

호장증분법에 의한 판구조물의 2차좌굴거동에 관한 연구

A Study on the Secondary Buckling of Plate Structure by Arc Length Method

고재용*
Ko, Jae-Yong

최익창**
Choi, Ik-Chang

요지

고장력강이 구조강재로서 널리 사용되고 있다. 구조물이 극심한 하중을 받게되면 최종강도에 도달할 때까지 좌굴을 동반하게 된다. 그러므로, 고장력강판의 좌굴에 대한 정확한 평가가 중요한 설계기준이 되고 있다. 그러나, 고장력강을 효율적으로 사용하기 위해서는 좌굴허용설계를 도입할 수 있도록 판구조물의 판두께가 얇아져야한다. 따라서, 박판구조물의 합리적인 설계를 하기 위해서는 좌굴후거동해석이 매우 중요하다. 그러므로, 본 논문에서는 호장증분법을 이용하여 압축하중을 받는 박판구조물의 초기좌굴후거동과 2차좌굴강도에 대하여 규명하였다. 특히, 호장증분법은 좌굴점에서의 하중경로를 추정하기 위하여 적용하였다.

핵심용어 : 고장력강, 후좌굴, 최종강도, 호장증분법, 2차좌굴

Abstract

High Tensile steel has been widely used in structures. The structures under the action of excessive loading exhibit local failure associated with buckling until they reach the ultimate limit state as a whole. Therefore, precise assessment of buckling on High Tensile steel plates is very important design criteria. However, to use the High Tensile steel effectively, the plate thickness may become thin so that the occurrence of buckling is inevitable and design allowing plate buckling may be necessary. In order to carry out a more rational design of structures, it is very important to make an assessment of post-buckling based on the ultimate strength of the structures. In this study, a study which clarifies the secondary buckling behaviour of rectangular plates subjected to axial compression in the longitudinal direction is carried out by using Arc Length Method. In particular, the proposed method is then applied to solve the path of a near buckling point.

Keywords : High Tensile steel, post-buckling, ultimate strength, Arc Length Method, secondary buckling

1. 서 언

최근 선박의 초고속선화는 선체의 박판화를 가

져왔으며 이를 위하여 고장력강판의 화학적이고 물리적인 현상규명이 있어야 한다고 생각한다. 이때 고장력강판의 화학적인 현상규명으로 항복

* 정회원·북포해양대학교 해양 및 조선공학부, 조교수
** 정회원·북포해양대학교 해양 및 조선공학부, 전임강사

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

응력을 크게 높일 수 있었다. 이것은 초기좌굴이 후에 곧 바로 최종강도에 도달하지 않는다는 것을 의미한다. 이처럼 구조물의 초기좌굴후에 나타나는 거동에 관한 것은 모두 물리적인 현상을 규명하는 것이었고 지금까지 이에 관한 연구는 주로 초기좌굴과 최종강도에 대한 결과였다. 그리고 결과중에서 해석과정에서 나타나는 Snap-through 결과들이 기존의 연구로서는 설명할 수 없는 결과들이 나타남으로서 많은 궁금증이 아직도 남아 있다.

이러한 궁금증은 2차좌굴이라고 하는 물리적인 현상이 규명됨으로서 수 많은 궁금증들이 해소 되었다^{1)~6)}. 여기서 2차좌굴은 압축력을 받는 고장력강판이 초기좌굴이후에 계속적으로 압축력에 대하여 면내강성을 갖고 있으면서 최종강도에 도달하기도 전에 또 다른 좌굴이 발생함으로서 면내강성이 급작스럽게 저하하여 최종강도에 도달하는 것을 의미한다. 그러나 여기서 2차좌굴은 복잡한 비선형거동을 나타내고 있으므로 기존의 하중이나 변위를 변화시켜 구조물의 거동을 구하려고 한다면 도저히 구할 수 없을 것이다. 그러므로 2차좌굴과 같은 복잡한 구조물의 비선형거동을 구할 수 있는 방법은 호장중분법(Arc Length Method) 이외는 없다고 생각된다.

지금까지 호장중분법에 관한 연구는 다수 있다^{7)~10)}. 먼저 E. Riks는 Newton방법을 통하여 호장중분법을 개발하였고, 細野²⁾는 특이 발생하는 좌굴점에서의 문제를 호장중분법을 통하여 해결하였다.

이상과 같은 관점에서 본 논문에서는 2차좌굴과 같은 복잡한 비선형거동을 해석하기 위하여 細野²⁾와 같은 호장중분법을 이용하여 면내압축하중을 받는 고장력강판의 2차좌굴거동을 해석하고자 한다.

2. 해석이론

2.1 응력과 변형률

선체의 판부재는 Sagging일 경우에 갑판, 그리고 Hogging일 경우에 선저판이 Fig. 1에 나타내는 바와 같이 x방향에 대하여 면내압축하중을 받는다. 이와 같이 선체의 판부재를 대상으로 해석한다. 4변이 직선을 유지하면서 면외변형에 대해서는 단순지지되어 있다고 가정한다. 이 경계

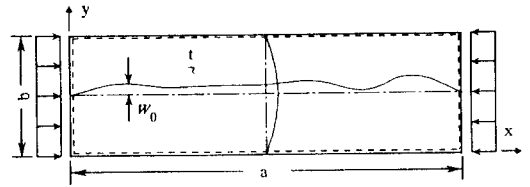


Fig. 1 Rectangular plate under thrust

조건을 만족하는 처짐과형을 다음 식의 2중 Fourier급수로 근사한다.

$$w_0 = \sum_m \sum_n A_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1)$$

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

여기서, A_{0mn} , A_{mn} 은 각 모드의 초기처짐 및 전체처짐의 계수를 나타낸다.

