

비대칭 선형 변단면을 갖는 박벽 공간 보의 안정성 해석

Stability Analysis of Unsymmetric Tapered Thin-walled Beams

김 성 보* 구 봉 근** 한 상 훈** 정 경 섭***
Kim, Sung-Bo Koo, Bong-Kuen Han, Sang-Hoon Jung, Kyoung-Sup

요 지

전단변형 효과를 무시하는 경우에 비대칭 선형 변단면을 갖는 박벽 공간 보의 안정성 해석을 위한 일반이론을 유도한다. 비대칭 선형 변단면의 임의점을 통과하는 부재축과 단면의 주축의 방향과 무관하고 부재축과 직각을 이루는 두 개의 좌표축을 도입하여 직각좌표계를 정의한다. 정의된 좌표축을 기준으로 유한한 회전각의 2차항을 고려하는 변위장을 도입하여 연속체에 대한 가상일의 원리로부터 탄성변형에너지, 그리고 초기응력에 의한 포텐셜에너지를 유도한다. 이를 이용하여 비대칭 선형 변단면을 갖는 박벽 공간 보의 안정성해석을 위한 평형방정식을 제시한다. 3차 Hermitian 다항식을 변위과라미터의 형상함수로 사용하여 박벽 공간 보의 탄성강도 및 기하강도행렬을 산정할 뿐만 아니라, 단면의 좌표축에 상관없이 임의의 위치에 작용하는 하중에 대한 하중보정강도행렬 (load-correction stiffness matrix)을 제시한다. 본 이론 및 방법의 타당성을 검증하기 위하여 수치해석을 수행하고 문헌의 결과 및 쉘요소를 사용한 해석결과와 비교하여 본 이론의 정당성을 입증한다.

핵심용어 : 안정성 해석, 비대칭 변단면, 박벽 보, 하중보정강도행렬

Abstract

The general formulation for stability analysis of unsymmetric tapered thin-walled beams is presented in case where the shear deformation effects are neglected. The member axis is defined at an arbitrary point in the unsymmetric cross-section, and two axes, which are parallel to the member axis and not depend on the principal axis, are also defined. The total potential energies are derived by applying the virtual work principle, introducing displacement parameters defined at the arbitrarily chosen axis and including warping deformation and second order terms of finite rotations. In formulating the finite element procedure, cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions of the two node tapered beam element. Elastic and geometric stiffness matrices for the unsymmetric tapered thin-walled beams are evaluated, and load-correction stiffness matrices for off-axis loadings are considered. In order to illustrate the accuracy and practical usefulness of this formulation, finite element solutions for the stability problems of the unsymmetric tapered thin-walled beams are presented and compared with available solutions and the results by shell elements.

Keywords : stability analysis, unsymmetric, tapered, thin-walled beam, load-correction stiffness matrix

* 정회원·충북대학교 토목공학과, 전임강사
** 정회원·충북대학교 토목공학과, 교수
*** 정회원·충북대학교 구조시스템공학과, 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

박벽 단면을 갖는 구조는 부재단면을 최소화하면서 최대의 하중전달능력을 갖는 효율적인 구조로서, 토목, 건축, 기계 그리고 선체구조에 널리 이용되어 왔다. 박벽 공간 보의 안정성에 대한 고전적인 연구는 Vlasov¹⁾와 Timoshenko²⁾에 의해서 해석적인 이론이 개발되었다. 하지만 단면형상, 지지조건 및 하중조건이 복잡한 경우에는 좌굴거동에 대한 엄밀해를 구하기가 어렵거나 혹은 불가능하기 때문에 컴퓨터를 이용한 유한요소법과 같은 수치적인 해석방법에 대한 연구가^{3)~6)} 활발히 수행되었다. 이러한 이론들은 대부분 도심축과 전단중심축의 두축에서 변위 및 단면력이 정의되기 때문에 단면내부의 임의의 점에서 하중이 작용하거나, 부재축을 따라 변단면을 갖는 경우에 축방향 단면성질의 변화를 정확하게 모델링하기 어렵다. 특히 부재축 방향으로 단면의 형상이 변하는 변단면 부재의 안정성에 관한 기존의 연구들^{7)~11)}은 주로 단면이 대칭 혹은 일축 비대칭인 경우에 적용할 수 있도록 개발되었다. Bradford 와 Cuk⁸⁾은 일축 비대칭 변단면을 갖는 박벽보의 좌굴에 대한 유한요소 해석이론을 발표하였다. 박벽보 복부 높이의 1/2되는 점에서 변위파라미터를 정의하여 도심축과 전단중심축이 평행하지 않는 일축비대칭 변단면 단순보의 횡좌굴하중을 산정하였다. 또한 김¹⁰⁾은 변단면 보부재에 대한 강도행렬의 계산과정에서 수치적분을 이용하지 않고 각 절점에서 변단면의 모든 제원을 변수로 하여 직접 적분한 강도행렬을 제시하였다.

