전시키면 다음과 같은 최종 변환식을 얻는다.

$$X_3 = T_3 X_2 \quad (5a)$$

여기서,

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1-\omega_3^2/2 & -\omega_3 & 0 \\ \omega_3 & 1-\omega_3^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_1\omega_3/2 \\ 0 & 0 & -\omega_2\omega_3/2 \\ \omega_1\omega_3/2 & \omega_2\omega_3/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5b)$$

그러므로 최종적으로 변환된 위치벡터 X_3 는 식 (1a), 식 (3a) 그리고 식 (5a)로부터 아래와 같이 표시된다.

$$X_3 = T X_0 = T_3 T_2 T_1 X_0 \quad (6a)$$

여기서,

$$T = \begin{bmatrix} 1-\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} & -\omega_3 + \frac{\omega_1\omega_2}{2} & \omega_2 + \frac{\omega_1\omega_3}{2} \\ \omega_3 + \frac{\omega_1\omega_2}{2} & 1-\frac{\omega_1^2 + \omega_3^2}{2} & -\omega_1 + \frac{\omega_2\omega_3}{2} \\ -\omega_2 + \frac{\omega_1\omega_3}{2} & \omega_1 + \frac{\omega_2\omega_3}{2} & 1-\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \end{bmatrix} \quad (6b)$$

결과적으로 semitangential 회전이 인한 변

환행렬 T 는 아래와 같이 표시할 수 있는데, 이는 Rodriguez의 회전각에 의한 변환행렬과 비교하였을 때 2차항까지 동일하다는 것을 알 수 있다.

$$X_3 = TX_0 = (I + S + \frac{1}{2}S^2)X_0 \quad (7a)$$

여기서

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

따라서 초기위치벡터 X_0 가 semitangential 회전 ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$)에 의하여 일으킨 회전변위는 다음식으로 표현된다.

$$X_3 - X_0 = (S + \frac{1}{2}S^2)X_0 \quad (8)$$

2.2 박벽 공간배대부재의 변위장

그림 1은 비대칭 박벽단면의 변위장 및 단면력을 정의하기 위하여 본 연구에서 도입한 직각좌표계와 변위파라미터를 나타낸 것이다. x_1 축은 단면의 임의점을 통과하는 부재축이며, x_2 및 x_3 축은 x_1 축과 직각을 이루는 임의의 축이다. U_x, U_y, U_z 와 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 는 각각 x_1, x_2 및 x_3 축에 대

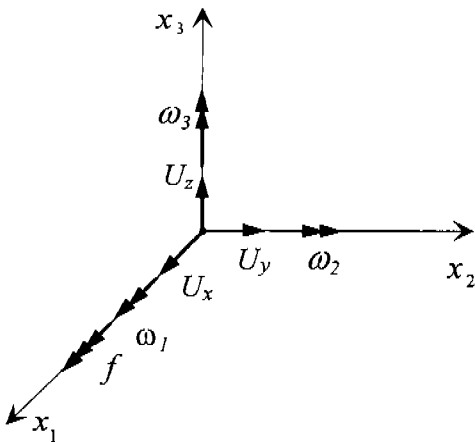


그림 1 좌표축과 변위파라미터

한 단면의 강제이동변위와 회전변위를 표시한다. 또한, f 는 뒀을 정의하는 파라미터이다. 여기서 일곱개의 변위파라미터 ($U_x, U_y, U_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3, f$)는 모두 x_1 의 함수이다. 단면의 강제회전에 의한 변위를 식 (8)과 같이 고려하면 부재축의 x_1 위치에서 박벽단면 임의점의 총변위 U 는 아래와 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} U &= U_0 + (X_3 - X_0) \\ &= U_0 + (S + \frac{1}{2}S^2)X_0 \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\text{여기서 } X_0 = (0, x_2, x_3) \quad (9b)$$

$$U_0 = (U_x + f\phi, U_y, U_z) \text{ 이고} \quad (9c)$$

ϕ 는 좌표원점에 대하여 정의된 뒀함수이다. 식 (9)의 총변위 U 에서 변위파라미터의 1차항과 2차항을 각각 U_i, U_i^* 으로 표시하면, 비대칭 박벽 단면의 변위장은 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$U^T = (U_1 + U_1^*, U_2 + U_2^*, U_3 + U_3^*) \quad (10)$$

여기서

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = U_x + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 + f\phi \quad (11a)$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = U_y - \omega_1 x_3 \quad (11b)$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = U_z + \omega_1 x_2 \quad (11c)$$

그리고

$$U_1^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[\omega_1 \omega_2 x_2 + \omega_1 \omega_3 x_3] \quad (12a)$$

$$U_2^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[-(\omega_1^2 + \omega_3^2)x_2 + \omega_2 \omega_3 x_3] \quad (12b)$$

$$U_3^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[\omega_2 \omega_3 x_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)x_3] \quad (12c)$$

전단변형이 무시되는 경우 ($\omega_2 = -U'_2$; $\omega_3 = U'_3$; $f = -\omega'_1 = -\theta'$)에 비대칭 박벽단면의 변위장은 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$U_1 = U_x - U'_2 x_3 - U'_3 x_2 - \theta' \phi \quad (13a)$$

$$U_2 = U_y - \theta x_3 \quad (13b)$$

$$U_3 = U_z + \theta x_2 \quad (13c)$$

그리고

$$U_1^* = \frac{1}{2}[-\theta U'_2 x_2 + \theta U'_3 x_3] \quad (14a)$$

$$U_2^* = \frac{1}{2}[-(\theta^2 + U'^2_2)x_2 - U'_2 U'_3 x_3] \quad (14b)$$

$$U_3^* = \frac{1}{2}[-U'_2 U'_3 x_2 - (\theta^2 + U'^2_3)x_3] \quad (14c)$$

여기서 윗첨자 '는 부재축 x_1 에 대한 미분을 나타낸다.

