

비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성해석 I : 해석적 방법

Spatial Stability of Non-Symmetric Thin-Walled Curved Beams I: Analytical Approach

민 병 철
Min, Byoung-Cheol

김 준 영*
Kim, Moon-Young

요 지

본 연구에서는 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 안정성해석을 수행할 수 있는 이론 및 엄밀해를 제시하기 위하여, 3차원 연속체로부터 유도된 평형방정식으로부터 선형화된 가상일의 원리를 적용하였다. 박벽단면의 구속된 뒹(warping)과 곡률효과를 고려하고 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 곡선보의 변위장을 도입하여 단면에 대해 적분함으로써 도심축에 대한 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를 유도하였다. 또한, 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽원형 곡선보의 면내 및 면외좌굴에 대한 엄밀해를 유도하기 위하여, 면내에 대해서는 균일압축을 받는 원형아치의 역대칭 좌굴모드에 대한 좌굴하중을 유도하고 면외좌굴에 대해서는 균일압축 및 순수휨을 받는 아치의 처짐함수를 가정하여 곡선보의 횡좌굴하중에 대한 일반해를 제시하였다.

핵심용어 : 면내좌굴, 면외좌굴, 박벽보, 원형곡선보, 비대칭 단면

Abstract

An improved formulation for spatial stability of thin-walled curved beams with non-symmetric cross sections is presented based on the displacement field considering both constant curvature effects and the second order terms of finite semitangential rotations. By introducing Vlasov's assumptions and invoking the inextensibility condition, the total potential energy is derived from the principle of linearized virtual work for a continuum. In this formulation, all displacement parameters and the warping function are defined at the centroid axis so that the coupled terms of bending and torsion are added to the elastic strain energy. Also, the potential energy due to initial stress resultants is consistently derived corresponding to the semitangential rotation and moment. Analytical solutions are newly derived for in-plane as well as lateral-torsional buckling of monosymmetric thin-walled curved beams subjected to pure bending or uniform compression with simply supported conditions.

Keywords : in-plane buckling ; out-of-plane buckling ; thin-walled beam ; circular curved beam ; semitangential rotation ; non-symmetric section

1. 서 론

I형 단면, 앵글 또는 π 형 단면과 같은 박벽단

면을 갖는 구조부재는 외력에 대하여 최소의 자중을 갖는 경제적인 구조이다. 일반적으로 강 곡선교는 휨모멘트 외에 곡률의 영향으로 비틀림모

* 성균관대학교 토목공학과, 박사과정
** 정회원·성균관대학교 토목공학과, 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

멘트를 항상 받기 때문에 휨과 비틀림의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 따라서 박벽단면을 갖는 부재를 이용하여 구조물을 설계하기 위해서는 박벽보의 좌굴 및 동적 거동특성을 정확히 파악할 수 있어야 하며 현재까지 이에 대한 많은 연구가 이루어졌다. Timoshenko¹⁾는 I형 단면의 warping 구속효과를 고려한 직선 박벽보의 비틀림좌굴 이론을 정립하였으며, Vlasov²⁾는 Timoshenko의 연구와는 독립적으로 뒀 효과를 고려한 직선 및 곡선 박벽보에 대한 체계적인 이론을 제시하였다. Barsoum and Gallagher³⁾, Meek and Swannell⁴⁾는 일반화된 변위장에 기초한 유한요소 정식화과정을 연구하였으며 Kitipornchai and Trahair⁵⁾는 Barsoum 과 Gallagher의 유한요소 이론을 수정하여 일축대칭 단면에 대한 유한요소 이론으로 확장하였다. Roberts와 Burt⁶⁾는 에너지법을 이용하여 단순지지 되고 I형 일축대칭 단면을 갖는 보의 근사해를 제시하였다. Papangelis와 Trahair^{7), 8)}는 아치의 횡좌굴하중에 대한 이론식을 제시하고 실험을 통하여 검증하였다. Yang과 Kuo^{9)~12)}는 박벽 곡선보의 곡률효과를 고려한 안정성 해석을 수행하였고, Kang과 Yoo^{13), 14)}는 Yang과 다른 유도과정을 통하여 박벽 곡선보의 3차원 좌굴거동에 대한 이론해와 수치해를 조사 비교하였다. 또한 Kim과 Chang^{15), 16)}은 단면회전각의 2차항을 일관성 있게 고려하여 비대칭 단면을 갖는 직선 박벽보의 안정성 및 자유진동해석을 수행하였다. 이외에도 현재까지 박벽보에 대한 여러 가지 해석이론^{17)~20)}이 제시되어 왔지만, 박벽 곡선보의 횡좌굴거동에 대한 이론이 국제적으로 아직도 확립되어 있지 않은 상태라 사료된다. 따라서 본 연구에서는 박벽단면을 갖는 곡선보의 횡-비틀림좌굴거동을 파악할 수 있는 적절한 해석이론을 개발하기 위하여 semitangential rotation으로 정의된 단면회전의 2차항을 고려하여 박벽단면을 갖는 곡선보의 횡좌굴하중에 대한 엄밀해를 유도하는 한편 유한요소법을 제시한다. 또한 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 박벽 곡선보요소를 이용한 해석결과를 다른 연구자들의 결과와 비교 검토를

함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

2. 선형화된 가상일의 원리

비대칭 단면을 갖는 곡선 박벽보의 안정성 해석을 수행하기 위하여, 회전자유도를 갖는 3차원 연속체에 대한 가상일의 원리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_V \delta \tau_{ij} \delta^t \epsilon_{ij} dV = \int_S T_i \delta^t U_i dS \quad (1)$$

여기서 δ 는 변분을, τ_{ij} 와 ϵ_{ij} 는 각각 second Piola-Kirchhoff stress 와 Green-Lagrange strain이며 T_i 는 표면력을 나타내고 U_i 는 전체 변위를 나타낸다. 박벽 아치의 안정성해석을 위하여 초기응력을 받는 연속체를 생각한다. 초기변위는 없다고 가정하고 초기응력과 초기 표면력이 평형을 이루고 있다고 가정하면 응력과 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_i = U_i + U_i' \quad (2a)$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} \quad (2b)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} + \tau_{ij}' \quad (2c)$$

$$T_i = T_i + T_i' \quad (2d)$$

여기서 왼쪽 위 첨자 'o'와 't'는 각각 초기상태 및 전체상태를, 위 첨자가 없는 것은 증분치를 나타내며 U_i 와 U_i' 는 각각 변위에 대한 1차 및 2차항을 나타내는 것으로 식 (9)와 (10)에 나타내었다.