본 논문에서는 박벽 보-기둥의 안정성거동을 조사하기 위하여, 전단변형효과를 무시하는 경우에 비대칭 변단면을 갖는 공간 보의 평형방정식을 유도하는 일반이론을 제시한다. 임의점을 통과하는 부재축과 두 개의 직각좌표를 도입하고, 이 축에 대한 박벽단면의 이동변위와 유한한 회전각의 2차항까지 고려된 회전변위 그리고 뒹(warping)으로 인한 비틀변위를 도입하여 연속체의 선형화된 에너지원리를 적용함으로써, 박벽 공간 보의 탄성변형에너지, 그리고 초기 단면력

에 의한 포텐셜에너지를 유도한다. 현재의 일반이론은 비대칭 변단면의 신장-휨-비틀거동에 의한 연계효과를 정확히 고려한다. 제시된 이론의 유한요소 정식화과정을 다루기 위하여, 전단효과를 무시하는 3차 Hermitian 다항식을 횡변위와 비틀각에 대한 형상함수로 사용하여 탄성강도행렬, 그리고 기하강도행렬을 수치적분을 통하여 산정한다. 뿐만 아니라 off-axis 선형분포하중에 대한 하중보정강도행렬(load-correction stiffness matrices)를 고려한다. 비대칭 변단면을 갖는 박벽 공간 보의 안정성해석을 위한 수치해석예가 제시되고 문헌의 결과 및 ABAQUS¹²⁾의 셸요소를 사용한 해석해와 비교, 검토를 통하여 본 이론의 타당성과 정확성을 입증한다.

2. 선형 변단면을 갖는 박벽 공간 보의 평형방정식

2.1 박벽 공간 보의 가상일의 원리

Total Lagrangian 정식화에 따른, 3차원 연속체에 대한 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$\int_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V b_i \delta U_i dV + \int_S T_i \delta U_i ds \quad (1)$$

여기서 τ_{ij} 와 ϵ_{ij} 는 각각 2-nd Piola-Kirchhoff 응력과 Green-Lagrange의 변형도 텐서; U_i 는 변위벡터; b_i 와 T_i 는 물체력과 표면력을 나타내고 δ 은 변분을 의미한다.

정적 안정성해석을 수행하기 위하여 보존력을 받는 연속체를 생각한다. 초기변위는 없고, 초기 응력 ${}^0\tau_{ij}$, 초기물체력 0b_i 그리고 표면력 0T_i 이 자체로 평형을 이루는 경우에, 변위, 변형도, 응력, 그리고 힘의 충분관계식은 다음과 같이 표시된다.

$$U_i = U_i + U_i^* \quad (2a)$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} + e_{ij}^* \quad (2b)$$

$$\tau_{ij} = {}^0\tau_{ij} + \tau_{ij} \quad (2c)$$

$$b_i = {}^0b_i \quad (2d)$$

$$T_i = {}^oT_i + T_i \quad (4)$$

여기서 윗첨자 'o'와 't'는 각각 변수의 초기치 및 총 크기를 나타내고 윗첨자 표시가 없는 변수는 증분량을 나타낸다. U_i 와 U'_i 는 각각 변위파라미터의 1차 및 2차항을 나타낸다(식(16) 및 식(17) 참조). e_i 와 η_i 는 각각 본래의 선형 및 비선형 Green-Lagrange 변형도 증분이고 e'_i 는 U'_i 로 인한 선형 변형도 증분을 표시한다. 이들 변형도의 정의식은 이전의 연구결과¹⁵⁾를 참조할 수 있다. 식(2)를 식(1)에 대입하고 초기응력 τ_{ij} , 초기물체력 b_i , 그리고 표면력 T_i 이 자체로 평형을 이루는 평형방정식을 고려하여 정리하면 다음과 같이 선형화된 가상일의 원리를 얻는다.

$$\int_V [\tau_{ij}\delta e_{ij} + \tau_{ij}\delta(\eta_{ij} + e'_{ij}) - b_i\delta U_i] dV - \int_S T_i \delta U_i ds = \int_S \delta U_i ds \quad (5)$$

여기서, 좌변의 첫번째 항은 박벽 공간 요소소의 탄성변형에너지이고 초기응력으로 인한 기하학적 강도항은 비선형 변형도와 회전파라미터의 2차항의 결합된 효과를 나타내는 나머지 항들로부터 얻어지며 우변은 부재력에 대응하는 포텐셜 에너지이다.

2.2 박벽 공간 보부재의 변위장

그림 1은 비대칭 박벽단면의 변위장 및 단면력을 정의하기 위하여 본 연구에서 도입한 직각좌표계와 변위파라미터를 나타낸 것이다. x_1 축은 단면의 임의점을 통과하는 부재축이며, x_2 및 x_3 축은 x_1 축과 직각을 이루는 임의의 축이다. U_x, U_y, U_z 와 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 는 각각 x_1, x_2 및 x_3 축에 대한 단면의 강제이동변위와 회전변위를 표시한다. 또한, f 는 퓌를 정의하는 파라미터이다.