2.3 단면상수 및 단면력의 변환관계

그림 2는 비대칭 박벽단면의 변위파라미터, 단면계수 그리고 단면력의 변환관계식을 유도하기 위하여 정의하는 세 개의 직각좌표계를 나타낸 것이다. 그림 2에서 (x_2, x_3) 좌표계는 임의로 선택한 직각좌표계이고, (x^c_2, x^c_3) 와 (x^s_2, x^s_3) 는 각각 도심과 전단중심에서 주축(principal axes)과 평행한 좌표축을 나타낸다. c_2, c_3 는 (x_2, x_3) 축에서

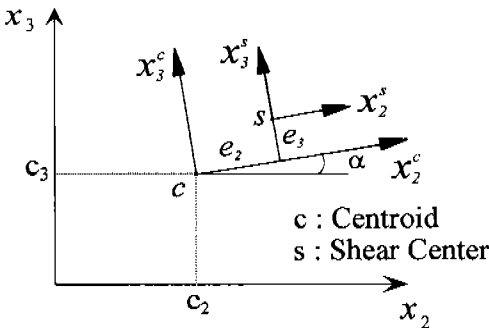


그림 2 세 개의 직각좌표계

도심의 좌표이고, e_2, e_3 는 (x^c_2, x^c_3) 축에서 전단중심의 좌표이며 α 는 x^c_2 축이 반시계방향으로 x_2 축과 이루는 사이각이다. 이들 세좌표축 사이의 변환관계는 다음과 같다.

$$x^c_2 = x_2 + e_2$$

$$x^c_3 = x_3 + e_3$$

$$x_2 = x^c_2 \cos \alpha - x^c_3 \sin \alpha + c_2$$

$$x_3 = x^c_2 \sin \alpha + x^c_3 \cos \alpha + c_3 \quad (15)$$

이제, 임의 좌표축 x_2, x_3 에 대하여 정의되는 단면상수들을 다음과 같이 정의한다.

$$S_2 = \int_A x_2 dA = c_2 A, \quad S_3 = \int_A x_3 dA = c_3 A$$

$$I_2 = \int_A x_2^2 dA, \quad I_3 = \int_A x_3^2 dA$$

$$I_{23} = \int_A x_2 x_3 dA, \quad I_{2\phi} = \int_A x_2 \phi dA$$

$$I_{3\phi} = \int_A x_3 \phi dA, \quad I_{\phi} = \int_A \phi^2 dA \quad (16)$$

여기서, A 는 단면적을 나타낸다. (x^c_2, x^c_3) 와 (x^s_2, x^s_3) 의 두 좌표계에서 정의되는 단면상수들은 식 (16)의 기호에 오른쪽 윗첨자 c, s 를 삽입하여 표시하며 이 규칙은 변위파라미터, 단면력에 대하여도 적용한다. 식 (16)에서 ϕ 는 임의의 부재축 x_1 에 대한 뒀함수이며, 도심축 x^c_2 와 전단중심축 x^s_2 에 대하여 각각 정의된 뒀함수 ϕ^c, ϕ^s 와의 관계식은 다음과 같다.

$$\phi = \phi^c - x^c_2 d_3 + x^c_3 d_2 \quad (17a)$$

$$\phi = \phi^s - x^s_2 e_3 + x^s_3 e_2 \quad (17b)$$

여기서, d_2, d_3 는 (x_2, x_3) 축의 원점에서 (x^c_2, x^c_3) 좌표축과 평행한 방향으로 전단중심까지의 거리이며 각각 아래와 같이 표시된다.

$$d_2 = c_2 \cos \alpha + c_3 \sin \alpha + e_2 \quad (18a)$$

$$d_3 = -c_2 \sin \alpha + c_3 \cos \alpha + e_3 \quad (18b)$$

식(17)에서 정의된 뒀함수가 단면에 대해 정규화(normalization)되어 있다고 가정하면 아래의 성질을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} S_\phi &= \int_A \phi \, dA = 0, & S_\phi^c &= \int_A \phi^c \, dA = 0, \\ S_\phi^s &= \int_A \phi^s \, dA = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

이제 식(15)와 식(19)를 고려하면 다음과 같이 좌표계에서 정의되는 단면상수 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} I_2 &= I_2^s \sin^2 \alpha + I_2^c \cos^2 \alpha + c_3^2 A \\ I_3 &= I_3^s \cos^2 \alpha + I_3^c \sin^2 \alpha + c_2^2 A \\ I_{2\phi} &= -I_2^s \sin \alpha \, d_3 + I_2^c \cos \alpha \, d_2 \\ I_{3\phi} &= -I_3^s \cos \alpha \, d_3 - I_3^c \sin \alpha \, d_2 \\ I_{23} &= (I_2^s - I_2^c) \sin \alpha \cos \alpha + c_2 c_3 A \\ I_\phi &= I_\phi^s + I_2^s d_3^2 + I_3^c d_2^2 \end{aligned} \quad (20)$$

특히, 좌표원점이 도심을 통과하고 좌표축 x_2, x_3 가 주축인 경우에 윗식은 다음과 같이 간략히 표현된다.

$$\begin{aligned} I_2 &= I_2^s, & I_3 &= I_3^c, & I_{23} &= 0, & I_{3\phi} &= -I_3^c e_3, \\ I_{2\phi} &= I_2^s e_2, & I_\phi &= I_\phi^s + I_2^s e_3^2 + I_3^c e_2^2 \end{aligned} \quad (21)$$