박벽단면을 갖는 곡선보의 안정성해석에서 회전변위에 대한 2차항은 매우 중요하므로 본 연구에서는 Green-Lagrangian strain에 회전변위의 2차항에 해당하는 U_i' 를 다음과 같이 고려한다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{ (U_i + U_i')_{,j} + (U_j + U_j')_{,i} + (U_k + U_k')_{,i} \cdot (U_k + U_k')_{,j} \} \quad (3)$$

여기서 아래첨자 'comma'는 부재좌표계 (x_1, x_2, x_3) 에 의한 편미분을 나타내며 식 (3)에서 고차항을 무시하면 다음과 같이 근사시켜 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_{ij} \cong e_{ij} + \eta_{ij} + e'_{ij} \tag{4}$$

여기서

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \tag{5a}$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}U_{k,i} \cdot U_{k,j} \tag{5b}$$

$$e'_{ij} = \frac{1}{2}(U'_{i,j} + U'_{j,i}) \tag{5c}$$

식 (4)에서 e_{ij} 와 η_{ij} 는 각각 U_i 에 대한 선형 및 비선형 변형도항을 나타내며 e'_{ij} 는 U'_i 에 대한 선형 변형도항을 나타내는 것으로 식 (11), (12) 그리고 (13)에 각각 나타내었다. 한편, 초기응력과 표면력에 대한 평형상태는 다음과 같다.

$$\int_V {}^0\tau_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_S {}^0T_i \delta U_i dS \tag{6}$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하고, 식 (6)을 고려하며, 그리고 회전변위의 2차항을 포함시키면 다음과 같이 초기응력을 받는 연속체의 선형화된 가상일의 원리를 얻을 수 있다.

$$\int_V (\tau_{ij} \delta e_{ij} + {}^0\tau_{ij} \delta \eta_{ij} + {}^0\tau_{ij} \delta e'_{ij}) dV + \int_S T_i \delta U_i dS = \int_S T_i \delta U_i dS \tag{7}$$

여기서 첫 번째 항은 탄성변형에너지를 나타내고 두 번째는 초기응력으로 인한 포텐셜에너지, 세 번째 항은 단면 회전에 대한 2차항을 고려했을 때 나타나는 초기응력으로 인한 포텐셜에너지 그리고 네 번째 항은 초기 표면력에 의한 포텐셜에너지이다. 마지막 항은 요소 절첩력에 대응하는 포텐셜에너지를 나타낸다.

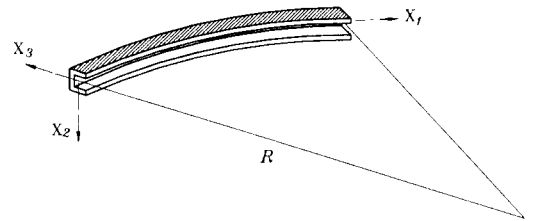
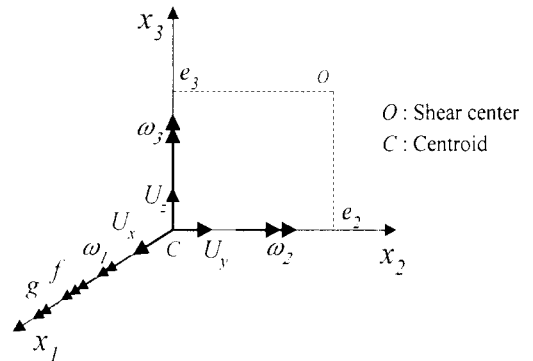


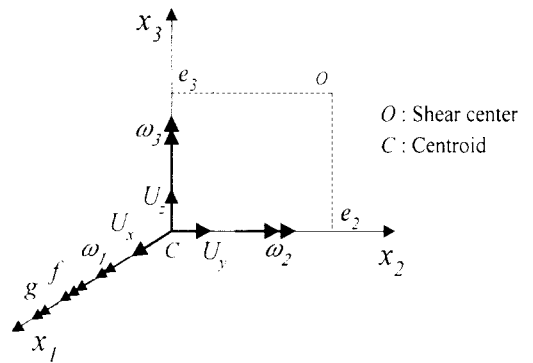
그림 1 곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계

2.1 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 변위장

그림 2는 부재좌표계 (x_1, x_2, x_3) 에 대하여 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 변위파라미터와 단면력을 나타낸 것으로 x_1 은 도심축, x_2 와 x_3 는 주축을 나타낸다. $(0, e_2, e_3)^T$ 는 부재좌표계에서, 전단중심의 좌표를 나타낸다. U_x, U_y, U_z 와 $\omega_1,$



(a) 변위장



(b) 단면력

그림 2 박벽곡선보의 변위장 및 단면력

ω_2, ω_3 는 각각 x_1, x_2 그리고 x_3 축 방향의 강체이동변위 (rigid body translation) 및 강체회전변위 (rigid body rotation)를 나타내고 f 는 단면의 뒎변형에 의한 x_1 축에 대한 회전각 $\theta(=\omega_1)$ 의 변화율이다. g 는 곡률을 고려한 U 의 변화율을 나타내며 전단변형효과가 무시되는 경우, 회전변위파라미터 ω_2, ω_3 그리고 f 는 Frenet(Love 1934)의 정의로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_2 = -U_z' + \frac{U_x}{R} \tag{8a}$$

$$\omega_3 = U_v' \tag{8b}$$

$$f = -\theta' - \frac{U_v'}{R} \tag{8c}$$

$$g = U_x' + \frac{U_x}{R} \tag{8d}$$

여기서 뒎첨자 'prime'은 x_1 에 대한 미분을 나타낸다.

변형을 제외하고 단면의 면내에 대한 강체거동을 가정할 때, 회전변위의 1차항 및 2차항을 포함하는 총 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다 (Kim et al. 1996).

$$U = U_o + \left(S + \frac{1}{2}S^2\right)X_o \tag{9}$$

여기서

$$U = (U_1 + U_1', U_2 + U_2', U_3 + U_3')^T \tag{10a}$$

$$U_o = (U_x + f\phi, U_v, U_z)^T \tag{10b}$$

$$X_o = (0, x_2, x_3)^T \tag{10c}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

그리고 ϕ 는 도심축에 대하여 정의된 뒎함수를 나타내고 전단중심에서 정의된 뒎함수 ϕ_s 와의 관계는 다음과 같다.

$$\phi = \phi_s + e_{23}x_3 - e_{33}x_2 \tag{12}$$

결국, 부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틀림 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때, 박벽단면의 임의의 점에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_1 = U_x - x_2 U_v' - x_3 \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) - \left(\theta' + \frac{U_v'}{R} \right) \phi(x_2, x_3) \tag{13a}$$

$$U_2 = U_v - x_3 \theta \tag{13b}$$

$$U_3 = U_z + x_2 \theta \tag{13c}$$

그리고

$$U_1' = \frac{1}{2} \left[-\theta \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) x_2 + \theta U_v' x_3 \right] \tag{14a}$$

$$U_2' = \frac{1}{2} \left[-(\theta^2 + U_v'^2) x_2 - \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) U_v' x_3 \right] \tag{14b}$$

$$U_3' = \frac{1}{2} \left[-\left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) U_v' x_2 - \left\{ \theta^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} x_3 \right] \tag{14c}$$

여기서 식 (13) 과 (14)는 각각 변위파라미터에 대한 1차 및 2차 항을 나타내는 것으로 다른 연구자들과는 달리 본 연구에 의해 새롭게 제시되었으며, 이로부터 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를 일관성 있게 유도할 수 있게 된다.

