

응답면기법을 이용한 적응적 중요표본추출법

Adaptive Importance Sampling Method with Response Surface Technique

나 경 웅* 김 상 효** 이 상 호***
Ra, Kyeong-Woong Kim, Sang-Hyo Lee, Sang-Ho

요 지

중요표본추출기법중에서도 층화표본추출법을 이용한 적응적 중요표본추출기법이 일반적으로 가장 합리적인 것으로 알려져 있다. 그러나 확률장 유한요소모형문제와 같이 기본 확률변수의 규모가 큰 경우에는 층화표본추출법에서 요구되는 기본적인 표본점의 규모가 급증하여 효율성이 떨어지게 된다. 본 연구에서는 이러한 한계성을 극복하기 위하여 층화표본추출에서 기본확률변수를 사용하는 대신에 기본확률변수들의 함수이며 새로운 확률변수인 응답값을 이용하는 방법을 개발하였다. 여기에서 응답값은 일반적인 함수형태로 표시되지 않으며, 한 번의 응답계산에 많은 계산량이 소요되므로 이러한 문제점을 해결하기 위하여 응답면식을 이용한 층화표본추출법을 개발하였다. 개발된 기법에서는 기본확률변수의 모의발생규모는 기존의 기본확률변수를 이용한 층화표본추출법에서 보다 증가하지만 매우 많은 계산량을 요구하는 실제 응답해석규모는 응답면식을 이용함으로써 획기적으로 감소되었다. 특히 본 기법은 기본확률변수의 규모가 크고 대상한계상태의 파괴확률이 낮을수록 기존의 방법과 비교해 효율성이 증대되는 것으로 분석되었다.

핵심용어 : 중요표본추출기법, 응답면식, 층화표본추출, 확률장 유한요소 모형

Abstract

In this study the adaptive importance sampling method has been developed with the stratified sampling technique in terms of the structural response instead of basic multi-dimensional random variables. To reduce the large amount of computational time required in stratified sampling with multi-variate problems such as random field finite element models, the response surface method is utilized. By considering the structural response as only one random variable rather than considering all the basic random variables, the simulation number of the original structural analysis is significantly reduced compared with those required in the traditional techniques. The developed method has been found to provide the appropriate information more efficiently when the limit state involves a large number of basic random variables and the exceeding probability is small.

Keywords : importance sampling method, response surface, stratified sampling, random field finite element model

1. 서 론

해석 기법의 발전에 따라 복잡한 구조체에 대

해서도 정밀한 해석을 수행하여 구조계의 거동을 예측할 수 있게 되었지만, 기하학적인 형상 및 재료 특성의 불확실성과 작용 하중의 불확실성

* 연세대학교 토목공학과, 박사과정
** 정희원·연세대학교 토목공학과, 교수
*** 정희원·연세대학교 토목공학과, 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

등으로 인하여 실제 구조계의 응답도 불확실성을 가지며 변동하는 특성을 갖게 된다. 이러한 불확실성을 설계에 반영하기 위해서는 구조물의 안전도를 평가함에 있어 설계변수의 변동특성을 고려한 정량화된 해석이 선행되어야 하며, 이를 위하여 확률론에 의한 신뢰성 분석기법이 사용되고 있다.

구조물의 안전도를 분석하기 위한 대표적인 방법으로는 신뢰성 이론에 의한 근사해법, 응답면 기법 및 몬테칼로 모의분석법 등이 있다. 신뢰성 이론에 의한 방법은 응답함수의 미분항을 테일러(Taylor) 급수 전개하여 근사해를 구하는 방법으로 일차신뢰성기법(FORM)과 이차신뢰성기법(SORM)이 일반적으로 사용된다. 일차신뢰성해석기법을 사용하면 쉽게 해를 얻을 수 있지만, 응답면이 비선형적인 경우에는 해의 정확도가 떨어지는 문제점이 있다.

몬테칼로 모의분석법은 결합밀도함수에 따라 확률변수를 발생시켜 이에 대한 모의시험을 반복하고, 모의시험 결과를 통계적으로 처리하여 해를 얻게 되므로 응답면의 형상에 관계없이 상당히 정확한 해를 얻을 수 있는 기법이다. 하지만, 모의분석 결과는 통계적 분산에 의한 오차를 포함하게 되며, 분산오차를 감소시키기 위해서는 많은 수의 반복 계산이 요구되므로 계산시간이 길어지는 단점이 있다¹⁾. 이러한 분산오차를 효율적으로 감소시키기 위하여 다양한 형태의 분산 감소기법이 사용되는데, 대표적인 분산감소기법으로는 대조분산법(antithetic variates method), 연성표본추출(correlated sampling), 중요표본추출(importance sampling) 및 층화표본추출(stratified sampling) 등을 들 수 있다^{1)~3)}. 문제의 특성에 따라 적절한 분산 감소 기법을 사용하면 해의 정밀도를 유지하면서도 모의분석 수를 줄일 수 있으며, 같은 수의 반복 계산을 수행하는 경우에는 해의 정밀도를 높일 수 있게 되므로 모의분석의 효율성을 높일 수 있다.

특히 중요표본추출법은 파괴확률이 높은 지점에 대하여 표본추출을 집중시킴으로써 효율적으로 분산을 감소시키고 결과의 정밀도를 높일 수

있는 기법이다. 확률 변수의 표본추출밀도를 파괴확률의 밀도분포에 근사하기 위한 방법으로 직접법(direct method)⁴⁾, 적응적(adaptive) 중요표본추출^{3), 5), 6)}, 방사형(radial) 중요표본추출^{7), 8)} 및 방향성(directional) 중요표본추출^{9), 10)} 기법 등이 주로 사용되며¹¹⁾, 그 외에도 Kernel 함수를 이용한 중요 표본추출¹²⁾ 및 점근적(asymptotic) 중요 표본추출¹³⁾ 등이 사용된다. 또한 확률변수가 많고 한계상태가 비선형적인 문제에 대해서는 다중모드(multimodal) 중요표본추출법^{14), 15)} 등이 사용되기도 한다.