회전각의 2차항까지 확장된 변위장을 유도하기 위하여 x_1, x_2 및 x_3 축에 대한 단면의 유한한 강제회전변위 ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$)를 생각한다. 유한한 회전각에 의한 단면 내부의 임의의 점의 최종변위

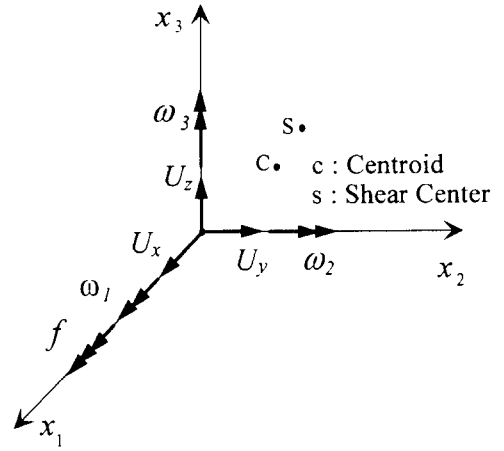


그림 1 좌표축과 변위파라미터

는 미소회전각 ($\omega_1/n, \omega_2/n, \omega_3/n$, 여기서 n 은 큰양의 정수)에 의한 변환을 계속하여 반복시켰을 때 얻어지며, 미소회전각에 의한 회전변환은 기존의 선형회전변환행렬로 표현된다. 즉, 초기위치벡터 X_0 는 각각 x_1, x_2 및 x_3 축에 대한 미소회전각 ($\omega_1/n, \omega_2/n, \omega_3/n$)에 의하여 다음과 같이 일차 선형변환을 한다.

$$X_1 = (I + \tilde{S})X_0 \quad (6)$$

$$\text{여기서 } X_0^T = \langle 0, x_2, x_3 \rangle \quad (7a)$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3/n & \omega_2/n \\ \omega_3/n & 0 & -\omega_1/n \\ -\omega_2/n & \omega_1/n & 0 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

식 (7a)에서 윗첨자 'T'는 벡터의 전치를 의미한다. 미소 회전각에 의하여 일차 선형변환된 벡터 X_1 은 또다시 같은 크기를 가지는 연속적인 미소회전각에 의하여 다음과 같이 선형변환된다.

$$X_2 = (I + \tilde{S})X_1 = (I + \tilde{S})^2X_0 \quad (8)$$

이러한 변환을 계속하여 반복하면 n 번의 미소회전각에 의한 최종변환은 아래와 같다.

$$X_n = (I + \tilde{S})^n X_0 \tag{9}$$

윗 식에 Binomial theorem을 이용하여 전개하고 3차 이상의 고차항을 무시하면

$$X_n = \left[I + nS + \frac{n(n-1)}{2} \tilde{S}^2 \right] X_0 \tag{10}$$

이제, n 을 무한히 증가시키면 벡터 X_n 은 최종적으로 다음과 같이 X 에 수렴한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X = \left(I + S + \frac{1}{2} S^2 \right) X_0 \tag{11}$$

여기서 $S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$ (12)

따라서 초기위치벡터 X_0 가 x_1, x_2 및 x_3 축에 대한 회전($\omega_1/n, \omega_2/n, \omega_3/n$)에 의하여 일으킨 회전변위는 다음 식으로 표현된다.

$$X - X_0 = \left(S + \frac{1}{2} S^2 \right) X_0 \tag{13}$$

결과적으로 부재축의 x_1 위치에서 박벽 단면 임의점의 총변위 U 는 식 (13)의 강체회전변위와 강체이동변위와의 합으로 아래와 같이 표시된다.

$$U = U_0 + (X - X_0) = U_0 + \left(S + \frac{1}{2} S^2 \right) X_0 \tag{14a}$$

여기서 $X_0^T = \langle 0, x_2, x_3 \rangle$ (14b)

$$U_0^T = \langle U_x + f\phi, U_y, U_z \rangle \text{ 이고} \tag{14c}$$

ϕ 는 좌표원점에 대하여 정의된 함수이다. 식 (14)의 총변위 U 에서 변위파라미터의 1차항과 2차항을 각각 U_i, U_i' 으로 표시하면, 전단변형이 무시되는 경우 ($\omega_2 = -U_z'; \omega_3 = U_y'; f = -\omega_1' = -\theta'$ 에 박벽단면의 변위장은 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$U^T = \langle U_1 + U_1', U_2 + U_2', U_3 + U_3' \rangle \tag{15}$$

여기서

$$U_1 = U_x - U_z' x_3 - U_y' x_2 - \theta' \phi \tag{16a}$$

$$U_2 = U_y - \theta x_3 \tag{16b}$$

$$U_3 = U_z + \theta x_2 \tag{16c}$$

그리고

$$U_1' = \frac{1}{2} [-\theta U_z' x_2 + \theta U_y' x_3] \tag{17a}$$

$$U_2' = \frac{1}{2} [-(\theta^2 + U_y'^2) x_2 - U_z' U_y' x_3] \tag{17b}$$

$$U_3' = \frac{1}{2} [-U_z' U_y' x_2 - (\theta^2 + U_z'^2) x_3] \tag{17c}$$

여기서 윗첨자 '는 부재축 x_i 에 대한 미분을 나타낸다.