평판의 Airy의 응력함수를 F 로 한다면 대처짐이 생기는 판의 적합조건은 다음과 같이 주어 진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

여기서, E 는 탄성계수를 나타낸다.

윗 식에 식(1) 및 식(2)를 대입하여 하중조건을 고려하면 다음 식과 같이 응력함수 F 가 구하여진다.

$$\begin{aligned} F = \frac{Ea^2}{4} \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l (A_{mn} A_{kl} - A_{0mn} A_{0kl}) \\ \left[\frac{ml(nl - ml)}{\{(m+k)^2 + a^2(n+l)^2\}^2} \cos \frac{(m+k)\pi x}{a} \cos \frac{(n+l)\pi y}{b} \right. \\ + \frac{ml(nk + ml)}{\{(m+k)^2 + a^2(n-l)^2\}^2} \cos \frac{(m+k)\pi x}{a} \cos \frac{(n-l)\pi y}{b} \\ + \frac{ml(nk + ml)}{\{(m-k)^2 + a^2(n+l)^2\}^2} \cos \frac{(m-k)\pi x}{a} \cos \frac{(n+l)\pi y}{b} \\ \left. + \frac{ml(nk - ml)}{\{(m-k)^2 + a^2(n-l)^2\}^2} \cos \frac{(m-k)\pi x}{a} \cos \frac{(n-l)\pi y}{b} \right] \\ - \frac{y^2}{2} \sigma \quad (4) \end{aligned}$$

여기서, σ 는 평균압축응력을 나타낸다. 또, $a=a/b$ 는 판의 종횡비를 나타낸다.

응력함수 F 를 이용하면, 판 내부의 면내응력과 면내변형률 그리고 굽힘변형률과 굽힘응력을 구할 수 있다.

한편, x 방향의 평균면내압축변위 u 는 다음 식으로 주어진다.

$$u = \frac{1}{b} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial u}{\partial x} dy dx$$

$$= -\frac{a}{E} \sigma - \frac{\pi^2}{8a} \sum_m \sum_n (A_{mn}^2 - A_{0mn}^2) m^2 \quad (5)$$

2.2 평형방정식

최소포텐셜에너지 원리를 적용하여 평형방정식을 도출한다.

판내부의 변형률에너지와 외력의 포텐셜에너지를 이용하여 판 전체의 포텐셜에너지 Π 는 다음 식으로 나타낸다¹¹⁾.

$$\Pi = U_p + U_b - V \quad (6)$$

여기서,

U_p : 면내응력과 면내변형률에 의한 변형률에너지

U_b : 굽힘응력과 굽힘변형률에 의한 변형률에너지

V : 외력의 포텐셜에너지

이것을 구체적으로 나타내면,

$$U_p = \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy}) dz dy dx$$

$$= \frac{t}{2E} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\ \left. - 2(1+\nu) \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy$$

$$U_b = \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_{xz}\epsilon_{xz} + \sigma_{yz}\epsilon_{yz} + \tau_{xy}\gamma_{xy}) dz dy dx$$

$$= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (w-w_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w-w_0) \right)^2 \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w-w_0) \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w-w_0) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w-w_0) \right\} \right] dx dy$$

$$V = \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial x} (w-w_0) \right)^2 + \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial y} (w-w_0) \right)^2 \right. \\ \left. - 2\tau_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial x} (w-w_0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} (w-w_0) \right) \right] dx dy$$

$$= \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (w-w_0) \right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (w-w_0) \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} (w-w_0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} (w-w_0) \right) \right] dx dy \quad (7)$$

식 (4)의 응력함수 F 및 식 (2)의 초기처짐 w_0 와 식 (1)의 전체처짐 w 를 식 (7)에 대입하여 전체의 포텐셜에너지 Π 를 처짐성분으로 나타내면 다음 식으로 된다.

$$\Pi = \frac{t}{2} \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s (A_{mn} A_{kl} - A_{0mn} A_{0kl}) \\ (A_{pq} A_{rs} - A_{0pq} A_{0rs}) H(m, n, k, l, p, q, r, s) \\ + \frac{D\pi^4 ab}{8} \sum_m \sum_n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (A_{mn} - A_{0mn})^2 \\ - \frac{\pi^2 tb}{8a} \sum_m \sum_n (A_{mn}^2 - A_{0mn}^2) m^2 \sigma - \frac{abt \sigma^2}{E} \quad (8)$$

여기서, 계수 $H(m, n, k, l, p, q, r, s)$ 는 판의 치수, 탄성계수 및 반파수를 나타내는 정수 파라메타 $m \sim s$ 의 함수이다¹¹⁾.

면내압축응력 σ 와 전체처짐성분 A_{mn} 의 관계를 나타내는 평형방정식은 전체포텐셜에너지 Π 가 극치를 가지는 조건 $\delta \Pi = 0$ 으로 부터 구할 수

있다.