직접법은 신뢰성기법을 사용하여 파괴확률밀도가 높은 곳을 찾고, 그 점을 중심으로 확률변수를 발생시키는 방법으로 별도의 신뢰성해석이 필요하며, 표본밀도를 파괴밀도에 정확히 근사시키기 어렵다. 이와는 달리 적응적 중요표본추출법은 모의분석을 수행하여 파괴확률밀도를 구하고 표본밀도를 파괴확률밀도에 근사시키는 기법으로 반복과정에 따라 표본밀도를 점진적으로 개선하여 파괴확률이 높은 곳으로 모의분석을 집중시키는 방법이다.

특히 적응적 중요표본추출법에서는 임의의 형상을 갖는 표본밀도함수를 근사하기 위하여 층화표본추출법과 병행한 혼합기법(mixed strategy)³⁾이 사용된다. 층화표본추출법^{2), 3)}은 확률변수를 몇 개의 구간으로 분할하고 각 구간별로 모의분석을 수행함으로써 전체 분산을 감소시키는 기법이다. 이러한 혼합기법을 사용하면 최대파괴확률점을 구하기 위한 별도의 신뢰성해석이 필요하지 않으며, 파괴확률밀도의 분포특성을 예측할 수 없는 문제에 대한 적용성이 우수하여 파괴확률이 높은 구간에 효과적으로 표본추출을 집중시킬 수 있다. 하지만 층화표본추출법은 확률 변수의 차원이 높아지면 분할된 구간의 수가 기하급수적으로 증가하기 때문에 다차원 문제에 대하여 적용하기 어려운 문제점이 있으며, 이러한 문제를 해결하기 위해서는 확률변수를 효율적으로 감소시킬 수 있는 기법이 병행되어야 한다.

본 연구에서는 응답면기법¹⁶⁾을 도입하여 기본 확률변수에 대한 구간분할 대신에 확률변수의 응

답에 대한 구간분할로 변환하므로 총화표본추출법에서 확률변수의 차원 증가로 인한 문제점을 해결하였다. 응답면기법은 확률변수의 함수로 나타나는 복잡한 형태의 한계상태식을 단순한 형태의 함수로 전환시킬 수 있는 방법으로 기존의 신뢰성 기법과 조합하여 구조계의 신뢰성을 산정하는데 다양하게 적용된 바 있다^{17)~19)}.

2. 중요표본추출법

구조물의 신뢰성해석시 주어진 제한조건에 대한 한계상태식 $G(x)$ 는 일반적으로 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(x) = G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = 0 \quad (1)$$

여기서 x_i 는 설계대상 확률변수들이며, $G(x)$ 는 k 개의 설계대상 확률변수들에 의해 이루어지는 k 차 공간에서 구조물의 안전영역과 파괴영역을 나누는 면을 나타내는 식으로써 $G(x) > 0$ 이면 안전한 상태를 의미하고, $G(x) < 0$ 이면 파괴상태를 의미한다. 한계상태식이 $G(x)$ 인 구조계의 파괴확률은 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$P_f = \int \dots \int I[G(x)] f_i(x) dx \quad (2)$$

여기서, $I[]$ 는 $G(x) < 0$ 인 파괴영역에서는 1이고 그 이외에는 0인 지표함수이며, $f_i(x)$ 는 x 에 대한 결합밀도 함수이다. 식(2)를 모의분석법에 의한 파괴확률로 나타내면 식(3)과 같다.

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[G(\hat{x}_j) \leq 0] \quad (3)$$

여기서, N 은 모의분석수이며, \hat{x}_j 는 j 번째로 발생된 표본점이다. 모의분석 기법으로 얻어진 해는 통계적 오차를 포함하게 되는데, 표본 수에 대한 백분율 오차를 95% 신뢰도에 대하여 나타내면 식(4)와 같다¹⁾.

$$\% error = 200 \sqrt{\frac{1 - P_f}{NP_f}} \quad (4)$$

여기서, N 은 표본 수이며, P_f 는 구하고자 하는 파괴 확률이다. 식(4)로부터 파괴확률이 작을수록 상대적인 오차의 크기가 커짐을 알 수 있다. 따라서 아주 낮은 파괴확률에 대하여 해의 정밀도를 유지하는 유효한 결과를 얻기 위해서는 모의분석의 수가 기하급수적으로 증가되어야 함을 알 수 있다.

중요표본추출은 파괴확률밀도가 높은 구간에 대하여 모의분석 수를 집중시키므로 분산오차를 감소시키는 방법으로, 적절한 표본추출밀도함수를 선정하면 적은 수의 모의분석을 수행하여도 높은 정도의 해를 얻을 수 있게 된다. 식(2)에서 나타낸 파괴확률은 표본추출밀도함수 $h_v(v)$ 를 도입하면 식(5)와 같이 변환된다⁶⁾.

$$P_f = \int \dots \int I[G(x)] \frac{f_i(v)}{h_v(v)} h_v(v) dv \quad (5)$$

여기서, v 는 표본추출밀도함수를 만족시키는 확률변수로 x 와 같은 공간을 갖는 벡터이다. 표본추출밀도함수가 만족되도록 N 개의 표본점을 선정하고, 함수 f 에 대한 적분을 모의분석으로 구하면 식(5)의 파괴확률은 식(6)과 같이 된다.

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\{ I[G(\hat{v}_j)] \frac{f_i(\hat{v}_j)}{h_v(\hat{v}_j)} \right\} \quad (6)$$

모의분석 결과에 대한 분산은 식(7)과 같이 나타낼 수 있다³⁾.

$$S = \sqrt{\frac{\langle I[f_i/h_v]^2 \rangle - \langle I[f_i/h_v] \rangle^2}{N}} \quad (7)$$

여기서, $\langle \rangle$ 는 몬테칼로 적분값으로 N 개의 표본점에 대한 평균을 나타낸다. 표본추출밀도함수 h_v 가 파괴확률의 밀도함수 $I[f_i]$ 에 비례하는 경우, 식(7)에 나타낸 분산은 0이 되며³⁾, 이때 h_v 는 최적표본추출밀도함수가 된다. 하지만 이러한 조

건을 만족시키는 최적표본추출밀도함수는 구하고자 하는 파괴확률밀도함수와 동일한 형태를 갖게 되므로 함수의 형태를 정확히 파악할 수 없으며, 반복과정을 통하여 표본추출밀도함수 h_n 를 파괴확률밀도함수에 근사하도록 수정함으로써 분산 S를 최소화할 수 있다.