2.3 단면상수 및 단면력

그림 2는 비대칭 박벽단면의 변위파라미터, 단면계수 그리고 단면력의 변환관계식을 유도하기 위하여 정의하는 세 개의 직각좌표계를 나타낸 것이다. 그림 2에서 (x_2, x_3) 좌표계는 단면내부의 임의의 점에서 정의된 직각좌표계이고 본 논문에

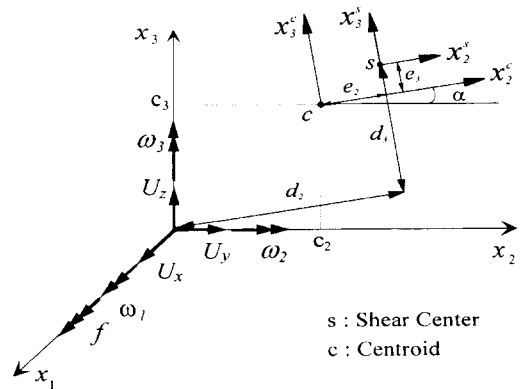


그림 2 세 개의 직각좌표계

서는 이와 같이 임의의 점에서 정의된 직각좌표계를 이용하여 정식화한다. 한편, (x_2^i, x_3^i) 와 (x_2^j, x_3^j) 는 각각 도심과 전단중심에서 주축과 평행한 좌표축을 나타낸다. c_2, c_3 는 (x_2, x_3) 축에서 도심의 좌표이고, e_2, e_3 는 (x_2^i, x_3^i) 축에서 전단중심의 좌표이며 α 는 x_2^i 축이 반시계방향으로 x_2 축과 이루는 사이각이다. 임의 좌표축 x_2, x_3 에 대하여 정의되는 단면상수들을 다음과 같이 정의한다.

$$S_3 = \int_A x_3 dA = c_3 A, \quad S_2 = \int_A x_2 dA = c_2 A$$

$$I_2 = \int_A x_3^2 dA, \quad I_3 = \int_A x_2^2 dA, \quad I_{23} = \int_A x_2 x_3 dA$$

$$I_{2\phi} = \int_A x_3 \phi dA, \quad I_{3\phi} = \int_A x_2 \phi dA, \quad I_\phi = \int_A \phi^2 dA \quad (18)$$

(x_2^i, x_3^i) 와 (x_2^j, x_3^j) 의 두 좌표계에서 정의되는 단면상수들은 식 (18)의 기호에 오른쪽 윗첨자 c, s 를 삽입하여 표시하며 이 규칙은 변위파라미터, 단면력에 대하여도 동일하게 적용한다. 식 (18)에서 ϕ 는 임의의 부재축 x_1 에 대한 함수이며 단면에 대해 정규화되어 있다고 가정하면 다음과 같이 세좌표계에서 정의되는 단면상수 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$I_2 = I_3^c \sin^2 \alpha + I_2^c \cos^2 \alpha + c_3^2 A$$

$$I_3 = I_3^c \cos^2 \alpha + I_2^c \sin^2 \alpha + c_2^2 A$$

$$I_{2\phi} = -I_3^c \sin \alpha d_3 + I_2^c \cos \alpha d_2$$

$$I_{3\phi} = -I_3^c \cos \alpha d_3 - I_2^c \sin \alpha d_2$$

$$I_{23} = (I_3^c - I_2^c) \sin \alpha \cos \alpha + c_2 c_3 A$$

$$I_\phi = I_\phi^c + I_3^c d_3^2 + I_2^c d_2^2 \quad (19)$$

단면이 강체거동한다는 가정 때문에 면내변형도 ($\epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}$)를 영으로 간주하고 박벽단면 내에서 평면응력상태를 가정하므로, 충분 단면력을 아래와 같이 정의한다.

$$F_1 = \int_A \tau_{11} dA, \quad F_2 = \int_A \tau_{12} dA, \quad F_3 = \int_A \tau_{13} dA$$

$$M_1 = \int_A (\tau_{12} x_2 - \tau_{13} x_3) dA, \quad M_2 = \int_A \tau_{11} x_3 dA$$

$$M_3 = -\int_A \tau_{11} x_2 dA, \quad M_\phi = \int_A \tau_{11} \phi dA$$

$$M_R = \int_A (\tau_{12} \phi_{,2} + \tau_{13} \phi_{,3}) dA$$

$$M_P = \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA \quad (20)$$

여기서, F_1, F_2 그리고 F_3 는 각각 축력과 전단력이다; M_2 와 M_3 는 각각 x_2 와 x_3 축에 대한 휨모멘트이다; M_1 은 x_1 축에 대한 비틀림모멘트, M_R 와 M_ϕ 는 각각 x_1 축에 대한 구속된 비틀림모멘트와 바이모멘트이다; M_P 는 임의의 부재축에서 정의된 Wagner effect⁽¹⁴⁾를 나타내는 단면력이며 전단중심축 및 임의의 부재축에서 정의된 결과식은 문헌^{(14), (15)}을 참조할 수 있다. 한편, 좌표축 사이의 변환관계를 고려하면 다음과 같이 세좌표계에서 정의되는 단면력 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$F_1 = F_1^c$$