2.2 박벽 곡선보의 뒎형도 변위관계

Vlasov의 가정에 따라 뒎내변형도(e_{22}, e_{33}, e_{23})를 무시하고, 뒎내응력($\tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}$)은 영으로 가정하면 박벽 곡선보의 선형 뒎형도-변위관계는 식 (15)과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{11} = \left(U_{11} + \frac{U_3}{R} \right) \cdot \frac{R}{R+x_3} = \left[U_x' + \frac{U_x}{R} - x_2 \left(U_v'' - \frac{\theta}{R} \right) - x_3 \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) - \phi \left(\theta'' + \frac{U_v''}{R} \right) \right] \cdot \frac{R}{R+x_3} \tag{15a}$$

$$\begin{aligned}
 2e_{12} &= U_{2,1} \cdot \frac{R}{R+x_3} + U_{1,2} \\
 &= (U_y' - x_3\theta') \frac{R}{R+x_3} - U_y' - \left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right) \cdot \phi_2 \\
 &\quad (15b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2e_{13} &= \left(U_{3,1} - \frac{U_1}{R}\right) \cdot \frac{R}{R+x_3} + U_{1,3} \\
 &= \left[U_z' - \frac{U_x}{R} + x_2\left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right) + \frac{x_3}{R}\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right) + \frac{\phi}{R}\left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right)\right] \cdot \frac{R}{R+x_3} \\
 &\quad - \left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right) - \left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right) \cdot \phi_3 \quad (15c)
 \end{aligned}$$

그리고 외력에 의한 포텐셜에너지를 나타내기 위한 비선형 변형도-변위 관계와 단면회전각의 2차항에 대응하는 선형 변형도-변위 관계는 각각 식 (16) 과 식 (17) 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \eta_{11} &= \frac{1}{2} \left[\left(U_{1,1} + \frac{U_3}{R} \right)^2 + U_{2,1}^2 + \left(U_{3,1} - \frac{U_1}{R} \right)^2 \right] \\
 &\quad \cdot \left(\frac{R}{R+x_3} \right)^2 \quad (16a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{12} &= \frac{1}{2} \left[U_{1,2} \left(U_{1,1} + \frac{U_3}{R} \right) + U_{2,2} \cdot U_{2,1} + U_{3,2} \left(U_{3,1} - \frac{U_1}{R} \right) \right] \\
 &\quad \cdot \frac{R}{R+x_3} \quad (16b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{13} &= \frac{1}{2} \left[U_{1,3} \left(U_{1,1} + \frac{U_3}{R} \right) + U_{2,3} \cdot U_{2,1} + U_{3,3} \left(U_{3,1} - \frac{U_1}{R} \right) \right] \\
 &\quad \cdot \frac{R}{R+x_3} \quad (16c)
 \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{2} \left[- \left\{ \theta \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \right\}' x_2 + (\theta U_y')' x_3 \right. \\
 &\quad + \frac{1}{R} \left[- \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) U_y' x_2 \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\theta^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right) x_3 \right] \right] \frac{R}{R+x_3} \quad (17a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2e_{12} &= \frac{1}{2} \left[- (\theta^2 + U_y'^2)' x_2 - \left\{ \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) U_y' \right\}' x_3 \right] \frac{R}{R+x_3} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \theta \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \quad (17b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2e_{13} &= \frac{1}{2} \left[- \left\{ \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) U_y' \right\}' x_2 - \left\{ \theta^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\}' x_3 \right. \\
 &\quad \left. + \theta \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \frac{x_2}{R} - \theta U_y' \frac{x_3}{R} \right] \frac{R}{R+x_3} + \frac{1}{2} \theta U_y' \quad (17c)
 \end{aligned}$$

또한, 전단중심에서 정의된 단면상수는 식 (12) 를 이용하여 도심에 대한 단면상수로 변환할 수 있으며 그 변환식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 I_\phi &= \int_A \phi^2 dA = \int_A (\phi_0 + e_2 x_3 - e_3 x_2)^2 dA \\
 &= I_\phi^0 + e_2^2 I_2 + e_3^2 I_3
 \end{aligned}$$

$$I_{\phi 2} = \int_A \phi x_3 dA = \int_A (\phi_0 + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_3 dA = e_2 I_2$$

$$I_{\phi 3} = \int_A \phi x_2 dA = \int_A (\phi_0 + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_2 dA = -e_3 I_3$$

$$\begin{aligned}
 I_{\phi 22} &= \int_A \phi x_3^2 dA = \int_A (\phi_0 + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_3^2 dA \\
 &= I_{\phi 22}^0 + e_2 I_{222} - e_3 I_{223}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\phi 33} &= \int_A \phi x_2^2 dA = \int_A (\phi_0 + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_2^2 dA \\
 &= I_{\phi 33}^0 + e_2 I_{233} - e_3 I_{333}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\phi 23} &= \int_A \phi x_3 x_2 dA = \int_A (\phi_0 + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_3 x_2 dA \\
 &= I_{\phi 23}^0 + e_2 I_{223} - e_3 I_{233}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\phi \phi 2} &= \int_A (\phi_0 + e_2 x_3 - e_3 x_2)^2 x_3 dA = I_{\phi \phi 2}^0 + e_2^2 I_{222} \\
 &\quad + e_3^2 I_{333} + 2e_2 I_{\phi 22}^0 - 2e_3 I_{\phi 23}^0 - 2e_2 e_3 I_{223}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\phi \phi 3} &= \int_A (\phi_0 + e_2 x_3 - e_3 x_2)^2 x_2 dA = I_{\phi \phi 3}^0 + e_2^2 I_{223} \\
 &\quad + e_3^2 I_{333} + 2e_2 I_{\phi 23}^0 - 2e_3 I_{\phi 33}^0 - 2e_2 e_3 I_{233} \quad (18)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_A x_3^2 dA, \quad I_3 = \int_A x_2^2 dA, \quad I_{22} = \int_A x_3^2 dA \\
 I_{23} &= \int_A x_2 x_3 dA, \quad I_{33} = \int_A x_2^2 dA
 \end{aligned} \tag{19}$$

단면상수의 윗첨자 's'는 전단중심에서 정의되었음을 나타내고 첨자가 없는 것은 도심축에 대하여 정의되었음을 나타낸다.