중요표본추출기법에서 표본추출밀도함수를 파괴확률밀도함수에 근사하기 위하여 총화표본추출법과 병행한 혼합기법을 사용하면 효율적으로 표본점을 선정할 수 있게 된다. 총화표본추출법은 각 구간에서 발생하는 분산을 최소화하는 기법으로, 확률 변수를 몇 개의 구간으로 분할하여 각 구간별 파괴확률을 계산하고, 구간별로 파괴확률밀도에 따라 표본추출밀도를 조절하므로 분산을 최소화할 수 있다. 하지만 총화표본기법은 k 차원의 확률변수에 적용하는 경우 변수의 조합에 의하여 최소한 2^k 으로 구간이 분할되며, 차원별 분할 수를 D로하는 경우에는 D^k 의 분할된 구간이 발생되므로 확률변수가 많은 문제에 대해서는 적용이 곤란하다는 문제점이 있다. 따라서 본 연구에서는 확률변수가 많은 다차원 문제에 대하여 응답면 기법을 도입하여, 표본추출과정에서 확률 변수를 직접 분할하는 대신 응답면식으로 표현되는 응답에 대하여 구간을 분할함으로써 확률 변수의 증가로 인한 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

3. 응답면 기법

응답면기법에서는 한계상태식 $G(x)$ 를 확률변수의 함수식으로 나타내는 것이 어렵거나 불가능한 구조물의 한계상태식 $G(x)$ 를 확률변수의 함수로 표현되는 간단한 다항식 $G'(x)$ 로 근사하여 신뢰성해석을 실시하는데, 이때 근사된 다항식 $G'(x)$ 를 응답면식이라고 하며, $G'(x)=0$ 으로 표현되는 근사된 파괴면을 응답면이라고 한다.

응답면 함수로는 편의성을 위해 일차식이나 이차식 모형이 주로 사용된다. 상호독립인 k 개의 확률변수에 대한 응답면을 일차식으로 나타내면 식(8)과 같다.

$$G'(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i \tag{8}$$

여기서, $G'(x)$ 는 응답면 함수이고, x_i 는 확률변수이며, a_i 는 변수에 대한 응답면 계수이다. 일차식 모형은 적은 수의 계수만으로도 응답면을 근사할 수 있는 장점이 있으며, 민감도가 큰 변수의 계수가 크게 나타나므로 주효과 모형(main effects model)¹⁶⁾이라고도 한다.

각각의 변수가 상호작용을 하는 경우에는 식(8)로 나타낸 일차식에 각 변수의 곱으로 나타낸 상관관계 항을 추가 하여 식(9)와 같은 응답면식 $G'(x)$ 를 사용하기도 한다.

$$G'(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=2}^k a_{ij} x_i x_j \tag{9}$$

여기서, a_i , a_{ij} 는 응답면의 형태를 나타내기 위한 계수이다.

이차식 모형에 의한 응답면함수는 식(10)과 같이 일차식에 변수의 제곱항을 추가하여 나타낼 수 있다.

$$G'(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k a_{ii} x_i^2 \tag{10}$$

식(10)에서는 각 확률변수의 항과 각각의 확률변수의 제곱항만이 고려되었는데, 보다 높은 정도를 필요로 하는 경우에는 식(11)과 같이 각 확률변수들의 곱의 항을 포함시켜 변수간의 상호관계에 따른 영향을 고려할 수도 있다.

$$G'(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=2}^k a_{ij} x_i x_j \tag{11}$$

그러나 고려되는 다항식의 항이 증가할수록 한계상태식에 대한 근사성은 좋아지지만 항의 증가에 따라 구해야할 계수의 수가 급증한다는 단점이 있다.

응답면식의 계수를 구하기 위해서 기존의 방법에서는 표본점을 결정하기 위한 방법으로 평균 μ 와 표준편차 σ 인 확률변수에 대하여 표본점 선

정범위를 결정하는 계수 f 를 사용하여 확률변수에 대한 상한계 $\mu+f\cdot\sigma$ 와 하한계 $\mu-f\cdot\sigma$ 를 표본점으로 사용하여 응답면의 계수를 구하였다¹⁷⁾. 그러나 이와같은 기존의 표본점 선정방법에 의하면 일차식 모형을 사용하는 경우에도 확률변수의 2배에 해당되는 응답을 구해야 하며, 모의분석과는 별도로 응답면 계수를 구하기 위한 응답해석이 추가 되어야 한다. 따라서 본 연구에서는 모의분석 결과를 활용하기 위하여 기존의 표본점 선정 방법 대신에 모의분석에서 사용된 표본점과 그에 대한 응답을 사용하여, 다중선형회귀분석(multiple linear regression)에 의하여 응답면식의 계수를 결정한다.

4. 응답면기법에 의한 적응적 중요표본추출기법

응답면 기법을 사용하면 층화표본추출과정에서 각 변수에 대한 구간 분할을 응답에 대한 구간 분할로 변환시킬 수 있게 된다. 따라서 다차원 확률변수로 구성된 신뢰성 분석에 대해서도 층화표본추출법을 문제없이 사용할 수 있으며, 적응적 중요표본추출법을 사용하여 모의분석의 효율성을 높일 수 있다.

본 연구에서는 표본선정을 위해서만 응답면식을 사용하므로, 정확한 응답면을 결정할 필요성이 높지 않아 응답면식의 항수를 최소화하기 위하여 확률변수에 대한 응답면을 식(8)과 같은 일차식으로 선정하였다. 따라서 기본 확률변수의 수만을 상회하는 모의분석을 수행하여 응답면식의 계수를 산정한다. 응답면식이 결정되면 응답면 식으로 구한 응답의 크기에 따라 구간을 분할하고, 각 구간별로 적정수의 표본규모를 배분하여 실제응답해석을 통한 모의분석을 수행하여 구간별 파괴확률을 산정한다. 따라서 일차식으로 구성된 응답면을 사용하더라도 구간만을 분류하며 실제구간별 파괴확률은 실제응답해석을 통하여 계산하므로 실제 응답면이 선정된 응답면식과 매우 다른 비선형 특성을 갖는 경우에 대해서도 그 영향이 반영될 수 있다.