단면이 강체거동한다는 가정 때문에 면내변형도 ($\epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}$)는 영으로 간주하고 박벽단면 내에서 평면응력상태를 가정하므로, 증분 단면력을 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_A \tau_{11} \, dA, & F_2 &= \int_A \tau_{12} \, dA, & F_3 &= \int_A \tau_{13} \, dA \\ M_1 &= \int_A (\tau_{13} x_2 - \tau_{12} x_3) \, dA, & M_2 &= \int_A \tau_{11} x_3 \, dA, \end{aligned}$$

$$M_3 = -\int_A \tau_{11} x_2 \, dA, \quad M_\phi = \int_A \tau_{11} \phi \, dA,$$

$$M_R = \int_A (\tau_{12} \phi_{,2} + \tau_{13} \phi_{,3}) \, dA$$

$$M_P = \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) \, dA \quad (22)$$

여기서, τ_{ij} 는 응력성분이고 F_1, F_2 그리고 F_3 는 각각 축력과 전단력이다; M_2 와 M_3 는 각각 x_2 와 x_3 축에 대한 휨모멘트이다; M_1 은 x_1 축에 대한 비틀림모멘트, M_R 와 M_ϕ 는 각각 x_1 축에 대한 구속된 비틀림모멘트와 바이모멘트이다; M_P 는 임의의 부재축에서 정의된 Wagner effect를 나타내는 단면력이며 전단중심축에서 정의된 M_ϕ^s 의 결과식을(7) 참조하면 다음식과 같이 표현된다.

$$M_P = \beta_1 F_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \beta_\phi^s M_\phi \quad (23)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_1^c + c_2^2 + c_3^2 - e_2^2 - e_3^2 \\ &+ \gamma_3(e_2 - d_2) + \gamma_2(e_3 - d_3) \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\beta_2 = \gamma_2 \cos \alpha + \gamma_3 \sin \alpha, \quad \beta_3 = \gamma_2 \sin \alpha - \gamma_3 \cos \alpha \quad (24b)$$

$$\gamma_2 = \beta_2^c + 2d_3 - d_2 \beta_2^s, \quad \gamma_3 = -\beta_3^c + 2d_2 + d_3 \beta_3^s \quad (24c)$$

특히, 좌표원점이 도심을 통과하고 좌표축 x_2, x_3 가 주축인 경우에 윗식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_1^c - e_2^2 - e_3^2, & \beta_2 &= \beta_2^c + 2e_3 - e_2 \beta_2^s, \\ \beta_3 &= \beta_3^c - 2e_2 - e_3 \beta_3^s \end{aligned} \quad (25)$$

한편, 식(15)를 고려하면 다음과 같이 세좌표계에서 정의되는 단면력 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$F_2 = F_2^s \cos \alpha - F_3^s \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= F_2^i \sin \alpha + F_3^i \cos \alpha, \\
 M_1 &= M_1^i - F_2^i d_3 + F_3^i d_2, \\
 M_2 &= -M_2^i \sin \alpha + M_3^i \cos \alpha + c_3 F_1^i, \\
 M_3 &= M_3^i \cos \alpha + M_2^i \sin \alpha - c_2 F_1^i \\
 M_\phi &= M_\phi^i + M_3^i d_3 + M_2^i d_2, \\
 M_R &= M_R^i - F_2^i d_3 + F_3^i d_2
 \end{aligned} \tag{26}$$

좌표원점이 도심을 통과하고 좌표축 x_2, x_3 가 주축인 경우에 윗식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 F_2 &= F_2^i, \quad F_3 = F_3^i, \\
 M_1 &= M_1^i - F_2^i e_3 + F_3^i e_2, \\
 M_2 &= M_2^i, \quad M_3 = M_3^i \\
 M_\phi &= M_\phi^i + M_3^i e_3 + M_2^i e_2, \\
 M_R &= M_R^i - F_2^i e_3 + F_3^i e_2
 \end{aligned} \tag{27}$$

또한, 단면력에 대한 정의식에 후크의 법칙을 적용하고, 변위-변형도 관계식의 변위를 대입하여 단면에 대하여 적분을 행하면 다음의 힘-변위 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= EA U_x' - E S_3 U_x'' - E S_2 U_x''' \\
 M_2 &= E S_3 U_x' - EI_2 U_x'' - EI_{23} U_y'' - EI_{3\phi} \theta'' \\
 M_3 &= -E S_2 U_x' + EI_{23} U_x'' + EI_3 U_y'' - EI_{2\phi} \theta'' \\
 M_\phi &= -EI_{3\phi} U_x'' - EI_{2\phi} U_y'' - EI_\phi \theta'' \\
 M_{st} &= GJ \theta''
 \end{aligned} \tag{28}$$

좌표원점이 도심을 통과하고 좌표축 x_2, x_3 가 주축인 경우에 윗식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= EA U_x', \quad M_2 = -EI_2 U_x'' - EI_{3\phi} \theta'', \\
 M_3 &= EI_3 U_y'' + EI_{2\phi} \theta'' \\
 M_\phi &= -EI_{3\phi} U_x'' - EI_{2\phi} U_y'' - EI_\phi \theta''
 \end{aligned} \tag{29}$$

3. 박벽 공간뼈대부재의 운동방정식

가상일의 원리를 이용하여 초기단면력에 대한 평형방정식, 박벽 공간뼈대부재의 에너지식과 운동방정식을 유도한다.

3.1 박벽 공간뼈대부재의 가상일의 원리

Total lagrangian 정식화에 따른, 3차원 연속체에 대한 가상일의 원리는 아래와 같이 표시된다.

$$\int_V {}^t\tau_{ij} \delta^e \epsilon_{ij} dV = \int_V (b_i - \rho \ddot{U}_i) \delta^e U_i dV + \int_s {}^t T \delta^e U_i ds \tag{30}$$

여기서 ${}^t\tau_{ij}$ 와 ${}^t\epsilon_{ij}$ 는 각각 second Piola-Kirchhoff 응력과 Green-Lagrange의 변형도 텐서; \ddot{U}_i 와 U_i 는 각각 가속도와 변위벡터; b_i 와 T_i 는 물체력과 표면력을 나타내고 ρ 는 밀도이다. 이때 δ 은 변분을 의미한다.

