기술

비압축성 점성유체의 유한요소 해석

유 원 진*

1. 서 론

건설기술의 급속한 발전으로 건축구조물이 고층화, 밀집화되는 추세에 있으며 따라서 구조물 주변에는 자연적인 바람의 흐름과 다른 형태의 기류가 발생한다. 바람은 구조물 자체에 하중으로 작용하기도 하고 내외장재의 설계에도 관여되며 구조물 주변의 풍환경을 변화시키는 결과를 초래하기도 한다. 구조물에 미치는 바람의 영향은 풍동실험을 통해 규명되는 것이 일반적이지만 근래에 컴퓨터의 급속한 발전에 힘입어 점차 수치해석을 이용하는 경우가 증대되고 있다.

공기의 유동을 수치적으로 해석하는 기법으로는 다양한 방법이 존재하지만 보통 사용되는 것들은 유한요소법과 유한차분법 및 경계적분법으로 크게 나눌수 있다. 이외에도 특성곡선법, 유한체적법, PIC (Particle-In-Cell) 법, FLIC (Fluid-In-Cell) 법등은 유한차분법의 일종 또는 변형으로 볼 수 있다.

경계적분법은 고전적 특이점법으로부터 발전한 것으로 패널법과 경계요소법으로 불리워지고 있는 것들이 대략 이에 속한다. 차분법의 개념은 미분법보다도 오래된 것으로 1910년 Richardson의 논문, 1930년대 후반의 Southwell의 이완법에 의한 포텐셜 유동, 침투류, 간단한 점성유동의 계산을 선구적 연구로서 들 수 있다. 특성곡선의 방법은 1940년대 후반에 도식해법으로서 완성되고 1950년대 말에 코드화되어 그후 3차원으로 확장되었으며 또한 최근에는 대류항 차분의 상류화에 대한 유력한 수단으로서 이용되고 있다. 유한요소법의 역사는 비교적 짧고 구조문제가 아닌 유동문제로의 응용은 더욱 최근의 것으로, Zienkiewicz등의 침투류의 응용에서 비롯된다. 점성유동의 응용은 1972년경부터 시작되었고, 천음속 유동에로의 응용은 더욱 늦게 시작되었다. 본 고에서는 유한요소법을 이용하여 비압축성 점성유체로 근사화된 공기의 거동을 해석할 수 있는 기법에 대하여 논의하고자 한다.

* 한국과학기술원 토목공학과, 박사과정

2. 유한요소 정식화

2.1 유동의 유한요소법적 정식화

완전한 N-S방정식은 관성력, 압력, 점성력의 균형을 완전히 표현하고 있으며, 이 경우에 유체역학에서 흥미 있는 대부분의 문제를 풀 수 있다. 그러나 이러한 형태는 매우 풀기 어려운 편미분방정식이다. 비정상 유동의 문제를 푸는 방법은 안정성과 수렴성을 증가 시키기 위하여 다각적으로 모색되어 왔다. 비점성 유체의 유동을 지배하는 방정식은 Navier-Stokes 방정식으로 질량 보존 방정식과 모멘텀 보존 방정식으로 구성되어 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\rho\frac{dv}{dt}=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

여기서 u와 v는 x, y방향의 속도성분이고 p는 압력항이며 ρ는 유체의 밀도, μ는 점성계수이다.

전통적인 Galerkin 방법에 의해 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{p}\end{Bmatrix}+[C(u_n,\ v_n)]\begin{Bmatrix}u\\ v\\ p\end{Bmatrix}+[K]\begin{Bmatrix}u\\ v\\ p\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_u\\ R_v\\ 0\end{Bmatrix} \tag{4}$$

$[M]$은 질량행렬이고 $[C(u_n,\ v_n)]$은 대류행렬이라 부르며 $[K]$는 점성행렬이다. 대류항은 비선형항이다. 압력을 기본변수로부터 소거시키기 위해 penalty 정식화를 도입하면 질량보존 방정식을 penalty 상수 λ와 함께 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$P=-\lambda\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right\} \tag{5}$$

결과적으로 얻게 되는 식은 아래와 같이 속도항으로만 표시되는 행렬식이다.

$$\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & M\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}2K_{11}+K_{22} & K_{12}\\ K_{21} & K_{11}+2K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}$$

$$+\lambda\begin{bmatrix}[L_{11}] & [L_{12}]\\ [L_{12}]^T & [L_{22}]\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_u\\ f_v\end{Bmatrix} \tag{6}$$