그림 1은 확률변수의 영역을 일차식으로 구한 응답함수 값을 기준으로 하여 몇 개의 구간으로 분할한 예를 나타낸 것으로, 실제 한계상태면은 곡선이지만 일차식을 사용하여 응답면을 근사화하면 한계상태면은 $G'(x)=0$ 인 실선으로 나타낸 직선으로 근사된다. 따라서 파괴확률밀도가 높은 실제한계상태면 부근이 모두 반영되도록 그림 1의 $0 < G'(x) < 1.0$ 의 예와 같이 응답면부근을 $G'(x)$ 의 크기에 따라 적정한 간격을 갖는 여러개의 표본구간으로 분할한다.

응답면 식을 사용하여 확률변수들로부터 추출된 표본점에 대한 응답을 계산하고, 그 크기에 해당되는 구간을 판별하면, 추출된 표본점이 i 번째 구간에 포함될 확률 P_{Gi} 는 식(12)와 같이 얻을 수 있다.

$$P_{Gi} = \frac{N_{Gi}}{N_{Gall}} \tag{12}$$

여기서, N_{Gall} 은 전체모의발생된 표본점 수이며, N_{Gi} 는 그 중에서 i 번째 구간에 포함된 표본점의 수이다.

각 구간별 모의분석수 N_{ri} 는 각 구간의 파괴확률밀도에 따라 결정되어야 하는데, 구간별 파괴확률에 대한 정보가 없는 초기에는 모든 구간에

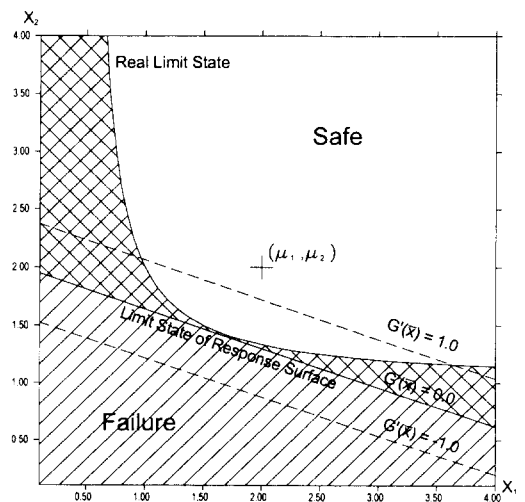


그림 1 한계상태면과 응답면에 의한 영역의 분할

서 동일한 수의 표본점에 대하여 실제응답해석을 통한 모의분석을 수행하도록 한다. 모의분석은 모의발생된 표본점 중에서 i 번째 구간에 포함된 전체 N_{Gi} 의 표본점 중에서 i 번째 구간에 할당된 모의분석수 N_{Ti} 만큼의 표본점에 대해서만 수행하여 실제응답 $G(x)$ 를 구하여, 그 중 파괴영역 ($G(x) < 0$)에 포함되는 표본점 수 N_{fi} 로부터 i 번째 구간에 대한 조건부 파괴확률을 식 (13)과 같이 구할 수 있다.

$$P_{fi|Gi} = \frac{N_{fi}}{N_{Ti}} \quad (13)$$

따라서 구간별 파괴확률 P_{fi} 는 식 (12), 식 (13)을 사용하여 식 (14)와 같이 구할 수 있다.

$$P_{fi} = P_{fi|Gi} P_{Gi} \quad (14)$$

따라서, 주어진 한계상태 ($G(x)=0$)에 대한 전체 파괴확률 P_f 는 식 (15)와 같이 모든 구간의 파괴확률을 합하여 구하게 된다.

$$P_f = \sum_{i=1}^M P_{fi} \quad (15)$$

식 (13)에서 사용된 구간별 모의분석수 N_{Ti} 는 초기에는 각 구간에 대하여 동일하게 선정되지만, 식 (7)의 분산을 최소화하기 위해서는 파괴확률의 분포 형상에 비례하도록 각 구간별 모의분석 수가 결정되어야 한다. 이는 식 (16)과 같이 구간별 파괴확률이 전체 파괴확률에서 차지하는 비중에 따라 구간별로 상대적인 모의분석규모를 배정할 수 있다.

$$R_i = \frac{P_{fi}}{P_f} \quad (16)$$

따라서 첫 번째 모의분석 수행 이후에는 식 (16)을 사용하여 다음 번 반복과정 (iteration)에서 각 구간별로 수행되어야 할 모의분석 수를 식 (17)과 같이 계산한다.

$$N_{Ti} = R_i \times N_{Total} \quad (17)$$

여기에서 N_{Total} 은 예상되는 전체 파괴확률 P_f 에 따라 적절한 규모로 선정되어야 하며, 이는 모의발생된 표본점의 규모 N_{Total} 과 비교하여 매우 작은 규모이다. 따라서 실제응답의 모의분석에서 매우 많은 계산량이 요구되는 대형구조문제에서는 N_{Total} 규모의 표본점 발생 및 그에 대한 응답면식 계산에 요구되는 계산량은 미미한 수준이므로 본 연구에서 제시한 응답면을 이용한 적응적 중요표본추출기법은 기본확률변수가 많은 문제에서 상대적으로 매우 적은 계산량에 의해 매우 뛰어난 효율성을 가지게 된다.

식 (12)에서 식 (17)까지의 반복과정에서 기존의 모의발생표본점의 구간별 발생확률이나 실제응답의 모의분석을 통한 구간별 파괴확률에 대한 결과를 누적하면서 계산하면, 식 (12)에 나타난 표본점의 구간별 발생확률 및 식 (13)에서 계산된 각 구간의 조건부 파괴확률이 점진적으로 개선되며, 결국 식 (15)로 얻는 최종 파괴확률의 오차를 줄일 수 있게 된다. 또한 식 (16)에서 얻어지는 모의분석 수의 비는 최종 파괴확률의 분포 특성에 더욱 근접하게 되므로 파괴확률에 대한 분산을 감소시킬 수 있게 된다.