Rayleigh-Ritz법에 의하여 초기처짐 W_0 와 전체처짐 W 을 식(1)과 식(2)와 같이 근사시켜 전개하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} \delta A_{mn} = 0 (m, n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

윗 식으로부터 구해진 평형방정식은 전체처짐 성분 A_{mn} 에 관한 $m+n$ 원 3차 연립방정식으로 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & t \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s [(A_{mn}A_{kl} - A_{lmn}A_{okl}) \\ & \quad (A_{pq}\delta A_{rs} + A_{rs}\delta A_{pq})] H(m, n, k, l, p, q, r, s) \\ & + \frac{\pi^4 Dab}{4} \sum_m \sum_n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 (A_{mn} - A_{lmn}) \delta A_{mn} \\ & - \frac{\pi^2 bt}{4a} \sum_m \sum_n m^2 \sigma A_{mn} \delta A_{mn} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

평형상태의 안정·불안정은 전체포텐셜에너지 Π 의 제2변분의 정부호로 정해진다. 즉, $\delta^2 \Pi > 0$ 라면 평형방정식은 안정, $\delta^2 \Pi = 0$ 라면 중립평형상태, $\delta^2 \Pi < 0$ 라면 불안정평형상태이다. 즉, 전체포텐셜에너지 Π 가 극소치를 갖게되면 안정평형상태를 나타내고 극대치를 갖게되면 평형상태가 불안정임을 나타낸다. 또, 중립평형상태는 분기좌굴점 또는 하중과 처짐의 극대·극소점을 의미한다. 실제 구조물에서는 외하중을 받고 있을 때 안정적인 평형경로를 따라 거동을 하지만 불안정한 평형경로가 나타나면 그 경로를 뛰어 넘는 Snap through 현상이 발생한다.

한편, 이것을 처짐계수의 증분 ΔA_{mn} 과 평균압축응력 증분 $\Delta \sigma$ 의 관계로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & t \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s [(A_{mn}A_{kl} - A_{lmn}A_{okl} + A_{lmn}\Delta A_{kl} \\ & \quad + A_{kl}\Delta A_{mn} + \Delta A_{kl}\Delta A_{mn}) \\ & \quad \{(A_{pq} + \Delta A_{pq})\delta \Delta A_{rs} + (A_{rs} + \Delta A_{rs})\delta \Delta A_{pq}\}] \\ & \quad H(m, n, k, l, p, q, r, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\pi^4 Dab}{4} \sum_m \sum_n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 (A_{mn} - A_{lmn} + \Delta A_{mn}) \delta \Delta A_{mn} \\ & - \frac{\pi^2 bt}{4a} \sum_m \sum_n m^2 (\sigma A_{mn} + \Delta \sigma A_{mn} + \sigma \Delta A_{mn}) \delta \Delta A_{mn} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

윗 식은 처짐계수의 증분에 관한 1차의 연립방정식으로 되어 다음 식과 같은 매트릭스로 표시할 수 있다.

$$[A]\{\Delta A\} = \Delta \sigma \{R\} + \{Q\} \quad (12)$$

여기서, $\{\Delta A\} = [\Delta A_{11} \ \Delta A_{12} \ \Delta A_{13} \ \dots \ \Delta A_{mn}]^T \cdot \Delta \sigma \{R\}$ 은 외력증분을 나타내고, $\{R\}$ 은 처짐계수 A_{mn} 및 A_{lmn} 의 함수이다. 한편, $\{Q\}$ 는 증분간을 선형 근사한 것에 의해 나타내는 불평형력을 수정하기 위한 항이다. 완전한 평형상태라면 $\{Q\} = \{0\}$ 로 된다. 식(12)는 처짐성분의 증분 ΔA_{mn} 에 관한 $m+n$ 원 1차연립방정식으로 된다.

2.3 유한요소법

유한요소법에 의한 탄성대변형해석을 행하기 위하여 참고문헌[12]에서 제안된 차수저감적분형의 평면셀요소를 이용하여 해석을 실시한다. 鄒井 등의 요소를 이용한 본 연구의 해석은 이하의 특징을 가지고 있다. 즉, 재료비선형에 관해서는 Von Mises의 항복조건이 소성포텐셜이라고 하는 소성흐름이론을 적용한다. 재료의 이동경화 및 등방경화의 양자를 고려한 복합경화의 거동이 취급되도록 프로그램되어 있지만, 본 연구의 해석에서는 재료는 완전탄소성체이라고 가정한다. 또, 기하학적비선형성에 관해서는 Updated Lagrangian Approach에 의한 증분법을 적용한다. 즉, 변위증분으로부터 updated Green변형률의 증분으로 나타내고 이 updated Green변형률증분 $\{\Delta \epsilon^*\}$ 과 updated Kirchoff 응력증분 $\{\Delta \sigma^*\}$ 의 관계는 응력~변형률매트릭스 $[D]$ 를 이용하여 나타내면, $\{\Delta \sigma^*\} = [D] \{\Delta \epsilon^*\}$ 로 나타낼 수 있다. 각 단계에 있어서 Updated Kirchoff 응력증분을 Euler응력의 Jaumann 미분형으로 변환한다. 이

응력변환에 있어서는 판두께방향의 직응력이 0으로 되는 조건에 의해 판두께방향의 직변형률을 결정한다. 면내회전변형에 저항하는 가상강성 및 Hourglass mode의 발생에 대처하는 가상강성을 도입한다.