박벽단면의 면내응력은 평면응력(plane stress), 면내변형은 강체로 가정하는 경우에 그림 2(b)에서 나타낸 바와 같이 도심축에 대한 단면력을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_A \tau_{11} dA, \quad F_2 = \int_A \tau_{12} dA, \quad F_3 = \int_A \tau_{13} dA \\
 M_1 &= \int_A (\tau_{13} x_2 - \tau_{12} x_3) dA, \quad M_2 = \int_A \tau_{11} x_3 dA, \\
 M_3 &= - \int_A \tau_{11} x_2 dA, \quad M_\rho = \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA \\
 M_\phi &= \int_A \tau_{11} \phi dA
 \end{aligned} \tag{20}$$

여기서 F_1 은 축방향력, F_2 와 F_3 는 전단력을 나타낸다. M_2 와 M_3 는 각각 x_2 와 x_3 에 대한 휨모멘트이고 M_1 와 M_ϕ 는 각각 비틀모멘트 및 바이모멘트(bi-moment)이다. 그리고 M_ρ 는 Wagner효과를 나타내는 단면력이다.

2.3 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보 총포텐셜에너지

비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성해석을 수행하기 위하여, 3차원 곡선보 요소의 총포텐셜에너지 Π 는 탄성변형에너지 Π_e 와 초기 단면력으로 인한 포텐셜에너지 Π_G 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_G \tag{21}$$

식(21)에 나타낸 총포텐셜에너지 Π 를 구체적으로 표시하면 다음과 같다.

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_L \int_A [E e_{11}^2 + 2G e_{12}^2 + 2G e_{13}^2] dA dx_1 \tag{22a}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_G &= \int_L \int_A [\tau_{11}(\eta_{11} + e_{11}^*) + 2\tau_{12}(\eta_{12} + e_{12}^*) \\
 &\quad + 2\tau_{13}(\eta_{13} + e_{13}^*)] dA dx_1
 \end{aligned} \tag{22b}$$

여기서 E 와 G 는 각각 탄성계수와 전단 탄성계수를 나타내고 선형 변형도(식(15))를 식(22a)에 대입하고 적분을 행하면 다음과 같이 탄성변형에너지(식(22a))에 대한 결과식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \Pi_e &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(U_x' + \frac{U_z}{R} \right)^2 + EI_2 \left(U_z'' + \frac{U_x}{R^2} \right)^2 \right. \\
 &\quad + EI_3 \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 + GJ \left(\theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 \\
 &\quad + EI_\phi \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right)^2 - 2E \frac{I_{23}}{R} \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(U_z'' + \frac{U_x}{R^2} \right) \\
 &\quad + 2EI_{\phi 3} \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(\theta'' + \frac{U_x}{R^2} \right) \\
 &\quad \left. + 2EI_{\phi 2} \left(U_z'' + \frac{U_x}{R^2} \right) \left(\theta'' + \frac{U_y'}{R} \right) \right] dx_1
 \end{aligned} \tag{23a}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_2 &= I_2 - \frac{I_{22}}{R}, \quad \hat{I}_3 = I_3 - \frac{I_{33}}{R}, \quad \hat{I}_\phi = I_\phi - \frac{I_{\phi 2}}{R} \\
 \hat{I}_{\phi 3} &= I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R}, \quad \hat{I}_{\phi 2} = I_{\phi 2} - \frac{I_{\phi 22}}{R}
 \end{aligned} \tag{23b}$$

여기서 A , I_2 그리고 I_3 는 각각 단면적, x_2 축에 대한 단면 2차 모멘트 그리고 x_3 축에 대한 단면 2차 모멘트를 나타내고 J 와 I_ϕ 는 각각 비틀상수와 뒹상수를 나타낸다. 그리고 식(23a)에서의 곡률 항은 다음과 같은 근사식을 적용한다.

$$\frac{R}{R+x_3} \cong 1 - \frac{x_3}{R} \tag{24}$$

한편, 초기응력에 의한 포텐셜에너지 Π_G 는 비선형 변형도-변위 관계로부터 얻어지는 Π_{G1} 과 단

면회전각의 2차항에 대응하는 선형 변형도-변위 관계로부터 얻어지는 Π_{G2} 의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi_G = \Pi_{G1} + \Pi_{G2} \quad (25a)$$

여기서

$$\Pi_{G1} = \int_L \int_A [\tau_{11}\eta_{11} + 2\tau_{12}\eta_{12} + 2\tau_{13}\eta_{13}] dA dx_1 \quad (25b)$$

$$\Pi_{G2} = \int_L \int_A [\tau_{11}e_{11} + 2\tau_{12}e_{12} + 2\tau_{13}e_{13}] dA dx_1 \quad (25c)$$

변형도-변위관계를 나타내는 식 (16) 과 (17) 을 식 (25) 에 대입하고 단면에 대하여 적분하면 Π_{G1} 와 Π_{G2} 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \Pi_{G1} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[F_1 \left\{ U_v'^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} \right. \\ & + M_2 \left\{ -2U_v'\theta' - \frac{1}{R}U_v'^2 + \frac{1}{R} \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} \\ & - 2 \left(M_3 - \frac{M_\phi}{R} \right) \left\{ \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_v'}{R} \right) \right\} \\ & \left. + \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) \left\{ \left(\theta' + \frac{U_v'}{R} \right)^2 \right\} dA \right] dx_1 \quad (26) \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned} \Pi_{G2} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[M_3 \left\{ \left(\theta \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \right)' + \frac{1}{R} U_v' \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \right\} \right. \\ & + F_3 (\theta U_v') + M_2 \left\{ (\theta U_v')' - \frac{1}{R} \left[\theta^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right] \right\} \\ & - \int_A \tau_{12} x_2 (\theta^2 + U_v'^2)' dA - \int_A \tau_{13} x_3 \left\{ U_v' \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \right\}' \\ & + \frac{\theta}{R} \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)' dA - F_2 \theta \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \\ & - \int_A \tau_{13} x_2 \left\{ U_v' \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \right\}' + \frac{\theta}{R} \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)' dA \\ & \left. - \int_A \tau_{13} x_3 \left\{ \theta^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\}' dA \right] dx_1 \quad (27) \end{aligned}$$

여기서 식 (28) 과 같은 비신장 조건 (inextensibility condition) 을 가정한다.