본 연구에서는 이와같이 반복과정을 수행하는 중에 얻어진 결과를 누적사용하기 위하여 초기에 선정된 응답면식을 계산종료시까지 계속 사용하며, 앞에서 설명한 바와 같이 응답면식이 가지는 오차가 결과에 미치는 영향은 일반적으로 무시할 수 있는 수준이다. 만약에 반복과정에서 누적되는 실제응답의 모의분석결과를 이용하여 응답면식을 개선해 나가고자 한다면, 반복과정별로 모의발생한 표본점을 저장하여야 하며, 저장에 따른 전산기의 기억용량에 문제가 있는 경우에는 모의발생 표본점의 구간별 발생확률의 누적사용을 포기하고 매 반복과정 마다 표본점을 새롭게 모의발생시켜야 한다. 실제응답의 모의분석결과는 모의발생된 표본점의 규모에 비하면 매우 작기 때문에 실제응답이 모의분석된 표본점의 자료를 계산된 응답과 함께 저장해 두고 새롭게 응답

면식이 결정될 때 마다 구간별 파괴확률을 새로이 계산하면 된다.

5. 모형해석 및 결과분석

제안된 응답면을 이용한 적응적 중요표본추출 기법의 검증을 위하여 그림 2와 같이 균등한 길이를 갖는 k개의 요소로 구성된 봉의 인장 문제에 대하여 적용하였다. 해석 모형은 길이는 20m, 단면적은 1m²이고 하중은 P=0.1MN으로 일정한 것으로 가정하였다. 각 요소의 탄성계수를 상호 독립인 확률변수로 가정하였으며, 평균이 2.0GPa 이고, 표준편차가 0.4GPa인 정규분포로 가정하였다.

상호독립적인 탄성계수를 갖는 k개의 요소로 구성된 해석모형에 대하여 단부 B지점의 변위를 한계상태로 하는 한계상태식(limit state function)을 구성하면 식(18)과 같다.

$$G(\bar{x}) = \delta_{lim} - \frac{Pl}{kA} \left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_k} \right) \quad (18)$$

여기서, δ_{lim} 은 한계변위이며, P는 작용하중, l은 봉의 길이, A는 봉의 단면적, X_i 는 각 요소의 탄성계수로 확률변수이다. 그림 3은 요소 수가 2개인 경우의 한계상태식을 나타내는 것으로 한계상태면은 비선형성을 나타내고 있으며, 한계변위 δ_{lim} 의 크기와 응답 $G(\bar{x})$ 의 크기에 따라서 응답면의 형상이 변화되는 것을 볼 수 있다.

본 해석에서는 식(8)과 같은 선형응답함수를 사용하여 한계상태식을 응답면식으로 근사하고, 그림 4에 나타난 바와 같이 응답의 크기에 따라 전체를 5개 구간으로 분할하여 해석하였다. 응답

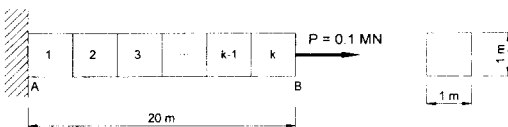
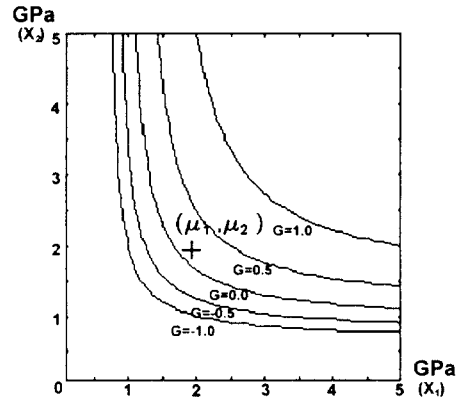
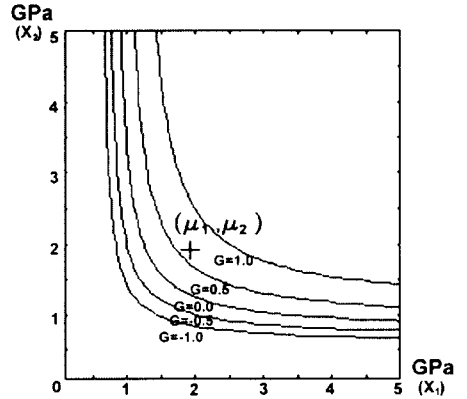


그림 2 해석 모형의 형상



(a) 한계변위가 1.1mm인 경우



(b) 한계변위가 1.3mm인 경우

그림 3 한계상태에 따른 응답면의 형상

면식에 따른 구간 분할은 응답면식의 산정을 위해 초기에 모의분석한 응답값들의 최소값과 평균값 사이를 5개 구간으로 나누어 시행하였다. 그림 4는 기본확률변수 X_1 과 X_2 를 평균과 표준편차에 의해 정규화한 X'_1 과 X'_2 의 공간에서 도시한 결과이다.

표 1은 요소 2개를 사용하여 해석한 결과를 나타낸 것으로 DMCS는 직접 몬테칼로 모의분석에 의한 결과를 나타내는 것으로 10⁷번의 모의분석으로 얻은 해석결과이다. 결과를 비교함에 있어

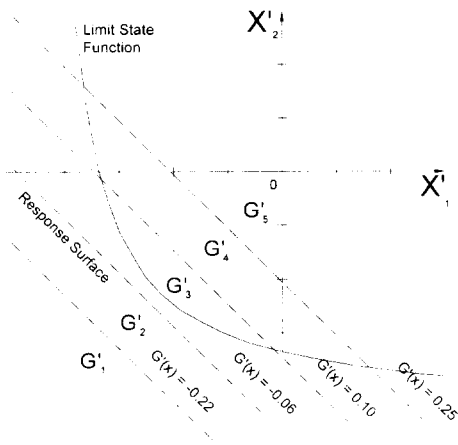


그림 4 응답면에 의한 적분 구간의 분할

표 1 요소 2 개인 경우의 파괴확률 해석결과

δ_{limit} (mm)	1.1	1.2	1.3	
DMCS	3.122e-1	1.585e-1	7.702e-2	
FORM	2.61e-1	1.19e-1	5.16e-2	
VEGA	①	2.689e-1	0.990e-1	5.125e-2
	②	3.127e-1	1.559e-1	7.786e-2
RESIS	①	3.344e-1	1.653e-1	7.780e-2
	②	3.155e-1	1.566e-1	7.885e-2