2.4 평형방정식의 해법

면내압축하중을 받는 판이 나타내는 2차좌굴 거동은 극한점과 분기점근방을 포함하는 복잡한 하중과 처짐경로를 거친다. 그러므로 하중과 변위를 단순히 증가시키는 통상의 하중형해석과 변위형해석에서는 평형경로를 구할 수 없는 경우가 생긴다. 따라서, 본 연구에서는 통상의 하중제어형 및 변위제어형의 증분해석법에 외 호장증분법과 Newton-Raphson법을 병용한 증분형해법을 적용하였다.

2.5 하중형증분법 및 변위형증분법

2.5.1 하중형증분법

판의 증분형 평형조건식은 다음 식으로 주어진다.

$$[K]\{\Delta A\} - \Delta\sigma\{R\} = \{Q\} \quad (13)$$

증분형증분법에서는 $\Delta\sigma$ 를 변화시키면서 $\{\Delta A\}$ 를 구할 수 있다.

2.5.2 변위형증분법

식(13)은 다음 식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \end{Bmatrix} - \Delta\sigma \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

변위형증분법에서는 1개의 처짐성분 ΔA_1 를 증분적으로 변화시키면 다른 처짐성분 $\{\Delta A_2\}$ 와 응력 $\Delta\sigma$ 를 구할 수 있다. 그러므로 위 식을 다음 식과 같이 변형한다.

$$[\bar{K}] \begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta A_2 \end{Bmatrix} + \Delta A_1 \begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서,

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} -R_1 & K_{12} \\ -R_2 & K_{22} \end{bmatrix}$$

하중형 또는 변위형의 증분법의 경우, 다음 경우에 증분형평형조건식의 해가 특이(Singular)로 된다.

(Case A) $Det[K]=0, Det[\bar{K}] \neq 0$ 의 경우

이 경우는 하중형증분법의 극한점 및 변곡점을 나타낸다.

(Case B) $Det[K] \neq 0, Det[\bar{K}] = 0$ 의 경우

이 경우는 변위형증분법의 극한점 및 변곡점을 나타낸다.

(Case C) $Det[K]=0, Det[\bar{K}]=0$ 의 경우

이 경우는 변위형증분법 및 하중형증분법에서 분기점(Bifurcation Point)을 나타낸다.

2.6 호장증분법

전술의 (Case A)에서는 하중형증분법이 (Case B)에서는 변위형증분법이 극한점을 나타내어 이 근방에서 평형경로를 구하는 것이 어렵다. 그러므로 본 연구의 해석에서는 호장증분법을 사용하였다.

호장증분법(Arc Length Method)에서는 증분 파라메타로서 하중-처짐곡선의 호장을 증분시킨다. 그러므로 Fig. 2에 나타난 바와 같이 각 증분 단계의 반복·수렴의 제1단계에서는 전 단계의 결과와 같은 방향으로 하중증분 및 처짐증분을 가정한다. 이후의 반복·수렴과정에서는 수렴계산의 전단계의 호장방향과 직각방향으로 해를 탐색한다. 이 같은 수렴계산을 불평형력 $\{Q\}$ 가 충분히 적을 때까지 반복한다. 본 계산에 의하면 극한점에서도 연속적인 경로에 있는 한 수렴조작이 가능하다. 구체적인 계산법을 다음과 같이 나타낸다.

증분단계 수를 아래첨자 i 로 또 각 증분 단계에 의한 수렴계산 단계 수를 윗첨자 m ($=0, \dots, l$)으로 나타낸다. 여기서, 단계 $i-1$ 에서의 수렴해가 이미 존재하고 다음 단계 i 를 해석하는 경우를 생각한다. 증분해의 계산법은 다음 두 단계로 나눈다.

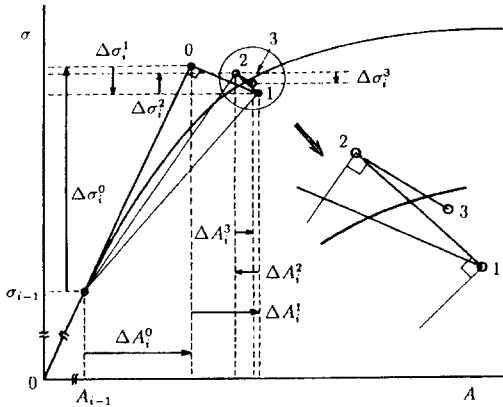


Fig. 2 Arc-length increment method

2. 6. 1 호장증분과정

단계 $i-1$ 에 있어서 식 (12)는

$$[K(A_{i-1})]\{\Delta A_i^0\} - \Delta\sigma_i^0\{Q(A_{i-1})\} = \{Q_{i-1}\} \quad (16)$$

또, 호장방정식은 다음 식으로 주어진다.