$$F_2 = F_2^c \cos \alpha - F_3^c \sin \alpha$$

$$F_3 = F_2^c \sin \alpha + F_3^c \cos \alpha$$

$$M_1 = M_1^c - F_2^c d_3 + F_3^c d_2$$

$$M_2 = -M_3^c \sin \alpha + M_2^c \cos \alpha + c_3 F_1^c$$

$$M_3 = M_3^c \cos \alpha + M_2^c \sin \alpha - c_2 F_1^c$$

$$M_\phi = M_\phi^c + M_3^c d_3 + M_2^c d_2$$

$$M_R = M_R^c - F_2^c d_3 + F_3^c d_2 \quad (21)$$

또한, 단면력에 대한 정의식에 후크의 법칙을 적용하고, 변위-변형도 관계식의 변위를 대입하여 단면에 대하여 적분을 행하면 다음의 힘-변위 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= EA U_x' - ES_3 U_z'' - ES_2 U_y'''' \\
 M_2 &= ES_3 U_x' - EI_2 U_z'' - EI_{23} U_y'' - EI_{3\phi} \theta'' \\
 M_3 &= -ES_2 U_x' + EI_{23} U_z'' + EI_3 U_y'' + EI_{2\phi} \theta'' \\
 M_\phi &= -EI_{3\phi} U_z'' - EI_{2\phi} U_y'' - EI_\phi \theta'' \\
 M_{st} &= GJ \theta'
 \end{aligned} \tag{22}$$

그림 3은 선형분포하중과 부재력을 받는 공간 보요소이다. 초기물체력은 좌표원점에서 선형분포하는 것으로 가정하면 요소내에 발생하는 축방향력, 전단력, 그리고 휨모멘트의 분포는 식 (23)과 같이 표현할 수 있다¹⁵⁾.

$$\begin{aligned}
 {}^oF_1 &= -{}^oF_1^f - {}^oP_1^f x_1 - ({}^oP_1^q - {}^oP_1^f) \frac{x_1^2}{2L} \\
 {}^oF_2 &= -{}^oF_2^f - {}^oP_2^f x_1 - ({}^oP_2^q - {}^oP_2^f) \frac{x_1^2}{2L} \\
 {}^oF_3 &= -{}^oF_3^f - {}^oP_3^f x_1 - ({}^oP_3^q - {}^oP_3^f) \frac{x_1^2}{2L} \\
 {}^oM_1 &= -{}^oM_1^f + {}^oP_x \phi(0, 0) \\
 {}^oM_2 &= -{}^oM_2^f - {}^oF_3^f x_1 - {}^oP_3^f \frac{x_1^2}{2} \\
 &\quad - ({}^oP_3^q - {}^oP_3^f) \frac{x_1^3}{6L} \\
 {}^oM_3 &= -{}^oM_3^f + {}^oF_2^f x_1 + {}^oP_2^f \frac{x_1^2}{2} \\
 &\quad + ({}^oP_1^q - {}^oP_1^f) \frac{x_1^3}{6L}
 \end{aligned} \tag{23}$$

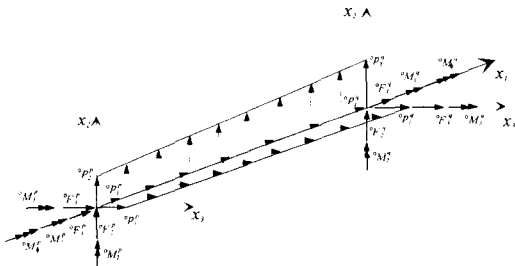


그림 3 선형분포하중과 부재력을 받는 공간 보요소

2.4 박벽 공간 보부재의 총포텐셜에너지

박벽 공간 보의 총포텐셜에너지 Π 는 다음과 같이 표시된다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G - \Pi_{ext} \tag{24}$$

여기서 Π_E , Π_G 그리고 Π_{ext} 는 각각 선형탄성에너지, 초기응력에 의한 에너지 그리고 단부의 증분 부재력에 의한 에너지를 나타내며 각각의 항은 다음과 같다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \int_L \int_A \tau_{ij} e_{ij} dA dx_1 \tag{25a}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_G &= \int_L \int_A [\tau_{ij} (\eta_{ij} + e_{ij}) - b_i U_i'] dA dx_1 \\
 &\quad - \int_s T_i U_i ds
 \end{aligned} \tag{25b}$$

$$\Pi_{ext} = \frac{1}{2} \int_s T_i U_i ds \tag{25c}$$

변위-변형도 관계식을 대입하고 단면력의 정의식을 고려하여 단면에 대하여 적분을 수행하면 윗 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \Pi_E &= \frac{1}{2} \int_L [EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 \\
 &\quad + GJ \theta'^2 + EI_\phi \theta''^2 - 2ES_2 U_x' U_z'' \\
 &\quad - 2ES_3 U_x' U_y'' + 2EI_{23} U_y'' U_z'' \\
 &\quad + EI_{3\phi} U_y'' \theta'' + 2EI_{2\phi} U_z'' \theta''] dx_1
 \end{aligned} \tag{26a}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_G &= \frac{1}{2} \int_L [{}^oF_1 (U_x'^2 + U_z''^2) + {}^oM_\phi \theta'^2 \\
 &\quad + {}^oM_1 (U_z'' U_y'' - U_z'' U_y') + {}^oM_2 (U_y'' \theta - U_y' \theta') \\
 &\quad + {}^oM_3 (U_z'' \theta - U_z' \theta') + {}^oF_2 U_z' \theta + {}^oF_3 U_y' \theta] dx_1
 \end{aligned} \tag{26b}$$

$$\Pi_{ext} = \frac{1}{2} U_i^T F_c \tag{26c}$$

여기서 U_e 와 F_e 는 각각 부재양단의 변위벡터와 부재력벡터를 나타내며 윗 식을 총포텐셜에너지 Π 에 대입하고 4개의 변위성분 (U_x, U_y, U_z, θ)에 대하여 변분을 취하면 박벽 공간 보부재의 평형방정식을 얻을 수 있다.