이 해를 정확한 해로 가정하여 비교하고자 한다. FORM은 일차 신뢰성기법을 사용하여 얻은 결과로 모의분석에 의한 결과와 차이를 나타내고 있는데, 이는 그림 2에서 나타낸 바와 같이 응답면의 형상이 비선형성을 갖고 있기 때문이며, 신뢰성해석기법으로 근사한 해를 얻기 위해서는 차수를 높여서 해석하여야 될 것으로 판단된다. VEGA는 혼합된 중요표본추출법에 의한 VEGAS 알고리즘³⁾을 사용하여 해석한 결과로 확률변수를 각각 5 개의 구간으로 분할하여 모의분석한 것으로 ①은 각 단계별로 108회의 모의분석을 10회 반복하여 총 1,080회의 모의분석을 통하여 얻은 결과이며, ②는 각 단계별로 800회의 모의분석을 10회 반복하여 총 8,000회의 모의분석을 통하여 얻은 결과이다. 또한 RESIS는 응답면을 이용한

중요표본추출기법에 의한 해석결과로 ①은 응답의 크기에 따라 5구간으로 분할하고 100회의 모의분석(첫단계에서는 각 구간별로 20회)을 10회 반복계산하여 얻은 결과로 총 1,000회의 모의분석을 수행하여 얻은 결과이다. ②는 5 구간으로 분할하고 1,000회의 모의분석(첫단계에서는 각 구간별로 200회)을 10회 반복계산하여 얻은 해석 결과로 총 10,000회의 모의분석을 수행하여 얻은 결과이다.

응답면에 의한 중요표본추출기법의 해는 전체 모의분석규모가 직접 몬테칼로법의 모의분석규모에 비해 1/1,000~1/10,000에 불과한데 비하여 정확도에 상당히 근접한 결과를 나타내고 있으며, 구간별 모의분석수를 증가시킴에 따라 전반적으로 더욱 근접한 결과를 얻을 수 있는 것으로 나타났다. 또한 1,000회 모의분석한 결과를 비교하면 각 확률변수에 대하여 구간을 분할한 경우(VEGA ①)보다 응답면에 의한 중요표본추출법을 사용한 경우(RESIS ①)가 더욱 정확해에 근사한 결과를 나타내고 있어 변수에 대한 직접적인 구간 분할보다 효율성이 높은 것으로 분석된다.

한계변위 1.3mm인 경우 응답면에 의한 중요표본추출기법에 의한 해석결과 ①과 ②를 비교하면 1,000회의 모의분석으로 구한 결과가 10,000회의 모의분석결과보다 오히려 정확해에 가까운 것으로 나타나고 있는데, 이는 모의분석해가 갖는 분산오차 때문인 것으로 분석된다.

그림 5는 한계변위가 1.3mm인 경우 RESIS ①에 대한 10회의 반복계산(iteration)과정에서 해의 수렴성을 나타낸 것이다. 일회 반복과정에 대한 파괴확률(iterative)과 누적된 파괴확률(cumulative)을 나타낸 것으로 누적된 파괴확률은 반복과정의 증가에 따라 수렴성을 보이고 있다.

그림 6은 한계변위가 1.3mm인 경우에 대하여 RESIS ②의 경우(10,000회)에 대한 누적결과를 사용하여 각 구간별 파괴확률의 분포형상을 나타낸 것이다. P_G 는 표본점의 응답면구간별 발생확률이고 $P_{n/G}$ 는 모의분석으로 구한 구간별 조건부파괴확률이며, P_n 는 이로부터 구한 구간별파괴확률의 분포 형태로 크기를 10배로 확대하여 나

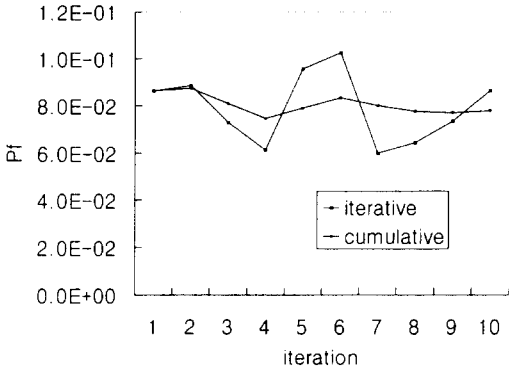


그림 5 반복계산에 의한 결과의 수렴성

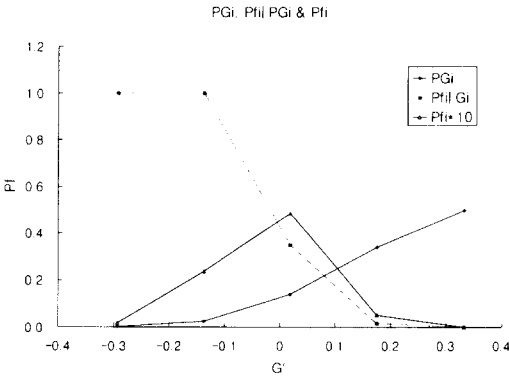


그림 6 $G(x)$ 의 크기에 따른 P_{Gi} , P_{fi} , x_i , P_{fi} 의 분포형태 ($\delta_{lim}=1.3\text{mm}$ 인 경우)

타낸 것이다. 구간별파괴확률은 $G'(x)$ 가 0인 지점 부근에서 최대가 되며, 구간별 조건부파괴확률은 $G'(x)$ 값이 0보다 작은 경우 1.0이 되는 것으로 나타났다. 이는 선형으로 대체된 응답면과 파괴영역에 대해 오목한(concave) 원래의 한계상태면의 관계를 반영하는 결과이다.