여기서

$$M=\int_\Omega \rho\{N\}[N]\,d\Omega$$

$$C=\int_\Omega\left(u\{N\}\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]+v\{N\}\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]\right)d\Omega$$

$$K_{ab}=\int_\Omega \mu\left\{\frac{\partial N}{\partial x_b}\right\}\left[\frac{\partial N}{\partial x_a}\right]d\Omega$$

$$L_{ab}=\int_\Omega\left\{\frac{\partial N}{\partial x_a}\right\}\left[\frac{\partial N}{\partial x_b}\right]d\Omega$$

2.2 대류항에 관한 상류화

대류수송항이 포함되는 방정식에 대한 유한요소 정식화에서는 대류항이 비대칭이고 비선형이다. 또한 실제로 해를 구하여보면 절점간에 진동현상이 발생하게 되는 것을 볼 수 있다. 이러한 해의 진동현상은 대류가 지배적인 물리현상에서 자주 나타난다. 이러한 진동을 제거하는 방법은 유한요소를 극단적으로 세분화하여 대류가 더이상 요소 내부의 거동에서 지배적이지 않게 하여야 한다는 것이다.

그러나 요소를 세분화하는 것은 많은 계산 시간을 요하게 되며 따라서 요소 세분화 과정 없이 진동을 억제하는 방법이 필요하게 되었다.

Galerkin 유한요소 정식화는 차분법의 관점으로 볼 때에는 중앙차분법으로 알려져 있다. 사실상 해의 진동현상이 중앙차분법의 해를 구하는데 있어서 많은 문제점으로 발생하고 있다. 그러나

진동에 자유로운 해는 대류항에 상류화(upwind)를 사용하여 획득되어질 수 있다. 상류화 방법에 의하여 해는 어느 정도 정확도가 줄어들게 되므로 상류화 방법과 중앙차분법을 적절히 혼합하여 사용함으로써 최적의 해를 구할 수 있다. 대류의 지배적인 흐름에 대한 상세한 설명이 Zienkiewicz의 저서에 있다.

널리 사용되고 있는 상류화 기법중 Hughes가 제시한 적분점의 위치를 이동하여 상류화 효과를 획득하는 방법은 유체의 흐름방향에 따라 상류화함으로써 흐름에 직각방향에서 일어나는 해의 소산효과를 최소화시켰다. 그의 상류화 기법에서 적분법은 아래 방정식에 따라 이동된다.

$$u_{\tilde{\xi}} = \boldsymbol{e}_{\xi}^{T}\boldsymbol{u}(0) \qquad u_{\tilde{\eta}} = \boldsymbol{e}_{\eta}^{T}\boldsymbol{u}(0) \tag{7-a}$$

$$\alpha_{\xi} = \rho\, u_{\xi} h_{\xi} / 2\mu \qquad \alpha_{\eta} = \rho\, u_{\eta} h_{\eta} / 2\mu \tag{7-b}$$

$$\tilde{\xi} = \coth\alpha_{\xi} - 1/\alpha_{\xi} \qquad \tilde{\eta} = \coth\alpha_{\eta} - 1/\alpha_{\eta} \tag{7-c}$$

여기서 u_{ξ}, h_{ξ}, $\tilde{\xi}$등은 그림 1에서 보여지는 바와 같다.

2. 3 예제해석

유체가 흘러가는 중앙에 위치한 원형 실린더를 해석하였다. Re=100의 경우를 해석한 결과 주기적인 와류의 방출, 즉 karman vortex를 관찰하였다. vortex의 방출을 쉽게 일으키기 위하여 인위적으로 초기에 와류성분을 가하였다. 문제의 경계조건 및 요소망은 그림 2와 같다. 원형실린더를 흐르는 유체의 경우 Re=100일 때 항력계수는 1.2정도로 알려져 있다. 본 연구를 통하여 원형실린더 주변의 항력계수를 계산한 결과 1.402가 나왔고 순간 양력계수는 0.004이다. 그림 3과 그림 4에서 안정된 karman vortex가 방출되는 때의 유선과 등압력선을 도시하였다. 와류 방출 주파수는 3초로서 Brooks의 논문과 일치하는 주기를 보였다.