3. 유한요소법을 이용한 정식화

3.1 2절점 Hermitian 공간 보요소

그림 4는 절점당 7개의 자유도를 갖는 2절점 Hermitian 보요소를 보여준다. 일반화된 좌표들 (U_x, U_y, U_z, θ)을 재단변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수를 선택하여야 한다. 본 논문에서 축방향 변위 U_x 는 선형변화로 가정하고, 휨거동에 의한 횡방향 처짐 U_y, U_z 와 비틀회전각 θ 는 3차 Hermitian 다항식을 사용한다. 그림 4를 참조하여 위의 사항들을 고려하면 공간 보요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다

$$U_x = (1-\beta) \cdot U^p + \beta \cdot U^q, \quad \beta = x_1/L \quad (27a)$$

$$U_y = h_1 \cdot V^p + h_2 \cdot L \cdot \omega_2^p + h_3 \cdot V^q + h_4 \cdot L \cdot \omega_2^q \quad (27b)$$

$$U_z = h_1 \cdot W^p - h_2 \cdot L \cdot \omega_3^p + h_3 \cdot W^q - h_4 \cdot L \cdot \omega_3^q \quad (27c)$$

$$\theta = (1-\beta) \cdot \omega_1^p + \beta \cdot \omega_1^q \quad (27d)$$

여기서, h_i 는 3차 Hermitian 다항식을 나타낸다.

또한 선형 변단면 부재의 경우 단면을 구성하는 각각의 박벽요소의 폭(B), 높이(h), 두께(t) 등이 부재 길이 방향으로 선형적으로 변화한다.

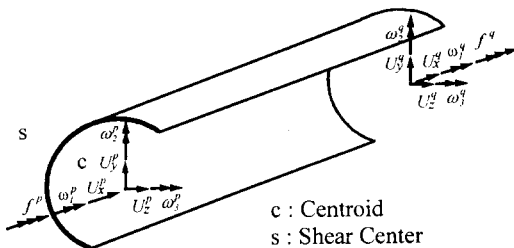


그림 4 2절점 Hermitian 공간 보요소

따라서 보 부재 내부의 임의의 점에서 단면 요소의 치수를 다음과 같이 일차함수를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} B(x_1) \\ h(x_1) \\ t(x_1) \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \begin{pmatrix} B^p \\ h^p \\ t^p \end{pmatrix} + \frac{x_1}{L} \begin{pmatrix} B^q \\ h^q \\ t^q \end{pmatrix} \quad (28)$$

여기서 윗첨자 'p'와 'q'는 $x_1=0$ 과 $x_1=L$ 에서의 값을 의미한다. 윗 식을 이용하면 부재 길이 방향으로 임의의 점에서 단면상수들을 구할 수 있다.

형상함수와 절점변위벡터로 표현되는 변위장 (27) 그리고 식 (28)을 사용하여 나타낸 단면상수를 식 (25)에 대입하여 부재길이에 대하여 Gauss수치적분을 수행하면 전체포텐셜 에너지식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\Pi = \frac{1}{2} U_e^T (K_e + K_r) U_e - U_e^T F_e \quad (29)$$

여기서 K_e 그리고 K_r 는 각각 14×14 의 부재 탄성강도 및 기하강도행렬을 나타낸다. 식 (29)를 변분을 취하고 직접강도법에 의한 좌표변환을 수행하면 박벽 공간 보의 행렬 평형방정식을 얻는다.

$$[K_E + \lambda K_G] U = 0 \quad (30)$$

여기서 K_E 그리고 K_G 는 각각 전체구조물 탄성강도 및 기하강도 행렬이며 λ 는 하중파라미터로서 고유치해석을 통하여 좌굴하중을 산정할 수 있다.

3.2 하중보정강도행렬

전장에서는, 초기상태에서 외부하중은 부재축의 좌표원점에 작용한다고 가정하여 박벽 공간 보의 강도행렬을 유도하였다. 하지만 외부하중이 단면내부의 임의의 점에 작용하는 경우, 이를 보정하는 과정이 필요하다. 절점 r 에 작용하는 초기하중 F_{1r}^p, F_{2r}^p 그리고 F_{3r}^p 의 작용점의 위치가

각각 $(0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $(0, \hat{x}_3, \hat{x}_3)$ 그리고 $(0, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ 이면 추가적인 포텐셜에너지는 식 (17) 및 식 (25)를 고려하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_s = & -\frac{1}{2} {}^oF_1^T [\omega_1^s \omega_2^s \bar{x}_2 + \omega_1^s \omega_3^s \bar{x}_3] \\ & -\frac{1}{2} {}^oF_2^T [-(\omega_1^{s2} + \omega_3^{s2}) \hat{x}_2 + \omega_2^s \omega_3^s \hat{x}_3] \\ & -\frac{1}{2} {}^oF_3^T [\omega_2^s \omega_3^s \tilde{x}_2 - (\omega_1^{s2} + \omega_2^{s2}) \tilde{x}_3] \quad (31) \end{aligned}$$