$$\|\Delta A\|^2 + (\Delta\sigma_i^0)^2 = r_i^2 \quad (17)$$

여기서, r_i 는 단계 i 의 호장증분을 나타낸다. 또, 단계 i 의 제1호장증분 $\{\Delta A_i^0, \Delta\sigma_i^0\}$ 이 전 단계의 증분단계와 같은 방향으로 생기므로 식 (17)를 선형화하면

$$\{\phi_{i-1}\}^T \{\Delta A_i^0\} + \mu_{i-1} \Delta\sigma_i^0 = r_i^2 \quad (18)$$

여기서,

$$\{\phi_{i-1}\} = \frac{r_i}{r_{i-1}} \sum_{m=0}^{i-1} \Delta A_i^m, \quad \mu_{i-1} = \frac{r_i}{r_{i-1}} \sum_{m=0}^{i-1} \Delta\sigma_i^m$$

식 (16)과 식 (18)를 연립시켜 다음 식을 구하면 $\{\Delta A_i^0\}$ 와 $\Delta\sigma_i^0$ 을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K(A_{i-1}) & -R(A_{i-1}) \\ \phi_{i-1}^T & \mu_{i-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A_i^0 \\ \Delta\sigma_i^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{i-1} \\ r_i^2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

2. 6. 2 반복·수렴과정

반복·수렴과정의 제 n 단계의 강성방정식은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & [K(A_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} \Delta A_i^m)] \{\Delta A_i^n\} \\ & - \Delta\sigma_i^n \{R(A_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} \Delta A_i^m)\} = \{Q_i^{n-1}\} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, $\{Q_i^{n-1}\}$ 는 식 (12)에서 구해진 불평형력이다. 호장 r_i 를 일정하게 하는 조건은 다음 식으로 주어진다.

$$\left\| \sum_{m=0}^{n-1} \Delta A_i^m + \Delta A_i^n \right\|^2 + \left(\sum_{m=0}^{n-1} \Delta\sigma_i^m + \Delta\sigma_i^n \right)^2 = r_i^2 \quad (21)$$

윗 식을 선형화하면

$$\left(\sum_{m=0}^{n-1} \Delta A_i^m \right)^T \{\Delta A_i^n\} + \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\sigma_i^m \Delta\sigma_i^n = 0 \quad (22)$$

식 (20)과 식 (22)를 연립시켜 다음 식을 구하면 증분량 $\{\Delta A_i^n\}$ 와 $\Delta\sigma_i^n$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K(A_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} \Delta A_i^m) & -R(A_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} \Delta A_i^m) \\ \sum_{m=0}^{n-1} \Delta A_i^m{}^T & \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\sigma_i^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A_i^n \\ \Delta\sigma_i^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i^{n-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

이상의 계산을 불평형력 $\{Q_i\}$ 이 충분히 작을 때까지 반복한다.

3. 수치해석 및 고찰

3. 1 선체판부재의 수치해석 모델링

좌굴모드가 하중방향 1반파의 경우와 2반파 이상의 경우에 있어서 초기치짐이 없는 경우에는 2차좌굴이 극대점 또는 분기점으로 나타난다. 여기서는 각각의 2차좌굴현상을 대표하는 치수로서 종횡비 a/b 가 3.6의 판에 대하여 해석을 하였

다. 판두께, 판폭 및 재료정수는 다음과 같이 설정하였다.

판길이 : $a=3,600\text{mm}$
 판폭 : $b=1,000\text{mm}$
 판두께 : $t=10\text{mm}$
 탄성계수 : $E=21,000\text{kgf/mm}^2$

실제의 구조물은 용접에 의해 조립되어 구조물의 판부재가 이상적으로 완전한 평판이 아니다. 용접에 의해 조립된 구조물의 패널에 생기고 있는 초기처짐과형은 일반적으로 복잡한 과형이다. 그러므로, 처짐과형을 중앙부가 평평하게, 단부가 \sin 의 1/4파로 되는 전후대칭과형으로 이상화하였다.

3.2 해석결과 및 고찰

3.2.1 해석적인 방법에 의한 수치해석

종횡비가 3.6인 판에 대하여 해석하기 위하여 전체처짐의 처짐성분에 대해서는 모든 처짐성분을 고려하여야 하나 컴퓨터의 용량과 계산시간의 제약으로 충분한 정도를 주는 처짐성분으로서 다음과 같이 가정하였다. 그리고, 최대초기처짐량을 판 두께의 10%로하여 계산하였다.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (24)$$

그 해석결과를 Fig. 3에 나타내었다. 여기서, Fig. 3는 평균압축응력 σ 와 평균압축변형률 ϵ 의 관계를 나타낸다. 여기서, 항복응력 σ_y 을 30.0으로하여 무차원화하였다. 2차좌굴 발생후, 하중이 극대치를 나타낸 후에 극소치를 나타낼 때까지 불안정 평형경로에서는 평균응력도 평균변형률도 감소하고 있음을 알 수 있다. 실제의 구조물에서의 부하상태에서는 평균응력도 평균변형률도 함께 감소하는 부하상태는 생기지 않는다. 즉, 평균응력 또는 평균변형률의 어느 것이나 증가를 계속하는 부하상태로 된다. 이 경우에는 불안정 평형경로는 생기지 않고 극대점으로부