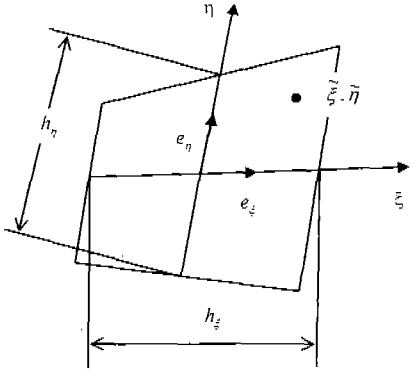

그림 1 상류화기법

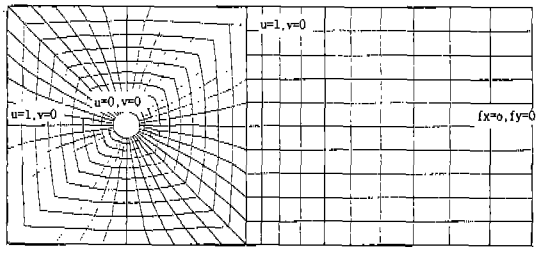

그림 2 원형 실린더 주변 유체 흐름

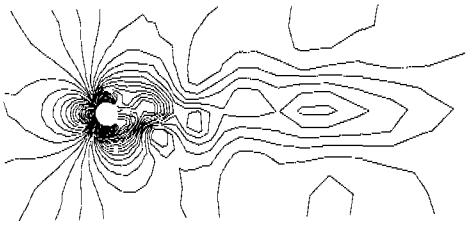

그림 3 원형 실린더 주변의 등압력도

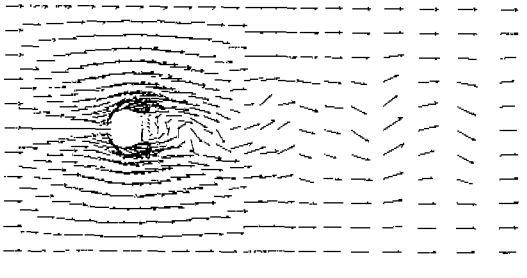

그림 4 원형 실린더 주변의 속도 벡터

3. 적응적 유한요소법

3.1 변절점 요소

요소를 세분화하는 기법은 요소수를 고정한 상태로 절점의 위치를 움직여 최적의 상태로 변환키는 r법(moving mesh), 허용 한계 오차를 초과하는 요소에 대해 요소의 차수는 일정하게 고정시키고 요소의 크기 h를 줄여가는 방법, 오차가 형상함수 차수를 증가시키는 p법, 또는 이들을 혼합한 hp법등이 대표적이다.

비정규 절점을 이용하는 해석(Oden 1993, Carey 1988)은 변위, 혹은 속도 제한 조건을 부여하여 세분화된 영역과 세분화되지 않은 영역간의 적합조건을 만족시킨다. 그런데 이 방법은 제한조건의 부여로 인하여 강성행렬의 구성시 인접요소들의 정보를 항상 요구하게 되며 너무 많은 제한조건식이 부여되면 요소의 갯수는 증가하나 상대적으로 자유도수가 증가하지 않아서 Locking현상이 발생해서 잘못된 해석을 하게 될 위험성을 내포하고 있다. 찌그러진 요소를 이용하여 세분화된 영역과 조악한 영역을 연결시켜 주는 방법(Chang 1992)은 요소의 지나친 찌그러짐이 발생할 가능성이 농후하기 때문에 해의 정확성을 보장하지 못하는 단점이 있다. 고차의 형상함수를 이용하는 해석의 경우 비교적 정확한 해석 결과를 얻을 수 있으나 복잡한 기하형태에서 이러한 문제를 해석하기 위해 모델링하는 것은 용이하지 않으며 또한 해석결과의 분석도 상당히 복잡해 진다. 따라서 많은 경우에 실제적으로는 4절점 요소만을 사용하는 해석이 주류를 이루고 있다. 그러나 국부적으로 심하게 물성치가 변하거나 와류(Vortex)가 발생하는 지점 또는 유체의 박리등이 생기는 지점에서는 정확한 해석을 위한 세밀한 체눈이 요구된다. 상술한 문제점을 해결하고 효율적인 체눈세분화를 수행하기 위하여 변절점 요소를 유체에 적합하도록 개선하였다.

변절점 요소는 사후오차 평가 기법에 의해 최적의 체눈을 형성한다. 세분화된 체눈은 기존에 존재하는 조악한 체눈에 연결되게 된다(그림 5). 이러한 연결에 의해 세분화된 요소는 기본적으로

그림 5 변절점 요소와 4절점 요소의 연결

기존의 형상을 유지하게 되므로 요소가 뒤틀리는 현상을 방지할 수 있는 이점이 있다. 그림 6에서 변절점요소의 자유도를 보였다. 요소 내의 속도장은 절점에서의 속도와 형상함수를 사용하여 요소 내부에서 보간된다.