따라서 off-axis 절점하중에 의한 하중보정강도행렬 (Load correction stiffness matrices)은 아래 식과 같다.

$$K_{off} = \begin{bmatrix} {}^oF_1^T \bar{x}_2 + {}^oF_1^T \bar{x}_3 & -0.5 {}^oF_1^T \bar{x}_2 & -0.5 {}^oF_1^T \bar{x}_3 \\ \text{symm.} & {}^oF_2^T \hat{x}_3 & -0.5 {}^oF_2^T \hat{x}_2 - 0.5 {}^oF_2^T \hat{x}_3 \\ & & {}^oF_3^T \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

한편, 부재축을 따라 선형분포하는 하중 oP_x , oP_y 그리고 oP_z 의 작용점의 위치가 각각 $(0, \bar{x}_{b2}, \bar{x}_{b3})$, $(0, \hat{x}_{b2}, \hat{x}_{b3})$, $(0, \tilde{x}_{b2}, \tilde{x}_{b3})$ 일 때도 위와 같은 과정을 거쳐 추가적인 포텐셜에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_b = & -\frac{1}{2} \int_L {}^oP_x [\omega_1 \omega_2 \bar{x}_{b2} + \omega_1 \omega_3 \bar{x}_{b3}] \\ & - {}^oP_y [-(\omega_1^2 + \omega_3^2) \hat{x}_{b2} + \omega_2 \omega_3 \hat{x}_{b3}] \\ & - {}^oP_z [\omega_2 \omega_3 \tilde{x}_{b2} - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \tilde{x}_{b3}] dx_1 \quad (33) \end{aligned}$$

또한, 식 (32)의 하중보정강도행렬은 전체좌표계에서 유도하였기 때문에 좌표변환 과정이 필요 없지만, 식 (33)의 선형분포하중에 대한 하중보정강도행렬은 부재좌표계에서 유도하였기 때문에 좌표변환을 한 후 안정성 해석을 수행하여야 한다.

4. 수치해석에

4.1 대칭 선형 변단면을 갖는 켈테레버의 횡좌굴

그림 5는 자유단에 집중하중을 받는 변단면 켈테레버와 고정단에서의 가장 큰 단면을 나타낸다. 집중하중은 자유단에서 상부플랜지의 중심에 작용하고 있다. 본 예제에 대한 유한요소해석은 단면의 도심축과 주축을 직각좌표축으로 정의하고 총 8개의 요소를 사용하여 좌굴해석을 수행하였다. 플랜지의 폭 그리고 복부판의 높이가 부재축 길이에 따라 선형적으로 변하는 경우의 좌굴하중이 각각 그림 6 그리고 그림 7에 나타나있다.

계산된 좌굴하중은 $\sqrt{(EI_z GJ)_o/L^2}$ 의 값으로 나누어져서 여러 문헌의 결과^{8)~10)}와 함께 도시하였으며 아래첨자 'o'는 단면이 가장 큰 고정단에서의 단면을 의미한다. 플랜지폭이 변하는 켈테레버의 경우 본 논문의 결과는 Bradford와 Cuk⁸⁾ 그리고 김⁹⁾의 결과와 잘 일치한다. 하지만 Chan¹⁰⁾의 결과는 변단면 비율 (고정단에서의 플랜지 폭에 대한 자유단에서의 플랜지 폭)이 작아짐에 따라 약간의 차이를 보이고 있다. 한편, 복부판의 높이가 부재 길이 방향으로 선형적으로 변할 때의 좌굴하중이 문헌의 결과^{8),10)}와 함께 그림 7에 도시되어 있다. 본 논문의 결과는 김¹⁰⁾의 결과와 잘 일치함을 보이고 있다. 하지만 Bradford와 Cuk⁸⁾의 결과는 보계수 (beam parameter)가 증가함에 따라, 즉, 보의 길이가 작