$$U_x' + \frac{U_x}{R} \simeq 0 \quad (28)$$

결국, 식 (28) 을 적용하고 식 (26) 과 (27) 로부터 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 포텐셜에너지 Π_G 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[F_1 \left\{ U_v'^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} + M_2 \left(\theta' + \frac{U_v'}{R} \right)^2 \right. \\ & - F_3 (U_v'\theta) + M_2 \left(\theta U_v'' - U_v'\theta' - \frac{U_v'^2}{R} - \frac{\theta^2}{R} \right) \\ & + 2 \frac{M_\phi}{R} \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_v'}{R} \right) \\ & + M_3 \left\{ \theta \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) - \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_v'}{R} \right) \right\} \\ & + F_2 \theta \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) + M_1 \left\{ \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left(U_v'' - \frac{\theta}{R} \right) \right. \\ & \left. - U_v' \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) \right\} \right] dx_1 \quad (29) \end{aligned}$$

본 연구의 휨모멘트 및 비틀림모멘트에 대한 포텐셜에너지는 semitangential moment에 대응하는 가장 일반적인 형태의 포텐셜에너지로 유도되었다. 한편, 박벽 직선보의 총포텐셜에너지 식은 식 (23a) 와 식 (29) 에서 $1/R$ 을 '영' 으로 하면 얻어질 수 있다.

2.4 Wagner 효과

임의의 하중을 받는 비대칭 박벽 곡선보의 안정성해석을 수행하기 위하여, 식 (15) 를 (20) 에 대입하고 단면에 대하여 적분하면 내력성분 F_1 , M_2 , M_3 그리고 M_ϕ 에 대한 힘-변위 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1 = & EA \left(U_x' + \frac{U_x}{R} \right) - \frac{E}{R^2} I_{223} \left(U_v'' - \frac{\theta}{R} \right) \\ & + \frac{E}{R} \hat{I}_2 \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) + \frac{E}{R} \hat{I}_{\phi 2} \left(\theta'' + \frac{U_v''}{R} \right) \quad (30a) \end{aligned}$$

$$M_2 = -EI_2 \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) + E\hat{I}_{223} \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) - E\hat{I}_{\phi 2} \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \quad (30b)$$

$$M_3 = -E\frac{\hat{I}_{223}}{R^2} \left(U_x' + \frac{U_z}{R} \right) + E\hat{I}_3 \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) - E\frac{\hat{I}_{223}}{R} \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) + E\hat{I}_{\phi 3} \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \quad (30c)$$

$$M_\phi = -E\frac{\hat{I}_{\phi 2}}{R} \left(U_x' + \frac{U_z}{R} \right) - E\hat{I}_{\phi 3} \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) - E\hat{I}_{\phi 2} \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) - E\hat{I}_{\phi} \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \quad (30d)$$

식 (30)에서 곡선보에 작용하는 내력성분 F_1 , M_2 , M_3 그리고 M_ϕ 가 정해지면, 연립방정식을 계산함으로써 네 개의 변위파라미터가 결정되고 이로부터 식 (31)을 이용하여 M_p 가 얻어진다.

$$M_p = E(\hat{I}_2 + \hat{I}_3) \left(U_x' + \frac{U_z}{R} \right) - E(I_{223} + I_{333}) \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) - E(I_{222} + I_{233}) \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) - E(I_{\phi 22} + I_{\phi 33}) \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \quad (31)$$

x_3 에 대하여 대칭인 (Fig. 1 참조) 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보인 경우에, 다음의 단면상수는 '영'이 된다.

$$I_{223} = 0, \quad I_{333} = 0, \quad I_{\phi 2} = 0, \quad I_{\phi 22} = 0 \quad (32)$$

식 (32)를 고려하면 식 (30)과 (31)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$F_1 = EA \left(U_x' + \frac{U_z}{R} \right) + \frac{E}{R} \hat{I}_2 \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) \quad (33a)$$

$$M_2 = -EI_2 \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) \quad (33b)$$

$$M_3 = E\hat{I}_3 \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) + E\hat{I}_{\phi 3} \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \quad (33c)$$

$$M_\phi = -E\hat{I}_{\phi 3} \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) - E\hat{I}_{\phi} \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \quad (33d)$$

$$M_p = E(\hat{I}_2 + \hat{I}_3) \left(U_x' + \frac{U_z}{R} \right) - E(I_{222} + I_{233}) \left(U_z'' + \frac{U_x}{R} \right) - E\hat{I}_{\phi 3} \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \quad (33e)$$

단면력 M_p 를 구하기 위하여 식 (33a-d)에 제시된 단면력 F_1 , M_3 , M_ϕ 를 연립하여 풀고 식 (33e)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$M_p \cong \hat{\beta}_1 F_1 + \hat{\beta}_2 M_2 + \hat{\beta}_3 M_3 + \hat{\beta}_\phi M_\phi \quad (34a)$$

여기서

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{I}_2 + \hat{I}_3}{A}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\beta}_1}{R} + \frac{I_{222} + I_{233}}{\hat{I}_2} \quad (34b,c)$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{I_{\phi 33} \hat{I}_{\phi 3}}{\hat{I}_3 \hat{I}_{\phi} - \hat{I}_{\phi 3}^2}, \quad \hat{\beta}_\phi = \frac{I_{\phi 33} \hat{I}_{\phi 3}}{\hat{I}_3 \hat{I}_{\phi} - \hat{I}_{\phi 3}^2} \quad (34d,e)$$

한편, 비대칭 단면을 갖는 박벽 직선보의 힘-변위 관계는 다음과 같이 얻어진다.

$$F_1 = EA U_x' \quad (35a)$$

$$M_2 = -EI_2 U_z'' - EI_{\phi 2} \theta'' \quad (35b)$$

$$M_3 = EI_3 U_y'' + EI_{\phi 3} \theta'' \quad (35c)$$

$$M_\phi = -EI_{\phi 3} U_y'' - EI_{\phi 2} U_z'' - EI_{\phi} \theta'' \quad (35d)$$

$$M_p = E(I_2 + I_3) U_x' - E(I_{223} + I_{333}) U_y'' - E(I_{222} + I_{233}) U_z'' - E(I_{\phi 22} + I_{\phi 33}) \theta'' \quad (35e)$$

식 (35a-d)로부터, 식 (35e)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_p \cong \beta_1 F_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \beta_\phi M_\phi \quad (36a)$$

여기서

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{I_2 + I_3}{A}, & \beta_2 &= \frac{I_{22} + I_{222}}{I_2} - e_2 \beta_\phi \\ \beta_3 &= \frac{I_{223} + I_{333}}{I_3} - e_3 \beta_\phi \\ \beta_\phi &= \frac{I_{\phi 22} + I_{\phi 33} - e_2(I_{222} + I_{233}) + e_3(I_{223} + I_{333})}{I_\phi - e_2^2 I_2 - e_3^2 I_3} \\ &= \frac{I_{\phi 22} + I_{\phi 33}}{I_\phi} \end{aligned} \quad (36b)$$