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi, \eta)\, u_i \tag{8}$$

여기서 형상함수는 아래와 같다.

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) - \frac{1}{2}(N_j + N_k)$$

$$N_k = \frac{1}{2}(1+|\xi_k|\xi_k\xi - |\eta_k|\eta|)(1+|\eta_k|\eta_k\eta - |\xi_k|\eta|)$$

$$i = 1, 2, 3, 4;\ j = a\mathrm{int}(1/i)\times 4 + i + 3;\ k = i + 4$$

만약 면에 절점이 위치하지 않을 때에는 그에 따른 형상함수는 영이다. 일반적인 수치적분을 통하여 요소행렬을 구성하는 방법은 요소내부에서 속도 경사의 불연속에 의하여 더이상 유효하지 않으며 적분점의 위치는 수정될 필요가 있다. Gauss적분점의 위치는 각각의 부영역에서 새로 선정되고 전체 요소행렬로 조합된다. 5절점의 경

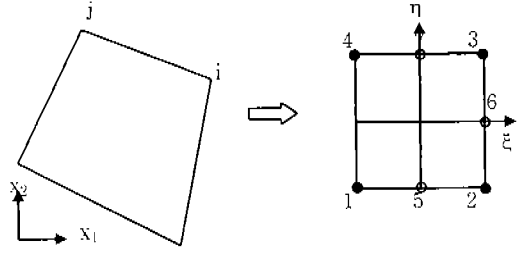

그림 6 변절점 요소의 자유도

우에는 두개의 부영역이 구성되고 6절점이나 7절점의 경우에는 4개의 부영역으로 구성된다. 적분점의 선정위치가 그림 7에 나타나 있다.

3.2 오차평가

적응적 단계에서 오차평가는 요소 세분화를 수행하기 위한 척도를 제공하는데에 필요하다.

속도 경사의 L_2 놈(norm)은 아래와 같이 정의한다.

$$\| \nabla a \| = \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega \right)^{1/2} \tag{9}$$

이 때 오차의 L_2 놈은 다음처럼 정의한다.

$$\| e \| = \left(\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla \hat{u}) \cdot (\nabla u - \nabla \hat{u}) d\Omega \right)^{1/2} \tag{10}$$

여기서,

∇u : 정확한 속도 경사값

$\nabla \hat{u}$: 유한요소해석으로 계산된 속도 경사값

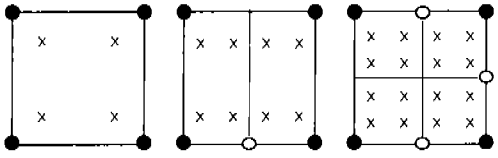

그림 7 변절점에서 적분점의 위치

표 1 변경된 적분위치

적분법	$\tilde{\xi}$ $\tilde{\eta}$	가중치
1	−0.788675135	0.25
2	−0.211314865	0.25
3	0.211314865	0.25
4	0.788675135	0.25

그러나 정확한 속도경사값은 대부분의 공학문제에서 제공되어지지 않으며 따라서 오차놈은 직접적으로 계산되어질 수 없다. 그러나 만약 근사화된 속도 경사 ∇u^*를 도입하면 오차 L_2 놈은 근사적으로 획득되어 질 수 있으며 이 값을 이용하여 요소세분화를 수행하게 된다.

평활화된 속도경사와 계산된 속도경사 사이의 오차는 다음 식을 이용하여 정의 된다.

$$e_{\nabla u}{}^* = \nabla u^* - \nabla \hat{u} \tag{11}$$

여기서 평활화된 속도 경사는 속도와 같은 형상함수를 이용하여 요소 내부에서 보간되어질 수 있다. 따라서 요소에서 속도 경사는 아래 식과 같다.

$$\nabla u^* = \sum_{i=1}^{n} N_i \nabla u_i{}^* \tag{12}$$

유한요소에 의해 계산된 속도 경사와 평활화된 속도 경사사이의 오차는 최소가 되어야 하므로 아래와 같은 범함수(functional)을 최소로 만들어야 한다.

$$\Pi = \sum_{i=1}^{nel} \left[\int_{\Omega i} e^*_{\nabla u}{}^T e^*_{\nabla u} d\Omega \right] \tag{13}$$

오차 범함수 Π을 최소로 만들기 위해 속도경사 성분에 대해 아래 식이 성립되어야 한다.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \nabla u_i{}^*} = 0 \tag{14}$$