표 2는 해석모형에서 요소의 수를 증가시키는 경우에 대한 몬테칼로 모의분석결과를 비교한 것으로 한계상태와 요소수의 변화에 따라 파괴확률도 변화된다. 그림 7은 요소수와 한계상태변위에 대한 파괴확률의 변화형태를 나타낸 것으로 변위가 1.3mm인 경우를 비교하면 요소수의 증가에 따

표 2 확률요소의 변화에 대한 한계상태별 파괴확률

NE	$\delta_{limit}=1.1$	$\delta_{limit}=1.2$	$\delta_{limit}=1.3$
2	3.122e-1	1.585e-1	7.702e-2
4	2.848e-1	1.039e-1	3.428e-2
8	2.408e-1	4.995e-2	8.794e-3
16	1.801e-1	1.424e-2	1.107e-3
32	1.098e-1	1.855e-3	1.624e-4

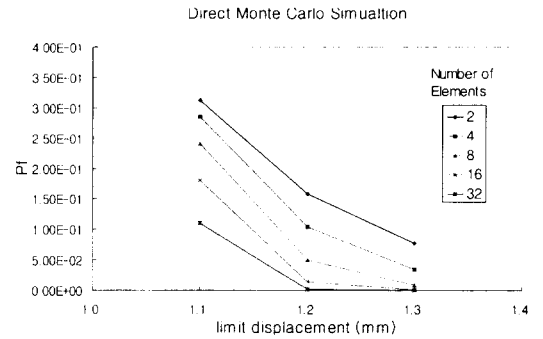


그림 7 요소수와 한계변위에 따른 파괴확률의 변화

라 파괴확률이 낮아진다. 예제 해석을 통하여 이러한 낮은 파괴확률에 대하여 응답면에 의한 중요표본추출 기법의 적용성을 검토하고자 한다.

표 3은 해석모형에서 4개 요소를 사용한 경우의 해석결과를 나타낸 것으로, VEGA ①은 단계별로 96회의 모의분석을 10회 반복하여 총 960회 모의분석한 결과이며, ②는 단계별로 1,024회 모의분석을 10회 반복하여 총 10,240회 모의분석

표 3 요소수 4개인 경우의 해석결과

δ_{limit} (mm)		1.1	1.2	1.3
DMCS		2.848e-1	1.039e-1	3.428e-2
FORM		1.81e-1	4.75e-2	1.04e-2
VEGA	①	1.132e-1	6.260e-2	1.275e-2
	②	2.292e-1	8.959e-2	3.280e-2
RESIS	①	2.890e-1	9.764e-2	2.681e-2
	②	2.855e-1	1.058e-1	3.387e-2

한 결과이다. 또한 응답면에 의한 중요표본추출법의 해석결과는 RESIS로 표시하였으며, 표 1에서와 같은 조건으로 ①은 1,000회 모의분석한 결과이며, ②는 10,000회 모의분석한 결과이다. 표에서 나타낸 바와 같이 확률변수에 대하여 구간을 분할한 VEGA ①의 경우는 오차가 50%이상으로 960회의 모의분석으로는 정확한 해를 얻을 수 없으며, VEGA ②의 경우와 같이 최소한 10,000회 이상의 모의분석을 수행하여야 근사한 해를 얻을 수 있는 것으로 나타났다. 반면 응답면에 의한 중요표본추출법을 사용한 경우는 1,000회의 모의분석으로도 비교적 정확해에 근사한 결과를 얻을 수 있는 것으로 나타났으며, 특히 10,000회의 모의분석결과는 오차가 2%이내인 해를 얻을 수 있어 확률변수에 대한 구간분할보다 효율성이 높은 것으로 분석된다.

표 4는 해석모형에서 8개 요소를 사용한 경우의 해석결과를 나타낸다. 요소의 수가 증가되는 경우 각 변수를 직접 분할하여 중요표본 추출하기 위해서는 필요한 모의분석 수가 기하급수적으로 증가하게 된다. 8개의 요소를 사용하는 경우, 각 변수를 5개의 구간으로 분할한다면 1회 반복계산(iteration) 과정에서 요구되는 모의분석수는 5⁸으로 약 39만회의 모의분석이 필요하다. 표에서 VEGA는 확률변수에 대하여 5개 구간으로 분할한 경우의 해석결과로 1회 반복계산에 393,216 회의 모의분석을 5회 반복과정으로 얻은 결과로 약 200만회의 모의분석을 수행한 결과이다. 반면 응답면에 의한 중요표본추출에 의한 해석결과(RE-SIS)는 모의분석수가 ①의 경우 1,000회 및 ②의 10,000회에 불과하지만 모두 정확해와 비교하여

5%이내의 오차를 나타내고 있으며, 확률변수에 대하여 구간을 분할한 해석결과(VEGA)와 유사한 정밀도를 나타내고 있어 확률변수의 수가 많은 경우에도 상당히 효율적으로 적용할 수 있는 방법인 것으로 분석된다.

해석모형에서 16개 요소를 사용한 경우에는 확률변수에 대한 직접적인 분할법은 확률변수를 각각 5개 구간으로 분할하는 경우 1회의 반복과정에서 필요한 모의분석수가 1.5×10¹¹회로 사실상 적용이 곤란하다. 따라서 확률변수의 수가 많은 경우에는 확률변수에 대한 직접적인 분할에 의한 중요표본 추출은 사실상 적용이 곤란한 것으로 평가된다. 표 6은 몬테칼로 모의분석결과와 응답면에 의한 중요표본추출결과를 비교한 것으로 RESIS ③에 나타낸 해석결과는 반복단계별로 10,000회(2,000회×5구간)의 모의분석을 수행하고 5회의 반복과정을 수행하여 총 50,000회의 모의분석을 수행한 결과를 나타낸다. 한계변위가 1.2mm인 경우 RESIS ②에 나타낸 10,000회의 모의분석 결과는 정확해와 12%의 오차를 나타내지만 ③에 나타낸 해석결과는 0.7%의 오차를 나타내고 있다. 또한 한계변위가 1.3mm인 경우에도 RESIS ②에 나타낸 결과는 정확해와 30%의 오차를 나타내지만, ③과 같이 구간별 모의분석수를 증가시키에 따라 오차가 1% 이내인 정밀도 높은 해를 얻을 수 있다.