3. 일축대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 엄밀해

단순지지된 박벽 곡선보의 변형을 적절히 나타낼 수 있는 정확한 변위함수를 가정하고, 비신장 조건(inextensibility condition, 식(28))을 도입하여 균일압축 및 순수휨을 받는 곡선보의 총포텐셜에너지를 제시한다. 또한, X-Z평면에 대하여 대칭단면(그림 1참조)을 갖는 일축대칭 박벽 곡선보의 면내 및 면외좌굴에 대한 엄밀해를 유도하고 다른 연구자들의 결과와 비교함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

3.1 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내좌굴

균일압축을 받고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내좌굴에 대한 엄밀해를 제시하기 위

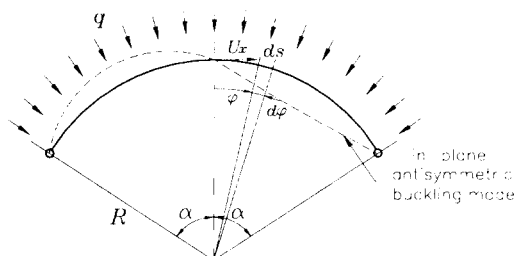


그림 3 균일압축을 받는 원형아치의 면내좌굴

하여, 식(23)과 (29)로부터 면내변형과 관련된 항만을 정리하여 얻어진 총포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_E + \Pi_G &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[EA \left(U_x' + \frac{U_x}{R} \right)^2 + EI_2 \left(U_x'' - \frac{U_x}{R^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + F_1 \left(U_x' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (37)$$

식(28)의 비신장 조건(inextensibility condition)을 고려하면 총포텐셜에너지는 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_E + \Pi_G &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI_2 \left(R U_x''' + \frac{U_x}{R} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + F_1 R^2 \left(U_x'' - \frac{U_x}{R^2} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (38)$$

식(38)에 나타낸 곡선보의 면내거동에 대한 총포텐셜에너지에 대하여 변분(variational principle)을 취하면 다음과 같이 6차의 평형 미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} (R^4 U_x'''''' + 2R^2 U_x'''' + U_x) \\ + k^2 \left(R^2 U_x''' + 2U_x'' + \frac{U_x}{R^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{여기서 } F_1 = qR, \quad k^2 = \frac{qR^3}{EI_2} \quad (40)$$

식(39)로부터 축방향 변위 $U_x(\phi)$ 에 대한 일반해는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} U_x &= A \cos \frac{x}{R} + B \sin \frac{x}{R} + C x \cos \frac{x}{R} + D x \sin \frac{x}{R} \\ &\quad + E \cos \frac{kx}{R} + F \sin \frac{kx}{R}, \quad -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} \end{aligned} \quad (41)$$

축방향 변위 U_x 에서 대칭 좌굴모드에 해당하는 우함수(even function)를 취한 후, 식(28)의 비신장 조건을 고려하면 면내 변형 U_x 에 대해서

는 역대칭 (antisymmetric) 좌굴모드를 얻게된다. 즉, 식 (41)에서 밑줄 친 항은 U_x 에 대해서는 대칭 좌굴모드에 해당하고 U_y 에 대해서는 그림 3에서의 점선과 같이 역대칭 좌굴모드에 대응한다. 역대칭 좌굴에 대한 엄밀해를 얻기 위하여 식 (41)에서 밑줄 친 항만을 고려하고, 다음과 같이 양단에 대하여 힌지의 경계조건을 대입한다.

$$U_x(x \pm \frac{l}{2}) = 0, \quad U_x'(x \pm \frac{l}{2}) = 0, \\ U_x'''(x \pm \frac{l}{2}) = 0 \quad (42)$$

결국, 식 (42)의 경계조건을 고려하여 얻어진 3개의 방정식으로부터 행렬식을 취하면, 아래와 같이 단순지지되고 균일압축을 받는 박벽 원형 곡선보의 면내좌굴에 대한 일반해를 얻을 수 있다.

$$k(k^2 - 1) \sin ka (\alpha + \cos \alpha \sin \alpha) \\ + 2 \sin \alpha (\cos ka - k \cos \alpha \sin ka) = 0 \quad (43a)$$

여기서

$$\alpha = \frac{l}{2R} \quad (43b)$$

본 연구에서 얻어진 엄밀해 (식 (43))는 Oran과 Reagan (1964)의 결과와 동일하게 얻어졌으며, 그 밖의 다른 연구자들의 결과는 부록 I에 제시하였다.

3.2 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외좌굴

순수휨 및 균일압축을 받으며 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외좌굴에 대한 엄밀해를 유도하기 위하여, 식 (23), (29)로부터 면외 및 비틀 거동과 관련된 항만을 재정리하면 총포텐셜 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_3 \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 + GJ \left(\theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 \right. \\ & + EI_6 \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right)^2 + 2EI_{63} \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(\theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \\ & + F_1 U_y'^2 + M_p \left(\theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 + M_3 \left(U_y'' \theta - U_y' \theta' \right. \\ & \left. \left. - \frac{U_y'^2}{R} - \frac{\theta^2}{R} \right) \right] dx_1 \quad (44) \end{aligned}$$

면내력만 작용하고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 좌굴해석을 수행하기 위하여, 단면력 M_3 와 M_p 를 무시하면 식 (34a)로부터 M_p 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_p = \hat{\beta}_1 F_1 + \hat{\beta}_2 M_3 \quad (45)$$

양단이 단순지지된 경우, 원형 곡선보의 면외 거동에 대한 횡방향 변위 U_y 와 비틀 변위 θ 에 대한 변위함수는 식 (46)과 같이 가정할 수 있다.

$$U_y = B \sin(\lambda x_1), \quad \theta = D \sin(\lambda x_1) \quad (46)$$

여기서 $\lambda = \frac{n\pi}{L}$

식 (49)에서 B 와 D 는 미지계수 (amplitude)이고 n 은 좌굴모드의 마디를 나타낸다. 가정된 변위함수를 식 (44)에 대입하고 변분을 취하면, 미지계수에 B 와 D 에 대한 행렬방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