자유진동 및 정적 안정성해석을 수행하기 위하여 보존력을 받는 연속체를 생각한다. 초기변위는 없고, 초기응력 ${}^o\tau_{ij}$, 초기물체력 ob_i , 그리고 표면력 oT_i 이 자체로 평형을 이루는 경우에, 변위, 변형도, 응력, 그리고 힘의 충분관계식은 다음과 같이 표시된다.

$${}^tU_i = U_i + U_i^* \tag{31a}$$

$${}^t\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} + e_{ij}^* \tag{31b}$$

$${}^t\tau_{ij} = {}^o\tau_{ij} + \tau_{ij} \tag{31c}$$

$$b_i = {}^ob_i \tag{31d}$$

$${}^tT_i = {}^oT_i + T_i \tag{31e}$$

여기서 윗첨자 'o'와 't'는 각각 변수의 초기치 및 총 크기를 나타내고 윗첨자 표시가 없는 변수는 충분량을 나타낸다. U_i 와 U_i^* 는 각각 변위파라미터의 1차 및 2차항을 나타낸다(식(13) 및 식(14) 참조). e_{ij} 와 η_{ij} 는 각각 본래의 선형 및 비선형 Green-Lagrange 변형도 증분이고 e_{ij}^* 는 U_i^* 로 인한 선형 변형도증분을 표시한다. 이들

변형도의 정의식은 다음과 같다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}), \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2}U_{i,k} \cdot U_{j,ks}$$

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2}(U_{i,j}^* + U_{j,i}^*) \quad (32)$$

여기서 아래첨자 콤마는 임의의 직각좌표 (x_1, x_2, x_3) 에 대한 편미분을 나타낸다.

초기응력 ${}^0\tau_{ij}$, 초기물체력 0b_i 그리고 표면력 0T_i 이 자체로 평형을 이루는 경우에 평형방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\int_V {}^0\tau_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V {}^0b_i \delta U_i dV + \int_S {}^0T_i \delta U_i ds \quad (33)$$

식 (32)을 식 (30)에 대입하여 고차항을 무시하고 그리고 식 (33)을 고려하면 다음과 같이 선형화된 가상일의 원리를 얻는다.

$$\int_V [\rho \ddot{U}_i + \tau_{ij} \delta e_{ij} + \tau_{ij} \delta(\eta_{ij} + e_{ij}^*) - b_i \delta U_i] dV - \int_S T_i \delta U_i ds = \int_S T_i \delta U_i ds \quad (34)$$

여기서, 첫번째항은 박벽공간뼈대요소의 운동에너지를 나타내고 두번째항은 탄성변형 에너지를 나타낸다. 이에 반하여 초기응력으로 인한 기하학적 강성항은 비선형 변형도와 회전파라미터의 2차항의 결합된 효과로부터 얻는다. 그리고 마지막항은 부재력에 대응하는 포텐셜 에너지에 해당한다.

3.2 선형분포하중하에서 초기 단면력의 결정

선형분포하는 축하중과 횡하중을 받는 공간뼈대요소(그림 3)에 대하여 요소내에 발생하는 축방향력, 전단력, 그리고 휨모멘트의 분포를 결정하여야 한다. 초기물체력은 단면내의 (x_{b2}, x_{b3}) 위치에서 선형분포하는 것으로 가정하면 다음식으로 표현할 수 있다.

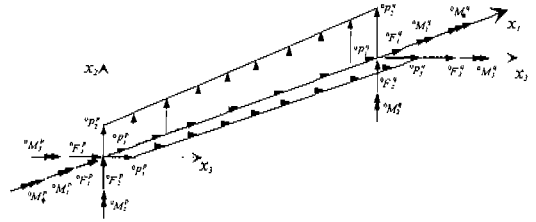


그림 3 선형분포하중과 부재력을 받는 공간뼈대요소

$${}^0b_1 = {}^0P_x \delta(x_2 - x_{b2}, x_3 - x_{b3})$$

$${}^0b_2 = {}^0P_y \delta(x_2 - x_{b2}, x_3 - x_{b3})$$

$${}^0b_3 = {}^0P_z \delta(x_2 - x_{b2}, x_3 - x_{b3}) \quad (35)$$

여기서

$${}^0P_x = P_1^l + (P_1^r - P_1^l) \frac{x_1}{L}$$

$${}^0P_y = P_2^l + (P_2^r - P_2^l) \frac{x_1}{L}$$

$${}^0P_z = P_3^l + (P_3^r - P_3^l) \frac{x_1}{L} \quad (36)$$

식 (35)에서 δ 는 Dirac delta 함수를 나타낸다. 한편, 식 (35)와 변위장 및 단면력의 정의를 고려하여 초기응력 ${}^0\tau_{ij}$, 초기물체력 0b_i , 그리고 표면력 0T_i 의 자체평형을 나타내는 식 (33)을 단면에 대하여 적분하면 아래와 같은 평형방정식을 얻는다.

$$\delta \int_L [{}^0F_1 U_x' - {}^0M_2 U_y'' + {}^0M_3 U_z'' - {}^0M_\theta \theta'' + ({}^0M_1 - {}^0M_\theta) \theta'] dx_1 = \delta \int_L [{}^0P_x (U_x - U_x' x_{b3} - U_y' x_{b2} - \theta' \phi) + {}^0P_y (U_y - \theta x_{b3}) + {}^0P_z (U_z + \theta x_{b2})] dx_1 + \delta U_0^T {}^0F_0 \quad (37)$$