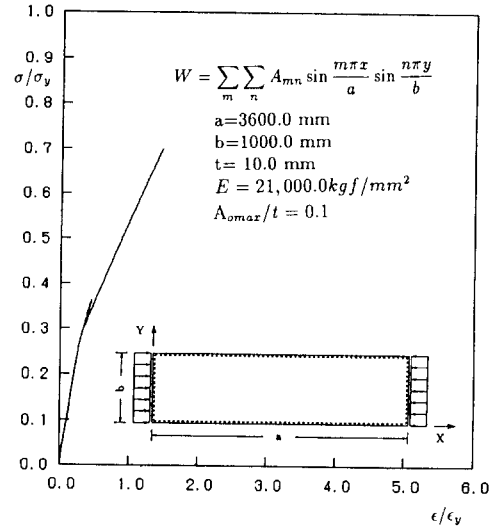


Fig. 3 Average stress-average strain relationship of a rectangular plate with initial deflection under thrust ($W_{0max}/t=0.1$)

터 별도의 안정평형경로로 동적인 Snap-through 현상이 발생할 것으로 예상된다. 이것에 관해서는 다음에 고찰한다. Fig. 3으로부터 초기좌굴발생후에 저하한 면내강성이 2차좌굴이 생겨 처짐모드가 변화한 후 더욱 변화하고 있음을 알 수 있다.

여기서 주목해야할 것은 종횡비 3.6의 경우에는 더욱 더 하중을 증가시키면 2차좌굴로 3반과로부터 5반과로 된 후, 또 다시 7반과로 변화하는 Snap-through가 발생한다. 즉, 3차좌굴이 발생한다. 또한 하중을 더욱 더 증가하면 7반과로부터 9반과로의 Snap-through현상이 또다시 발생한다.

Fig. 4에서는 초기처짐과형을 같다고하여 최대초기처짐량을 판 두께의 100%로 했을 때의 평균압축응력 σ 와 몇 개의 처짐계수와의 관계를 나타내었다. 처음은 많은 처짐성분이 상호영향을 미치면서 성장한다. 또한, 1반과 성분은 좌굴모드와 5반과 성분을 포함하는 다른 성분의 성장을 방해함을 알 수 있다. 이 경향은 초기처짐이 커지면 커질수록 현저하게 나타나 1반과로부터 다른모드로의 변화하는 하중을 상승시킨다. 또한,

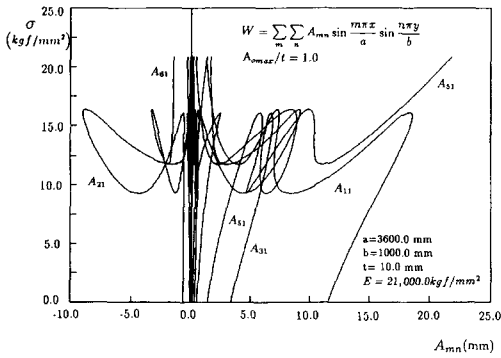


Fig. 4 Load-deflection coefficient curves of a rectangular plate with initial deflection under thrust ($W_{0max}/t=1.0$)

최대초기처짐량이 100%인 경우에는 아주 복잡한 거동을 보이는 것으로 보이나 실제적으로는 처짐파형이 1모드로부터 3모드로 변환한 후, 또 다시 5모드로 변화하게 됨을 쉽게 알 수 있다. 이와 같이 모드가 변화하는 것을 더욱 더 쉽게 알아보기 위하여 Fig. 5에 평균압축응력 σ 와 평균압축변형률 ϵ 의 관계를 나타내고 있다. 여기서 알 수 있는 바와 같이 모드가 변화할 때마다 면내강성이 저하해 감을 알 수 있다. 즉, 2차좌굴

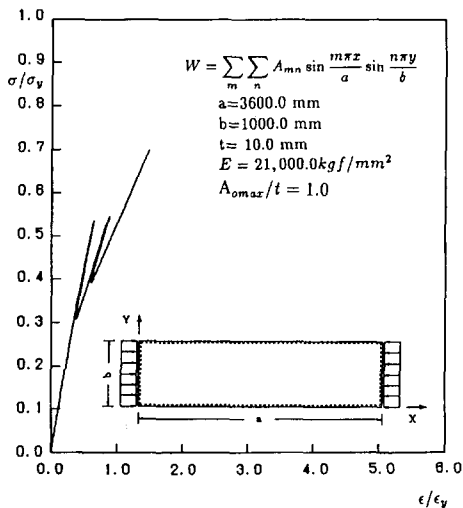


Fig. 5 Average stress-average strain relationship of a rectangular plate with initial deflection under thrust ($W_{0max}/t=1.0$)

이 발생하면 면내강성이 저하하게 되어 선체구조물의 전체강성이 저하하여 황천 항새시 선박이 붕괴되는 하나의 원인이 됨을 시사하고 있다.