여기서

$$\begin{aligned} K_{11} = & EI_3 \lambda^4 + GJ \frac{\lambda^2}{R^2} + EI_6 \frac{\lambda^4}{R^2} + 2EI_{63} \frac{\lambda^4}{R} \\ & + M_3 \lambda^2 \left(\frac{\hat{\beta}_2}{R^2} - \frac{1}{R} \right) + F_1 \left(\lambda^2 + \hat{\beta}_1 \frac{\lambda^2}{R^2} \right) \quad (48a) \end{aligned}$$

$$K_{12} = E\hat{I}_3 \frac{\lambda^2}{R} + GJ \frac{\lambda^2}{R} + E\hat{I}_o \frac{\lambda^4}{R} + E\hat{I}_{o3} \left(\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{R^2} \right) + M_2 \lambda^2 \left(\frac{\hat{\beta}_2}{R} - 1 \right) + F_1 \left(\hat{\beta}_1 \frac{\lambda^2}{R} \right) \quad (48b)$$

$$K_{12} = K_{21} \quad (48c)$$

$$K_{22} = E\hat{I}_3 \frac{1}{R^2} + GJ \lambda^2 + E\hat{I}_o \lambda^4 + 2E\hat{I}_{o3} \frac{\lambda^2}{R} + M_2 \left(\hat{\beta}_2 \lambda^2 - \frac{1}{R} \right) + F_1 (\hat{\beta}_1 \lambda^2) \quad (48d)$$

M_2 에 의한 곡선보의 면외좌굴하중을 얻기 위하여 F_1 을 무시하고 식(47)에 나타낸 행렬식을 영이라 놓으면, 좌굴모멘트 M_{2cr} 에 대하여 아래와 같이 2차 식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$A_1 M_{2cr}^2 + A_2 M_{2cr} + A_3 = 0 \quad (49)$$

여기서

$$A_1 = - \left(1 - \frac{\hat{\beta}_2}{R} \right) \quad (50a)$$

$$A_2 = E\hat{I}_3 \left\{ \hat{\beta}_2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{R^2} \right) + \frac{1}{R} \right\} + \frac{GJ}{R} + E\hat{I}_o \frac{\lambda^2}{R} + 2E\hat{I}_{o3} \lambda^2 \quad (50b)$$

$$A_3 = \left(\lambda^2 - \frac{1}{R^2} \right) [E\hat{I}_3 (GJ + E\hat{I}_o \lambda^2) - (E\hat{I}_{o3} \lambda^2)] \quad (50c)$$

같은 방법으로, 단순지지되고 균일압축을 받는 박벽 곡선보의 면외 좌굴하중 F_{1cr} 을 얻기 위하여 M_2 를 무시하고 행렬식을 영이라 놓으면, 좌굴하중 F_{1cr} 에 대하여 다음과 같이 2차 식으로 나타내 수 있다.

$$B_1 F_{1cr}^2 + B_2 F_{1cr} + B_3 = 0 \quad (51)$$

여기서

$$B_1 = \hat{\beta}_1 \lambda^2 \quad (52a)$$

$$B_2 = E\hat{I}_3 \left\{ \hat{\beta}_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{R^2} \right) + \frac{1}{R^2} \right\} + GJ \lambda^2 + E\hat{I}_o \lambda^4 + 2E\hat{I}_{o3} \frac{\lambda^2}{R} \quad (52b)$$

$$B_3 = \left(\lambda^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 [E\hat{I}_3 (GJ + E\hat{I}_o \lambda^2) - (E\hat{I}_{o3} \lambda^2)] \quad (52c)$$

한편, 순수휨 및 균일압축을 받는 곡선보의 면외좌굴에 대한 다른 연구자들의 엄밀해는 부록 I에 나타내었다.

4. 결 론

본 연구에서는 비대칭 단면을 갖는 박벽 원형 아치의 3차원 좌굴해석을 수행하기 위하여, 3차원 연속체에 대한 평형방정식으로부터 유도된 선형화된 가상일의 원리를 적용하였다. Vlasov의 가정에 기초한 박벽단면의 구속된 뒨(warping)과 곡률효과를 고려하고 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 곡선보의 변위장을 도입하여 단면에 대해 적분함으로써 도심축에 대한 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를 유도하였다. 또한, 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽원형 곡선보의 면내 및 면외좌굴에 대한 엄밀해를 유도하기 위하여, 면내에 대해서는 균일압축을 받는 원형아치의 역대칭 좌굴모드에 대한 좌굴하중을 유도하고 면외좌굴에 대해서는 균일압축 및 순수휨을 받는 아치의 처짐함수를 가정하여 곡선보의 횡좌굴하중에 대한 일반해를 제시하였다.

연계 논문²²⁾(비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성 해석 II: 수치적방법)에서는 임의의 경계조건과 하중조건을 갖는 박벽 원형아치의 좌굴해석을 수행하기 위하여, 비대칭 박벽단면을 갖는 직선보요소 및 곡선보요소를 개발하고 유한요소 정식화 과정을 제시하였다. 또한, 본 연구

에서 제시한 엄밀해 및 유한요소를 이용하여 다양한 원형아치를 해석하고 다른 연구자들의 해석결과와 범용 구조해석프로그램을 이용한 해석결과를 비교함으로써 본 연구의 타당성을 입증하였다.

감사의 글

본 연구는 성균관대학교의 산업설비 안전성 평가센터 (SAFE) 의 연구비에 의하여 연구되었기에 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Timoshenko, S.P., and Gere, J.M.(1961). *Theory of elastic stability*. 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, N.Y.
2. Vlasov, V.Z.(1991). *Thin-walled elastic beams*. 2nd Ed., National Science Foundation, Washington, D.C.
3. Barsoum, R.S., and Gallagher, R.H. (1970). "Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems" *Int. J. Numer. Methods in Engrg.*, 2(3), 335-352.
4. Meek, J.L., and Swannell, P. (1977). "The lateral-torsional buckling problem reviewed from virtual displacement principles" *Civil Eng. Trans. Inst. Engineers Aust.* CE19, 153-161.
5. Kitipornchai, S., and Trahair, N.S., (1980). "Buckling properties of monosymmetric I-beams" *J. Struct. Div., Eng.*, ASCE, 106 (ST5), 941-958.
6. Roberts, T.M., and Burt, C.A. (1985). "Instability of monosymmetric I-beams and cantilevers" *Int. J. Mech. Sci.*, 27(5), 313-324.
7. Papangelis, T.P., and Trahair, N.S.(1987a). "Flexural-torsional buckling of arches." *J. Engrg.*, ASCE, 113(4), 889-906.
8. Papangelis, T.P., and Trahair, N.S.(1987b). "Flexural-torsional buckling test on arches." *J. Engrg. ASCE*, 113(7), 1433-1443.
9. Yang, Y.B. and Kuo, S.R.,(1986). "Static stability of curved thin-walled beams." *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 112(8), 821-841.
10. Yang, Y.B. and Kuo, S.R.,(1987). "Effect of curvature on stability of curved beams." *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 113(6), 1185-1202.
11. Yang, Y.B. and Kuo, S.R., and Cherng, Y. D.(1989). "Curved beam element for nonlinear analysis." *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 115(4), 840-855.
12. Kau, S.R., and Yang, Y.B.(1991). "New theory on buckling of curved beams." *J. Engrg. Mech.* ASCE, 117(8), 1698-1717.
13. Kang, Y.J., and Yoo, C.H.(1994). "Thin-walled curved beams. I : Formulation of nonlinear equations." *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 120(10) 2072-2101.
14. Kang, Y.J., and Yoo, C.H.(1994). "Thin-walled curved beams. II : Analytical solution for buckling of arches." *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 120(10) 2102-2125.
15. Chang,S.P., and Kim,M.Y., and Kim,S.B. (1996). "Stability of Shear Deformable Thin-Walled Space Frames and Circular Arches." *ASCE Journal of Eng. Mechanics*, 122,pp844 854.
16. Kim,M.Y., and Chang,S.P., and Kim,S.B. (1996). "Spatial Stability Analysis of Thin-walled Space Frames." *Int.J.Numer.Meth-ods Engineering*, 39, pp.499~525.
17. Attard, M.M.(1986). "Nonlinear theory of nonuniform torsion of thin-walled open beams." *Thin-Walled Struct.*, 4(2),101-134.
18. Attard, M.M.(1987). "Discussion of 'Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis.'by Y.B. Yang and W. McGuire." *J. Struc. Engrg.*, ASCE, 113(7), 1632-1634.
19. Elias, Z.M.(1986). *Theory and methods of structural analysis*. John Wiley and Sons, New York, N.Y.