여기서,

$$\phi = \hat{\phi}(x_{b2}, x_{b3}), \quad U_\epsilon = [U^b, U^q], \quad {}^0F_\epsilon = [{}^0F^b, {}^0F^q],$$

$$\begin{aligned}
 U^\alpha &= [U_x^\alpha, U_y^\alpha, U_z^\alpha, \omega_x^\alpha, \omega_y^\alpha, \omega_z^\alpha, f^\alpha]^T \\
 \alpha &= p, q \\
 {}^\circ F^\alpha &= [{}^\circ F_1^\alpha, {}^\circ F_2^\alpha, {}^\circ F_3^\alpha, {}^\circ M_1^\alpha, {}^\circ M_2^\alpha, {}^\circ M_3^\alpha, {}^\circ M_\phi^\alpha]^T \\
 \alpha &= p, q \tag{38}
 \end{aligned}$$

윗식의 변분을 취하면 아래의 초기평형조건식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 {}^\circ F_1' + {}^\circ P_x &= 0 \\
 {}^\circ M_2'' + {}^\circ P_x' x_{b2} + {}^\circ P_z &= 0 \\
 {}^\circ M_3'' - {}^\circ P_x' x_{b2} - {}^\circ P_y &= 0 \\
 {}^\circ M_1' + {}^\circ P_x \hat{\phi} - {}^\circ P_y x_{b3} + {}^\circ P_z x_{b2} &= 0 \tag{39}
 \end{aligned}$$

한편, 부재단면의 응력상태를 평면응력으로 가정하면 다음의 평형조건을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 {}^\circ \tau_{11.1} + {}^\circ \tau_{2.2} + {}^\circ \tau_{13.3} + {}^\circ b_1 &= 0 \\
 {}^\circ \tau_{21.1} + {}^\circ b_2 &= 0 \\
 {}^\circ \tau_{31.1} + {}^\circ b_3 &= 0 \tag{40}
 \end{aligned}$$

위의 첫번째식에 $\hat{\phi}$, x_2 , x_3 를 각각 곱하여 단면에 대하여 적분을 행하면 다음의 조건식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 {}^\circ M_\phi' - {}^\circ M_R + {}^\circ P_x \hat{\phi} &= 0 \\
 {}^\circ M_3' + {}^\circ F_2 - {}^\circ P_x x_{b2} &= 0 \\
 {}^\circ M_2' - {}^\circ F_3 + {}^\circ P_x x_{b3} &= 0 \tag{41}
 \end{aligned}$$

또한, 식(40)의 두 번째, 세 번째식을 단면에 대하여 적분을 행하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 {}^\circ F_2' + {}^\circ P_y &= 0 \\
 {}^\circ F_3' + {}^\circ P_z &= 0 \tag{42}
 \end{aligned}$$

결과적으로, 식(39), 식(40) 그리고 식(42)에서 선형분포하중을 받는 공간뼈대부재에 발생하는 초기 축방향력, 전단력, 휨모멘트, 그리고 비틀림모멘트는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 {}^\circ F_1 &= -{}^\circ F_1' - P_1' x_1 - (P_1' - P_1'') \frac{x_1^2}{2L} \\
 {}^\circ F_2 &= -{}^\circ F_2' - P_2' x_1 - (P_2' - P_2'') \frac{x_1^2}{2L} \\
 {}^\circ F_3 &= -{}^\circ F_3' - P_3' x_1 - (P_3' - P_3'') \frac{x_1^2}{2L} \\
 {}^\circ M_1 &= -{}^\circ M_1' + {}^\circ P_x \hat{\phi} + \left[P_2' x_1 + (P_2' - P_2'') \frac{x_1^2}{2L} \right] x_{b3} \\
 &\quad - \left[P_3' x_1 + (P_3' - P_3'') \frac{x_1^2}{2L} \right] x_{b2} \\
 {}^\circ M_2 &= -{}^\circ M_2' - {}^\circ F_3' x_1 - P_3' \frac{x_1^2}{2} - (P_3' - P_3'') \frac{x_1^3}{6L} \\
 &\quad - \left[P_1' x_1 + (P_1' - P_1'') \frac{x_1^2}{2L} \right] x_{b3} \\
 {}^\circ M_3 &= -{}^\circ M_3' + {}^\circ F_2' x_1 + P_2' \frac{x_1^2}{2} + (P_2' - P_2'') \frac{x_1^3}{6L} \\
 &\quad + \left[P_1' x_1 + (P_1' - P_1'') \frac{x_1^2}{2L} \right] x_{b2} \tag{43}
 \end{aligned}$$

3.3 박벽 공간뼈대부재의 총포텐셜에너지와 운동방정식

박벽공간뼈대의 총포텐셜에너지 Π 는 다음과 같이 표시된다.

$$\Pi = -\Pi_M + \Pi_E + \Pi_G - \Pi_{ext} \tag{44}$$

여기서 Π_M , Π_E , Π_G 그리고 Π_{ext} 는 각각 운동에너지, 선형탄성에너지, 초기응력에 의한 에너지 그리고 단부의 증분부재력에 의한 에너지를 나타내며 각각의 항은 다음과 같다.

$$\Pi_M = \frac{1}{2} \int_L \int_A \rho \dot{U}_i^2 dA dx_1 \tag{45a}$$

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \int_L \int_A \tau_{ij} e_{ij} dA dx_1 \tag{45b}$$

$$\begin{aligned} \Pi_c = & \int_L \int_A [\tau_{ij}(n_{ij} + e_{ij}) - {}^0b_i U_i] dA dx_1 \\ & - \int_s T_i U_i ds \end{aligned} \quad (45c)$$