3. 2. 2 탄소성대변형유한요소해석

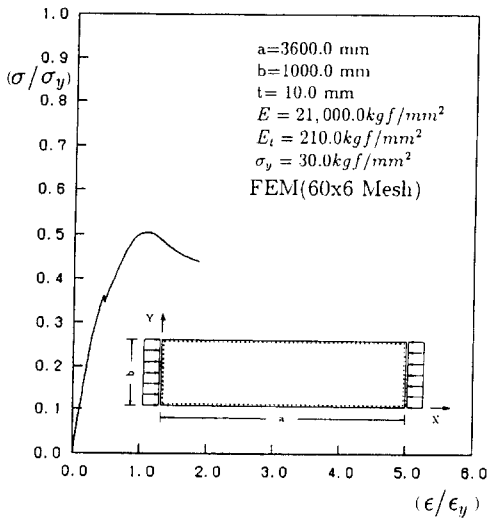
다음은 2차좌굴이 최종강도에 미치는 영향에 대하여 고찰한다. 이를 위하여 종횡비가 3.6인 판을 대상으로하여 탄소성대변형해석을 수행하였다. 여기서 초기처짐형상은 우수파성분이 조금 존재하는 것으로 하중방향으로 비대칭의 초기처짐형상을 갖는다. 본 해석에서는 최대초기처짐량을 판두께의 10%로 하여 해석하였다. 또한, 식 (2)의 처짐 w 의 항수의 m 및 n 은 해석적인 방법에서와 같은 각각 $m=1, 2, \dots, 21$ 및 $n=1, 3$ 으로 하였다. 유한요소의 모델링은 변형거동상의 대칭성을 고려하여 1/2만을 대상으로 하였으며 요소수는 60×6 채용하였다. 판의 치수와 재료정수는 다음과 같다.

- $a=3600.0\text{mm}$
- $b=1000.0\text{mm}$
- $t=10.0\text{mm}$
- $E=21000.0\text{kgf/mm}^2$
- $E_t=210.0\text{kgf/mm}^2$
- $\sigma_s=30.0\text{kgf/mm}^2$

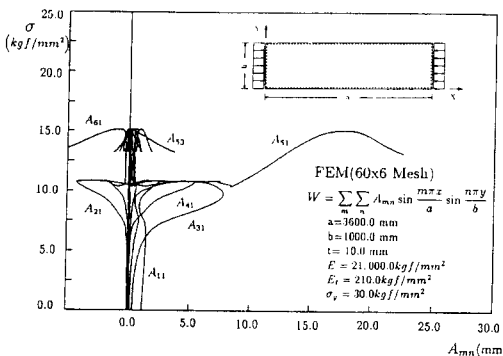
그 해석결과를 Fig. 6(a)에 평균압축응력과 처짐성분간의 관계로 나타낸다. 이 그림에서 알 수 있는 바와 같이 이 경우의 판은 두께가 얇기 때문에 외하중의 증가와 함께 탄성상태에서 대처짐이 발생하며, 이후에도 외하중의 증가에 대해 더욱 견디다가 소성화의 진전과 함께 면내강성이 급격히 저하하여 최종강도에 도달하였다. 또한, 탄성2차좌굴강도가 최종강도보다 낮기 때문에 초기좌굴후 최종강도에 도달하기 전에 특히 초기항복이 생기기 전에 Snap-through의 2차좌굴이 생겨 최종강도에 도달하였다. 즉, 초기좌굴하중후 초기 처짐 때문에 안정으로 되는 처짐모드는 3반파이나, 그 후 Snap-through의 2차좌굴이 발생하여 3모드보다 2차고차의 5모드로 되어 최종

강도에 도달하였다.

앞에서 설명한 바와 같이 Fig. 3은 해석적인 방법으로 구한 결과를 나타낸다. 즉, 유한요소해석으로 구한 Fig. 6의 결과와 해석적인 방법으로 구한 Fig. 3의 결과는 호장증분법에 의해 구한 것으로서 불안정한 평형경로도 구할 수 있어서 좋은 대조를 이루고 있음을 알 수 있다.



(a) Average stress-deflection coefficient relationship



(b) Average stress-average strain relationship

Fig. 6 Elasto-plastic large deflection behavior of simply supported rectangular plate with initial deflection under thrust ($a/b=3.6$)

Snap-through가 생기면 외력이 행한 일의 일부가 판의 운동에너지로 변하여 판에는 동적거동이 생긴다. 그래서 Snap-through가 발생한 후에는 새로운 평형경로 주위에서 진동이 생기고 이속고 감쇠한다. 그러나, 본 해석에서는 정적해석으로서 2차좌굴하중의 근방에서는 처짐성분과 평균 압축 변형률이 변동하고 있음을 알 수 있다. 이것은 원래 운동에 따라서 관성력이 생겨 동적평형조건이 만족해야 하지만 정적해석에서는 관성력이 고려되지 않기 때문이라고 생각되어 진다. 이로부터 2차좌굴거동을 정확히 추적하기 위해서는 일반적으로 동적해석을 행할 필요가 있음을 알 수 있다. 그러나, Snap-through 후의 안정적인 평형경로는 조금 차가 있을 수 있다고 생각할 수 있지만 기본적으로는 정적인 해석에 의해서 충분한 정도로 추적할 수 있다. 그 이유로서는 다음의 것이 생각되어 진다. 즉, 정적인 해석에서는 관성력은 고려되지 않지만 증분간을 선행 근사하기 위한 오차를 수정하는 하중수정항이 고려되기 때문이다. 따라서, 원래는 관성력항으로 평형조건이 만족되어야 하지만 대신에 하중수정항으로 인하여 평형조건이 잘 만족하기 때문이라고 생각되어 진다. 그 결과 Snap-through 발생 직후에 흔들리던 해가 이속고 원래의 평형경로를 찾아 간다.