20. Goto, F., Kuranish, S., and Sugahara, K. (1992). "On the experiment of out-of-plane buckling of arches." *Proc. 47th Annual Conf.*, Japanese Society of Civil Engineers, Sept., 200-201.
21. IMSL Library, Problem-solving software

- system for mathematical and statistical FORTRAN programming, IMSL, Inc., 1984
22. 민병철, 김문영 (1998), "비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성해석 II : 수치적 방법" 한국전산구조공학회 논문집 (접수일자 : 1998. 9. 19)

부록 I 원형아치의 면내 및 면외좌굴에 대한 다른 연구자들의 엄밀해

● 균일압축을 받는 원형아치의 면내 좌굴하중 $F_{1cr}(=R \cdot q_{cr})$

Study	Coefficient
Timoshenko (1961) Vlasov (1961) Yang and Kuo (1986)	$q_{cr} = -EI_3 \gamma$
Yoo and Kang (1992)	$q_{cr} R = \frac{EI_3}{R^2} (R\lambda - \frac{1}{R\lambda})^2$
Papangelis and Trahair (1987)	$q_{cr} R = -EI_3 \lambda^2$
Rajasekaran and Padmanbhan (1989)	$q_{cr} R = -EI_3 \lambda^2 \frac{R^2 \lambda^4 + 2R^2 \lambda^2 + 1}{R^2 \lambda^4 - R^2 \lambda^2 + 1}$

● 순수휨 및 균일압축을 받는 원형아치의 면외 좌굴하중 M_{2cr}, F_{1cr}

$$A_1 M_{2cr}^2 + A_2 M_{2cr} + A_3 = 0, \quad B_1 F_{1cr}^2 + B_2 F_{1cr} + B_3 = 0$$

Study	Coefficient
Timoshenko (1961)	$A_1 = 1, A_2 = -(EI_3 + GJ)/R, A_3 = -EI_3 GJ \gamma$ $B_1 = 0, B_2 = \lambda^2 GJ + EI_3/R^2, B_3 = -EI_3 GJ \lambda^2 \gamma$
Vlasov (1961)	$A_1 = 1, A_2 = -EI_3 \sqrt{R} - (\lambda^2 EI_3 + GJ)/R + \beta \lambda^2 EI_3, A_3 = -EI_3 (\lambda^2 EI_3 + GJ) \gamma$ $B_1 = 1, B_2 = -\lambda^2 EI_3 - (\lambda^2 EI_3 + GJ)/R^2, B_3 = EI_3 (\lambda^2 EI_3 + GJ) \gamma / R^2$
Papangelis and Trahair (1987)	$A_1 = -1, A_2 = [\lambda^2 EI_3 + (\lambda^2 EI_3 + GJ)/R^2][\beta_3 + 1/(R\lambda^2)] - 2(EI_3 + \lambda^2 EI_3 + GJ)/R,$ $A_3 = \frac{EI_3}{R} \left(\frac{1}{R\lambda} - R\lambda \right)^2 [\lambda^2 EI_3 + GJ]$ $B_1 = 0, B_2 = \lambda^2 (\lambda^2 EI_3 + GJ) + EI_3/R^2, B_3 = -EI_3 (\lambda^2 EI_3 + GJ) \gamma^2$
Yang and Kuo (1986)	$A_1 = -1 + r_o^2/R^2, A_2 = [EI_3 + GJ - \gamma EI_3^* + r_o^2(EI_3^*/R^2 + EI_3)\gamma]/R,$ $A_3 = \gamma [EI_3 (\lambda^2 EI_3^* + GJ) + GJ EI_3^*/R^2]$ $B_1 = r_o^2 \lambda^2, B_2 = EI_3^* \gamma^2 + EI_3/R^2 + GJ \lambda^2 + (r_o \lambda \gamma)^2 (EI_3^*/R^2 + EI_3),$ $B_3 = \gamma^2 [EI_3 (\lambda^2 EI_3^* + GJ) + EI_3 GJ/R^2]$
Rajasekaran and Padmanbhan (1989)	$A_1 = \frac{1}{(R\lambda)^2} - 1, A_2 = \left[\frac{1}{(R\lambda)^2} - 1 \right] (EI_3 + \lambda^2 EI_3^* + GJ)/R$ $A_3 = EI_3 \left(\frac{1}{R\lambda} - R\lambda \right)^2 (\lambda^2 EI_3^* + GJ)/R^2$ $B_1 = 1, B_2 = \lambda^2 EI_3 \left(1 + \frac{1}{R^2 \lambda^2 r_o^2} \right) + \frac{1}{o r_o^2} (GJ + \lambda^2 EI_3^*) \left[1 + \left(\frac{r_o}{R} \right)^2 \right],$ $B_3 = \left(\frac{\lambda}{r_o} \right)^2 EI_3 (GJ + \lambda^2 EI_3^*) \left[1 - \frac{1}{(R\lambda)^2} \right]^2$
여기서 $\lambda = \frac{n\pi}{L}, \gamma = \lambda^2 - \frac{1}{R^2}, r_o^2 = (I_2 + I_3/A), \beta_3 = -\frac{I_{222} + I_{233}}{I_2} + 2e_3$	