위 식으로부터 각 절점에서 평활화된 속도 경사를 계산 할 수 있으며 이 속도교사 ∇u^*를 이용하여 근사화된 속도 경사와 오차에 대한 L_2 놈을 아래 식과 같이 계산한다.

$$\| \nabla a^* \| = \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega \right)^{1/2} \tag{15}$$

$$\| e^* \| = \left(\int_\Omega (\nabla u - \nabla \hat{u}) \cdot (\nabla u - \nabla \hat{u}) d\Omega \right)^{1/2} \quad (16)$$

평활화 과정은 각각의 속도 경사 성분에 대해 수행되어야 하고, 이때 해에서 발생한 오차는 아래와 같이 정의되며 이 오차적도를 가지고 세분화를 수행하게 된다.

$$\eta = \frac{\| e^* \|}{\| \nabla a^* \|} \quad (17)$$

3.3 예제해석

변절점 요소를 이용한 적응적 세분화 기법의 유용성을 입증하기 위하여 2장에서 해석한 실린더 주변의 유동장에 대하여 해석을 수행하였다. 경계조건 및 Re수는 동일하지만 본 예제의 경우는 정적해석을 수행한 결과로서 와의 방출현상은 보이지 않고 있다. 와의 방출현상을 수치적으로 묘사하기 위해서는 동적해석이 필수적이다. 이 과정에서 모든 해석영역의 오차는 시간단계에따라 계속 변하게 되는데 현재의 연구단계에서는 변절점 요소의 재결합부분은 완성되지 않았기 때문에 이를 재현하기는 곤란하다.

그림 8의 세분화된 요소망을 보면 실린더의 전면, 후면 및 유체의 박리점 등에서 오차가 집중되고 있으며 또한 세분화가 진행중인 것을 알 수 있다. 이 결과는 삼각형 요소를 이용하여 적응적 해석을 수행한 Sampaio(1993) 등의 논문에서도 나타나는 경향으로 속도의 급격한 변화가 존재하는 곳에서 세밀한 요소가 필요함을 알 수 있다. 그림 9는 실린더 주변의 속도벡터로서 실린더 전

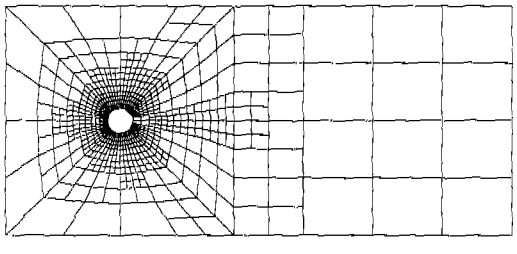

그림 8 실린더 주변의 세분화된 요소망

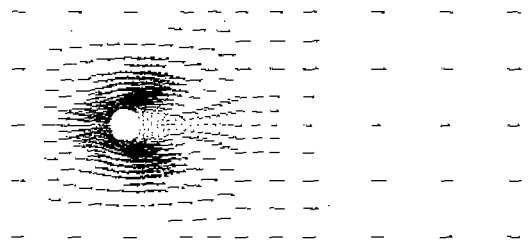

그림 9 실린더 주변 흐름의 벡터장

면에서는 실린더에 근접해가는 유체의 흐름이 점점 그 속도가 작아지고 후면에서는 소용돌이 형태를 이루면서 대칭적인 와를 형성하는 모습을 재현하고 있다.

4. 결 론

비압축성 점성유체의 유한요소해석 기법을 소개하였다. 대류항의 상류화 기법으로 안정된 해를 도출할 수 있으며 Penalty 방법에 기반하여 압력항을 지배방정식으로부터 소거함으로써 해석시간과 요구저장공간을 감소시켰다. 실린더 주변의 유동장을 해석하여 와의 방출을 성공적으로 묘사하였으며 항력계수를 17%정도의 오차로 계산하였다. 적응적 요소세분화 기법에 대한 연구를 통해 적절한 오차평가 기법 및 최적의 체눈을 형성하는 기법을 제시하였다. 또한 동적해석에 적합한 요소재결합 알고리즘에 대한 연구가 진행중이다.

본고의 결과는 직접적으로 풍공학분야에 사용하기에는 아직 계산 시간의 효율성이나 해의 정확도 및 안정성면에서 무리가 있으나 추가적인 연구를 통하여 해석기법의 개선을 도모하고 컴퓨터등 계산장비의 급속한 발전으로 장래에 경쟁력을 획득 할 수 있을 것으로 기대된다.