$$\Pi_{ext} = \frac{1}{2} \int_s T_i U_i ds \quad (45d)$$

변위-변형도 관계식을 대입하고 단면력의 정역식을 고려하여 단면에 대하여 적분을 수행하면 윗식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Pi_M = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_L [A(\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2 + \dot{U}_z^2) \\ & + I_x \dot{\theta}^2 + I_y \dot{U}_y'^2 + I_z \dot{U}_z'^2 + I_p \dot{\theta}'^2 \\ & - 2S_x \dot{U}_x \dot{U}_z' - 2S_y \dot{U}_y \dot{U}_z' + 2I_{23} \dot{U}_z' \dot{U}_y' + 2I_{23} \dot{U}_z' \dot{\theta}' \\ & + 2I_{3y} \dot{U}_y' \dot{\theta}' + 2S_x \dot{U}_x \dot{\theta}' - 2S_y \dot{U}_y \dot{\theta}'] dx_1 \end{aligned} \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_E = & \frac{1}{2} \int_L [EAU_x'^2 + EI_x U_y''^2 \\ & + EI_x U_z''^2 + GJ\theta'^2 + EI_p \theta''^2 \\ & - 2ES_x U_x' U_z'' - 2ES_y U_x' U_y'' + 2EI_{23} U_y'' U_z'' \\ & + 2EI_{3y} U_y'' \theta'' + 2EI_{23} U_z'' \theta''] dx_1 \end{aligned} \quad (46b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \frac{1}{2} \int_L [{}^0F_1(U_y'^2 + U_z'^2) + {}^0M_p \theta'^2 \\ & + {}^0M_x(U_x' U_y'' - U_x'' U_y') + {}^0M_z(U_y'' \theta - U_y' \theta') \\ & + {}^0M_s(U_z'' \theta - U_z' \theta') + {}^0F_3 U_z' \theta \\ & + {}^0F_3 U_y' \theta] dx_1 \end{aligned} \quad (46c)$$

$$\Pi_{ext} = U_i^T F_c \quad (46d)$$

여기서 U_c 와 F_c 는 각각 부재양단의 변위벡터와 부재력벡터를 나타내며 윗식을 총포텐셜에너지 Π 에 대입하고 4개의 변위성분 (U_x, U_y, U_z, θ)에 대하여 변분을 취하면 박벽공간뼈대부재의 운동방정식을 얻을 수 있다.

4. 유한요소법을 이용한 정식화

4.1 2절점 Hermitian 공간뼈대요소

그림 4는 절점당 7개의 자유도를 갖는 2절점 Hermitian 뼈대요소를 보여준다. 형상함수와 절점변위벡터로 표현되는 변위장을 식 (44)에 대입하여 부재길이에 대하여 수치적분을 수행하면 전체포텐셜에너지식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \dot{U}^T M_c \dot{U}_c + \frac{1}{2} U_c^T (K_e + K_c) U_c - U_c^T F_c \quad (47)$$

여기서 M_c, K_e , 그리고 K_c 는 각각 14×14 의 부재 질량행렬, 탄성 그리고 기하학적 강성행렬을 나타낸다. 식 (47)을 변분을 취하고 직접강성법에 의한 좌표변환을 수행하면 공간 박벽뼈대구조의 행렬 운동방정식을 얻는다.

$$M\ddot{U} + [K_E + \lambda K_G]U = 0 \quad (48)$$

여기서 M, K_E 그리고 K_G 는 각각 전체구조물 질량행렬, 탄성강성 및 기하강성 행렬이며 λ 는 하중파라미터이다. $U = e^{i\omega t} H$ 라고 가정하면 식 (48)은 다음과 같이 이종고유치문제로 귀결된다.

$$\omega^2 M H = (K_E + \lambda K_G) H \quad (49)$$

여기서 ω 는 구조물의 고유각진동수를 나타낸다. 자유진동해석의 경우에 초기 하중값 λ 를 대입하여 고유치해석을 행하고, 좌굴해석에서는 고유각진동수가 영에 대응하는 고유치 λ_c 를 산정한다.

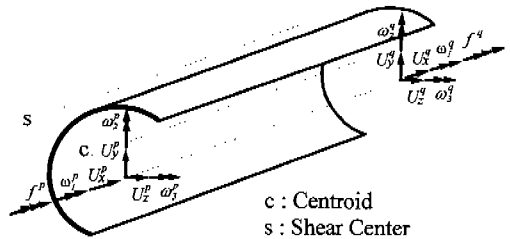


그림 4 2절점 Hermitian 공간뼈대요소

4.2 하중보정강성행렬 (Load correction stiffness matrices)

전장에서는, 초기상태에서 외부하중은 부재축의 좌표원점에 작용한다고 가정하여 박벽공간패대의 강성행렬을 유도하였다. 하지만 외부하중이 단면내부의 임의의 점에 작용하는 경우, 이를 보정하는 과정이 필요하다. 절점 r에 작용하는 초기하중 0F_1 , 0F_2 그리고 0F_3 의 작용점의 위치가 각각 $(0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $(0, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ 그리고 $(0, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ 이면 추가적인 포텐셜에너지는 식(34) 및 식(12)를 고려하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_r = & -\frac{1}{2} {}^0F_1 [\omega_1^r \omega_2^r \bar{x}_2 + \omega_1^r \omega_3^r \bar{x}_3] \\ & -\frac{1}{2} {}^0F_2 [-(\omega_1^{r2} + \omega_2^{r2}) \hat{x}_2 \\ & + \omega_2^r \omega_3^r \hat{x}_3] - \frac{1}{2} {}^0F_3 [\omega_2^r \omega_3^r \tilde{x}_2 - (\omega_1^{r2} + \omega_2^{r2}) \tilde{x}_3] \end{aligned} \quad (50)$$

따라서 off-axis 절점하중에 의한 하중보정강성행렬은 아래식과 같다.

$$K_{off} = \begin{bmatrix} {}^0F_2 \hat{x}_2 + {}^0F_3 \tilde{x}_2 - 0.5 {}^0F_1 \bar{x}_2 & -0.5 {}^0F_1 \bar{x}_3 \\ \text{symm.} & {}^0F_3 \tilde{x}_3 - 0.5 {}^0F_2 \hat{x}_3 - 0.5 {}^0F_3 \tilde{x}_3 \\ & & {}^0F_2 \hat{x}_2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