표 5의 δ_{limit}=1.3인 경우의 RESIS ③의 결과는 DMCS의 결과로 볼 때 1.107×10⁻³수준의 파괴 확률에 대하여 50,000회의 모의분석에 대한 결과이므로 단순 몬테칼로기법으로 볼 때 약 55개의 파괴가능표본점을 가지는 규모이며, 표 4의 RE-

표 4 요소수 8개인 경우의 해석결과

δ _{limit} (mm)	1.1	1.2	1.3	
DMCS	2.408e-1	4.995e-2	8.794e-3	
FORM	9.86e-2	9.14e-3	5.57e-4	
VEGA	2.424e-2	4.940e-3	8.530e-3	
RESIS	①	2.382e-1	4.764e-2	8.598e-3
	②	2.347e-1	4.822e-2	8.568e-3

표 5 요소수 16개인 경우의 해석결과

δ _{limit} (mm)	1.1	1.2	1.3	
DMCS	1.801e-1	1.424e-2	1.107e-3	
FORM	3.44e-2	4.34e-4	2.11e-6	
RESIS	①	1.115e-1	9.974e-4	1.524e-5
	②	1.812e-1	1.255e-2	7.745e-4
	③	1.810e-1	1.414e-2	1.096e-3

SIS ② $\delta_{limi}=1.3$ 의 경우에는 $P_f=3.428 \times 10^{-2}$ 에 대해 10,000 회의 모의분석이므로 약 88개의 파괴가능표본점 규모이다. 표 3의 RESIS ② $\delta_{limi}=1.3$ 에서는 $P_f=3.428 \times 10^{-2}$ 에 대해 10,000회의 모의분석결과이므로 약 342개의 파괴가능표본점 규모이다.

이상에서 검토한 바와 같이 응답면에 의한 중요표본추출법은 확률변수가 많고 한계상태면이 비선형적인 경우에 대한 신뢰성해석에서 효율적으로 해의 정확도를 높일 수 있는 방법으로 분석되며, 파괴확률이 낮은 경우에도 각 구간별 모의분석수를 적절하게 조절하여야 하나 다른 모의분석기법과 비교할 때 필요한 모의분석규모가 해석대상 파괴확률에 선형적으로 비례하지는 않는 것으로 분석된다.

6. 결 론

본 연구에서는 응답면 기법을 사용한 적응적 중요표본추출법을 사용하여 모의분석 규모를 효율적으로 감소시키는 방법을 제시하였다. 응답면 기법을 도입하므로 총화표본추출과정에서 기본 확률변수 증가에 따른 차원 증가로 인한 분할 구간수의 기하급수적 증가를 피할 수 있게 되므로 적응적 중요표본추출법을 효과적으로 적용할 수 있다.

응답면기법에 의한 적응적 중요표본추출법은 파괴확률이 낮은 문제에 대해서도 직접몬테칼로법의 모의분석규모에 비해 1/1,000~1/10,000정도의 비교적 적은 모의분석수만으로 신뢰도 높은 결과를 얻을 수 있다. 각 변수에 대하여 구간을 분할하는 기존의 중요표본 추출법보다 분산을 효율적으로 감소시킬 수 있는 방법으로 분석된다. 또한 일차응답면식을 사용하면서도 한계상태면이 비선형성을 갖는 문제에 대해서도 정밀도 높은 해를 얻을 수 있으며, 응답면을 사용하여 파괴확률의 분포 특성에 근접하게 표본을 선정하므로 모의분석의 효율성을 향상시킬 수 있다.

본 연구에서 제시된 기법은 한계상태면이 비선형적인 다차원 확률변수로 구성된 신뢰성 해석에

서 효과적으로 근사해를 구할 수 있는 방법이다. 따라서 확률변수의 수가 많은 복잡한 구조체의 확률유한요소해석이나 비선형구조해석과 같이 모의분석에서 계산 시간이 많이 소요되는 문제에 대해서 효율성을 크게 향상시킬 수 있는 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. Ang, A.H-S and Tang, W.H., *Probability Concepts in Engineering Planning and Design-Volume II Decision, Risk, and Reliability*, John Wiley & Sons, 1984.
2. Rubinstein, R. Y., *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, Inc. 1981.
3. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., *Numerical Recipes in FORTRAN-The Art of Scientific Computing*, 2nd Ed. , Cambridge University Press, 1992.
4. Fujita, M., Rackwitz, R., "Updating First-And Second-Order Reliability Estimates by Importance Sampling", *Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 5, No. 1, JSCE, 1988.
5. Song, B.F., "A Technique for Computing Failure Probability of a Structure using Importance Sampling", *Computer & Structure* Vol 62. No. 4 pp.659~665, 1997.
6. Mori, Y. and Ellingwood, B.R., "Time-dependent System Reliability Analysis by Adaptive Importance Sampling", *Structural Safety*, 12, 1993.
7. Melchers, R.E., "Radial importance sampling for structural reliability", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 1, pp. 189~203, January, 1990.
8. Guan, X.L. and Melchers, R.E., "Multitangent-Plane Surface Method for Reliability Calculation", *Journal of Engineering Mecha-*

- tics., Vol. 123, No. 10, 1997.
9. Bjerager, P., "Probability integration by directional simulation", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 8, pp.1285~1302, August, 1988.
 10. Ditlevsen, O., and Bjerager, P., "Plastic reliability analysis by directional simulation", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 6, pp.1347~1362, June, 1989.
 11. Engelund, S. and Rackwitz, R., "A Benchmark Study on Importance Sampling Techniques in Structural Reliability", *Structural Safety* 12, 1993.
 12. Maes, M.A., Breitung, K. and Gupuis, D.J., "Asymptotic Importance Sampling", *Structural Safety* 12, 1993.
 13. Ang, G.L., Ang, A.H-S., and Tang, W.H., "Optimal Importance-Sampling Density Estimator", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 6, pp.1146~1163, June, 1992.
 14. Fu, G. and Moses, F., "Multimodal Simulation Method for System Reliability Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 6, 1993.
 15. Fu, G., "Variance Reduction by Truncated Multimodal Importance Sampling", *Structural Safety* 13, 1994.
 16. Myers, R. H. and Montgomery, D. C., *Response Surface Methodology-Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, John Wiley & Sons, Inc. 1995.
 17. Lui, Y.W. and Moses, F., "A Sequential Response Surface Method and Its Application in the Reliability Analysis of Aircraft Structural Systems", *Structural Safety* 16, 1994.
 18. Kim, S-H., and Na, S-W., "Response surface method using vector projected sampling points", *Structural Safety*, Vol. 19, No. 1, pp.3~19, 1997.
 19. Brenner, C.E. and Bucher, C., "Reliability Analysis of Nonlinear Structures Using Stochastic Finite Elements", *Probabilistic Mechanics & Structural Reliability*, Proc. of the 7th Special Conf., ASCE, 1996.

(접수일자 : 1998. 9. 30)