Fig. 6(b)에서는 평균압축응력과 평균압축변형률로 나타내고 있다. 이 그림에서 알 수 있는 바와 같이 초기좌굴로 인하여 면내강성이 저하한 후 2차좌굴이 발생하면 더욱더 면내강성이 저하함을 알 수 있다. 1반파의 중형비 a/b 의 처짐이 생긴 경우의 면내접선강성은 식(25)로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1+(a/b)^4}{3+(a/b)^4} E \quad (25)$$

따라서, 이 경우는 초기좌굴에 의해 $0.5E$ ($\alpha=1$)로 저하한 강성이 더욱더 $0.36E$ ($\alpha=3/5$)로 저하하게 된다. 선체구조의 설계상, 이 면내강성저하에 관한 배려는 중요하다.

4. 결 론

본 논문에서는 2차좌굴과 같은 물리적인 현상을 규명하기 위하여 호장증분법(Arc Length Method)을 적용하여 판의 지배방정식을 도출하고 판 부재를 대상으로하여 초기좌굴후의 거동에 대하여 2차좌굴을 포함하여 구체적으로 밝힘으로서 고장력강판의 물리적인 현상을 규명하여 초고속화물선을 건조하는 데 있어서 선각의 박판화에 기여할 수 있는 유익한 자료를 얻었다.

즉, 2차좌굴과 같은 복잡한 비선형거동을 해석하기 위하여 細野¹⁰⁾와 같은 호장증분법을 이용하여 면내압축하중을 받는 고장력강판의 2차좌굴거동을 해석하였다.

그 연구성과를 요약하면 다음과 같다.

1) 2차좌굴과 같은 점에서는 하중형증분법과 변위형증분법의 강성매트릭스[K]가 특이(Singular)로 됨으로서 그 근처의 경로를 추적하기 위해서는 호장증분법(Arc length method)으로 구하지 않으면 안된다.

2) 하중 또는 강제변위를 단순히 증가시키는 경우, 하중이 극대치에 달하는 시점에서 Snap-Through가 발생하여 처짐모드가 변화한다. 이 Snap-through의 발생은 극대치에 달한 후의 정적평형경로가 불안정평형경로이기 때문이다.

3) 종횡비가 3.6인 판의 경우, 탄성 2차좌굴강도가 최종강도보다 낮기 때문에 초기좌굴후 최종강도하기 전에 특히 초기항복이 생기기 전에 Snap-through현상의 2차좌굴이 발생한 후 최종강도에 도달한다.

4) 2차좌굴이 발생하면 초기좌굴의 면내강성보다 더욱 더 저하한다.

참 고 문 헌

1. Uemura, M. and Byon, O. : "Secondary Buckling of a Flat Plate under Uniaxial Compression ; Part I : Theoretical Analysis of Simply Supported Flat Plate", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.12, No.6, pp.355~370, 1976.
2. Uemura, M. and Byon, O. : "Secondary Buckling of a Flat Plate under Uniaxial Compression ; Part II : Analysis of Clamped Plate by F.E.M. and Comparison with Experiments", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol. 13, No.1, pp.1~14, 1978.
3. Nakamura, T. and Uetani, K. : "Secondary Buckling and Post-Secondary Buckling Behaviour of Rectangular Plates", *Int. J. Mech. SCI.*, Vol.21, pp.265~286, 1978.
4. 矢尾哲也, 藤久保昌彦, 高在用 : "初期たわみを有する薄板の2次座屈に関する研究", *日本造船學會論文集*, 第176號, pp.309~318, 1994.
5. 矢尾哲也, 藤久保昌彦, 高在用 : "面内壓縮荷重を受ける矩形板のたわみ舉動に関する研究", *西部造船會會報*, 第 89 號, pp.179~190, 1995.
6. 矢尾哲也, 藤久保昌彦, 高在用, 山本元道 : "2次座屈が板の座屈・塑性崩壞舉動に及ぼす影響に関する研究", *日本造船學會論文集*, 第 177 號, pp.347~355, 1995.
7. Riks, E. : "The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability", *Trans. of the ASME, J. of App. Mech.*, Vol. 39, pp.1060~1065, 1972.
8. Riks, E. : "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol.15, pp.529~551, 1979.
9. 細野 透 : "弧長法による弾性座屈問題の解析(その1)-座屈点に於ける増分解の性質-", *日本建築學會論文報告集*, 第242, pp.41~50, 1976.
10. 細野 透 : "弧長法による弾性座屈問題の解析(その2)-數値解析方法としての弧長法-", *日本建築學會論文報告集*, 第243, pp.21~31, 1976.
11. 高在用 : "2次座屈を伴う板の座屈・塑性崩壞舉動に関する研究", *廣島大學博士學位論文*, 1995.
12. 都井 裕, 弓削康平, 川井忠彦 : "構造要素の衝突壓壞強度に関する基礎的研究(その1)-有限要素法による超大變形解析-", *日本造船學會論文集*, 第159號, pp.248~257, 1986.
13. 高재용, T. Yao, 백점기 : "면내압축하중을 받는 판의 2차좌굴에 관한 연구", *대한조선학회논문집*, 제33권 제3호, pp.66~80, 1996. (접수일자 : 1998. 9. 2)