한편, 부재축을 따라 선형분포하는 하중 0P_x , 0P_y , 그리고 0P_z 의 작용점의 위치가 각각 $(0, \bar{x}_{b2}, \bar{x}_{b3})$, $(0, \hat{x}_{b2}, \hat{x}_{b3})$, $(0, \tilde{x}_{b2}, \tilde{x}_{b3})$ 일 때도 위와같은 과정을 거쳐 추가적인 포텐셜에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_b = & -\frac{1}{2} \int_L {}^0P_x [\omega_1 \omega_2 \bar{x}_{b2} + \omega_1 \omega_3 \bar{x}_{b3}] \\ & + {}^0P_y [-(\omega_1^2 + \omega_2^2) \hat{x}_{b2} + \omega_2 \omega_3 \hat{x}_{b3}] \\ & + {}^0P_z [\omega_2 \omega_3 \tilde{x}_{b2} - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \tilde{x}_{b3}] dx_1 \end{aligned} \quad (52)$$

또한, 식(51)의 하중보정강성행렬은 전체좌표계에서 유도하였기 때문에 좌표변환 과정이 필요 없지만, 식(52)의 선형분포하중에 대한 하중보정강성행렬은 부재좌표계에서 유도하였기 때문에 좌표변환을 한 후 자유진동 및 안정성 해석을 수행하여야 한다.

5. 수치해석예

5.1 단순지지된 박벽보의 안정성해석

본 예제에서는 축방향 하중을 받으며 비대칭단면을 갖는 단순지지된 박벽보의 안정성해석을 수행하였다. 2절점을 갖는 Hermitian 보요소로서 단순보를 모델링할 때 각각 6개의 요소를 사용하였다. 재료의 성질 및 단면의 제원은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E &= 10^4 N/cm^2, \quad G = E/2, \quad L = 100cm, \quad A = 30cm^2 \\ I_2^c &= 100cm^4, \quad I_3^c = 800cm^4, \quad I_x^c = 150cm^4, \\ J &= 10cm^4 \quad e_2 = 6cm, \quad e_3 = 10cm, \quad \beta_2^c = 5cm, \\ \beta_3^c &= -10cm \end{aligned}$$

단면의 형상이 비대칭이므로 휨 좌굴과 비틀 좌굴이 연계되어 발생하게 되고 그 결과를 표1에 나타내었다. 표1에서 Method1은 도심축에서 7개의 변위성분을 정의했을 때의 결과이고 Method2는 부재축을 도심축으로부터 (100,50)만큼 이동시키고 주축을 1 radian만큼 회전시켜서 해석을 수행한 결과이다 (즉, $c_2=100cm$, $c_3=50cm$, $\alpha=1rad$).

5.2 단순지지된 박벽보의 자유진동 해석

본 예제에서는 축방향 하중을 받으며 비대칭단면을 갖는 단순지지된 박벽보의 자유진동 해석을

표 1 박벽보의 휨-비틀 좌굴하중 [N]

Mode	해석해 ²⁾	Method 1	Method 2
1	279.897	279.901	279.902
2	1308.45	1308.57	1308.57
3	36513.6	36517.2	36517.2

수행하였다. 밀도 ($\rho=0.00785\text{kg/cm}^3$)를 제외한 단순보의 제원 및 유한요소모델링은 앞의 예제와 동일하며 해석결과는 표2에 나타내었다. 표2에서 Method1은 도심축에서 7개의 변위성분을 정의했을 때의 결과이고 Method2는 부재축을 도심축으로부터 (100,50) 만큼 이동시키고 주축을 1 radian만큼 회전시켜서 해석을 수행한 결과이다 (즉, $c_2=100\text{cm}$, $c_3=50\text{cm}$, $\alpha=1\text{rad}$). 초기의 축력이 없는 경우 및 축력이 작용하는 경우에 대하여, 7개의 변위성분을 도심축에서 정의했을 때와 임의의 점에서 정의했을 때의 결과가 횡변위는 도심축에서 정의하고 비틀변위는 전단중심축에서 정의하여 구한 이론해²⁾와 최대 1% 이내로 잘 일치함을 보여준다.

5.3 횡하중을 받는 직각 뼈대구조의 안정성 해석

그림 5는 구형단면을 갖고 자유단에 횡하중을 받는 직각뼈대구조이다. 횡하중의 위치를 단면의 하단부, 도심 및 상단부에 작용시켰을 때 본논문에 제시한 뼈대요소를 사용하여 횡좌굴하중을 산정하였다. 또한, 범용 유한요소 해석프로그램인 ABAQUS¹³⁾에서 지원되는 9절점 쉘요소

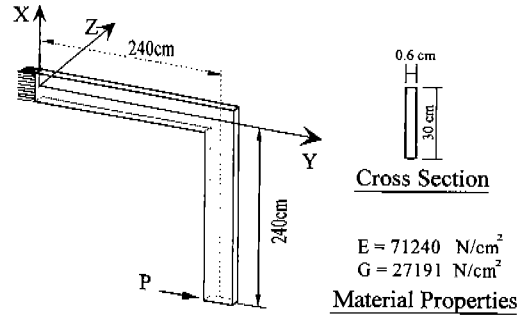


그림 5 자유단에 횡하중을 받는 직각뼈대구조

(S9R5)를 이용하여 횡좌굴하중을 계산하였으며 그결과를 본논문의 해석결과와 함께 표 3에 나타내었다. 직각뼈대구조를 모델링한 쉘요소의 갯수는 136개이며 본논문의 결과에서 사용된 뼈대요소는 20개이다. 표 3의 본 논문의 해석결과에서 Method 1은 단면의 도심에서 변위파라미터를 정의한 결과이고, Method 2는 단면의 상부에서 변위파라미터를 정의한 결과이며, Method 3은 단면의 하부에서 변위파라미터를 정의한 결과이다. 또한, 각 Method의 오른쪽 열과 왼쪽 열의 값은 각각 양의 좌굴하중(그림 5에서의 하중작용방향)과 음의 좌굴하중을 나타낸다.

표 2 박벽보의 휨-비틀 고유각진동수 [(radian/sec)²]

Mode	zero axial force			$F_1 = -200\text{N}$ at $(x_2, x_3) = (-5, 7)$		
	Analytic Solution ²⁾	Method 1	Method 2	Analytic Solution ²⁾	Method 1	Method 2
n=1	1.17287	1.17287	1.17285	.290794	.290794	.290824
	5.46156	5.46156	5.46155	5.11979	5.11979	5.11979
	136.963	136.963	136.963	134.184	134.184	134.184
n=2	5.50341	5.50342	5.50676	2.32697	2.32697	2.33032
	82.1628	82.1633	82.1633	80.4626	80.4632	80.4632
	1621.25	1621.26	1621.26	1612.80	1612.81	1612.81
n=3	14.2024	14.2025	14.2423	7.20439	7.20450	7.24393
	404.560	404.573	404.574	400.665	400.678	400.678
	5835.63	5835.82	5835.83	5822.04	5822.24	5822.24

표 3 Critical loads of cantilever right-angle frame under end force [N]

Loading Point	This Study						ABAQUS ¹³⁾	
	Method 1		Method 2		Method 3			
Bottom	-0.70024	1.03141	-0.73156	1.04011	-0.68036	1.16731	-0.73106	1.1215
Centriod	-0.68297	1.08775	-0.70266	1.09725	-0.64919	1.21925	-0.70211	1.1827
Top	-0.65513	1.14109	-0.67304	1.15126	-0.61805	1.26695	-0.67249	1.2401

6. 결론 및 요약

본 논문에서는 박벽공간 보-기둥과 공간뿔대 구조의 자유진동 및 안정성거동을 조사하기 위하여, 전단변형효과를 무시하는 경우에 비대칭단면을 갖는 공간뿔대구조의 운동방정식을 유도하는 일반이론이 제시되었다. 임의점을 통과하는 부재 축과 두 개의 직각좌표를 도입하고, 이 축에 대한 박변단면의 이동변위와 semitangential 회전에 대응하는 회전변위 그리고 뒀으로 인한 비틀 변위를 도입하여 연속체의 선형화된 에너지원리를 적용함으로써, 박벽공간뿔대구조의 운동에너지, 탄성변형에너지, 그리고 semitangential 모멘트에 대응하는 초기 단면력에 의한 포텐셜에너지를 유도하였다. 제시된 이론의 유한요소 정식화과정을 다루기 위하여, 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 질량행렬, 탄성강성행렬, 그리고 기하학적 강성행렬을 산정한다. 뿐만 아니라 단면내부의 임의의 점에 작용하는 off-axis 분포하중에 대한 하중보정강성행렬을 고려하였다. 결론적으로, 1) 본 논문에서 제시한 박벽보이론은 도심, 전단중심에서 변위파라미터를 정의한 기존의 이론을 도심과 주축이 아닌 임의의 축으로 확장시켜서 변위, 단면상수, 단면력을 정의하는 일반이론을 제시하였고, 2) 비대칭 단면을 갖는 박벽공간뿔대구조의 안정성 및 자유진동에 대한 수치해석 결과와 문헌의 결과 및 ABAQUS의 쉘요소를 이용한 해석결과를 비교 분석하여 본 연구의 이론 및 방법의 타당성을 입증하였으며, 그리고 3) 유한요소정식화에서 뒀을 포함하여 7개의 변위파라미터를 단면내부의 임의의 한 점에서 정의하였기 때문에 서로 다른 유

한요소 사이의 연결문제 및 탄소성 해석 시에 유용하게 적용될 수 있다고 판단된다.

감사의 글

본 논문은 한국과학재단 산하 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 관계자 여러분에게 감사드립니다.

참고 문헌

1. V. Z. Vlasov, *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd ed., Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem, 1961.
2. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
3. Y. B. Yang and S. R. Kuo, Frame buckling analysis with full consideration of joint compatibilities, *J. Eng. Mech. ASCE*, 118(5), 871-889 (1992).
4. H. Chen and G. E. Blandford, Thin-walled space frames. I: large-deformation analysis theory, *J. Struct. Eng. ASCE*, 117(8), 2499-2520 (1991).
5. H. Chen and G. E. Blandford, Thin-walled space frames. II: algorithmic details and applications, *J. Struct. Eng. ASCE*, 117(8), 2521-2539 (1991).
6. A. Conci, Stiffness matrix for non-linear analysis of thin-walled frames, *J. Eng. Mech. ASCE*, 118(9), 1859-1875 (1992).

7. M. Y. Kim, S. P. Chang and S. B. Kim, Spatial stability analysis of thin-walled space frames, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 39, 499-525 (1996).
8. J. H. Argyris and Sp. Symeonidis, Nonlinear finite element analysis of elastic systems under non-conservative loading-natural formulation. part I. Quasistatic problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 26 (1), 75-124 (1981).
9. J. H. Argyris, K. Straub and Sp. Symeonidis, Nonlinear finite element analysis of elastic systems under non-conservative loading-natural formulation. part II. Dynamic problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 28, 241-258 (1981).
10. Z. M. Elias, *Theory and Methods of Structural Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
11. W. F. Chen and T. Atsuta, *Theory of Beam-Columns, Vol. 2, Space Behavior and Design*, McGraw-Hill, New York, 1977.
12. J. J. Connor, *Analysis of structural member system*, Ronald Press Company, New York, 1976.
13. ABAQUS, *User's Manual*, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992.
(접수일자 : 1997. 10. 22)