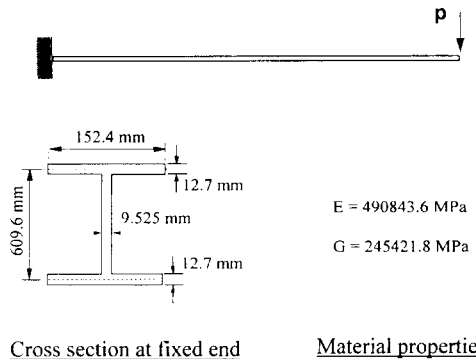


그림 5 자유단에 집중하중을 받는 변단면 켈테레버

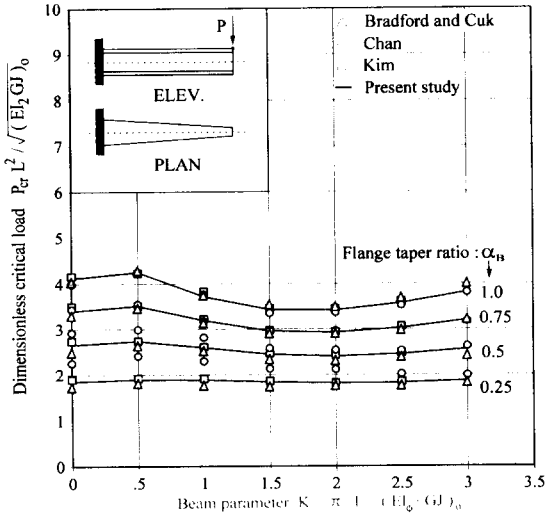


그림 6 플랜지 폭 변화에 따른 캔틸레버의 좌굴하중

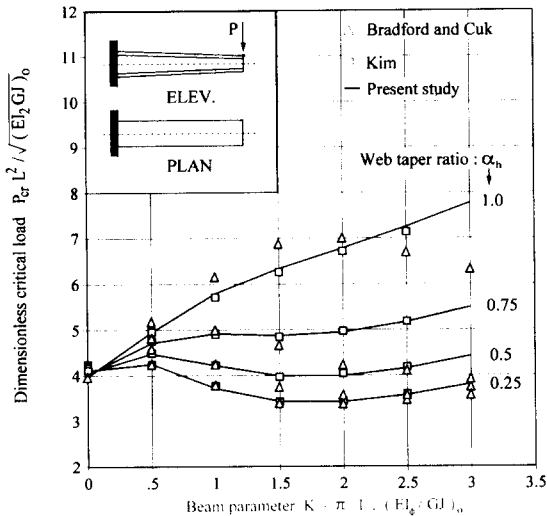


그림 7 복부 높이의 변화에 따른 캔틸레버의 좌굴하중

아짐에 따라, 좌굴하중의 크기가 작아지는 모순된 결과를 보여주고 있다.

4.2 비대칭 선형 변단면을 갖는 단순보의 횡좌굴

그림 8에서 시간 중앙에 집중하중을 받는 비대칭 변단면 단순보와 가장 큰 단면이 도시되어 있다. 그림 8과 같이 상, 하부 플랜지의 폭이 부재

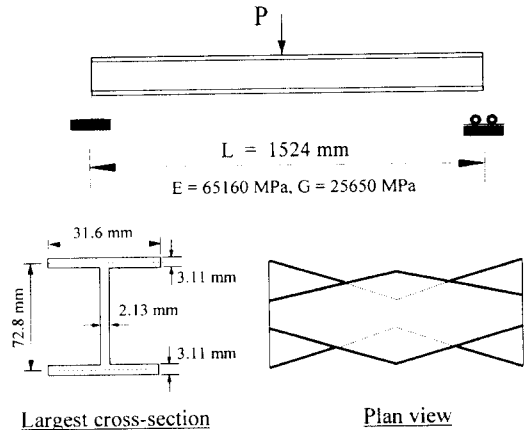


그림 8 시간 중앙에 집중하중을 받는 비대칭 변단면 단순보

축방향으로 변하게 되면 도심과 전단중심이 서로 평행하지 않고 교차하게 되기 때문에 기존의 보요소를 사용해서 좌굴하중을 산정하기에는 해석상의 어려움이 있다. 본 연구에서 제시된 보요소는 단면의 임의의 점에서 변위파라미터를 정의하여 개발되었기 때문에 본 예제와 같은 경우에 자연스럽게 적용될 수 있다. 단순보의 절반을 10개의 보요소로 모델링하여 산정한 좌굴하중 값이 Bradford 와 Cuk⁸⁾, Kitipornchai 와 Trahair¹¹⁾의 결과 그리고 ABAQUS¹²⁾의 4절점 쉘요소를 사용하여 계산된 결과(사용된 쉘요소의 갯수는 4000개)와 함께 그림 9에 도시되어 있다. 특히 본 논문의 결과와 ABAQUS¹²⁾의 쉘요소를 사용하여 계산된 좌굴하중은 표 1에 나타나 있다. 표 1에서 양의 좌굴하중은 그림 8에서 나타난 하중작용방향에 대한 좌굴하중이고 음의 좌굴하중은 그림 8에서 나타난 하중작용방향과 반대방향의 하중에 대한 좌굴하중이다. 또한, 본 논문의 해석결과에서 부재축을 복부판의 최상부, 도심 및 최하단부로 정의하여 계산된 각각의 좌굴하중은 서로 완전히 일치하였다. 그림 9 및 표 1에서, 본 논문의 해석 결과는 Bradford 와 Cuk⁸⁾의 결과와 잘 일치함을 보이고, 쉘요소를 사용하여 계산된 좌굴하중값과의 최대오차가 4%임을 보여주고 있다.

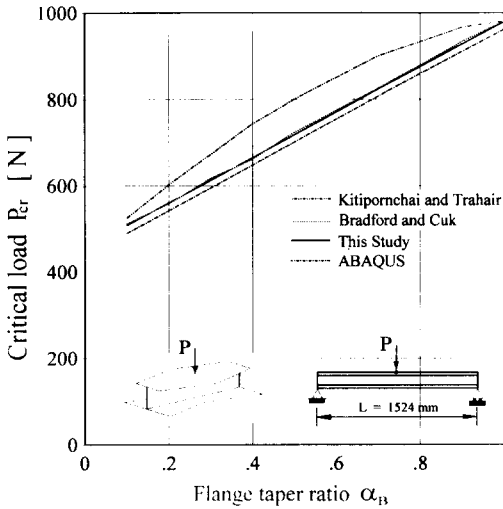


그림 9 비대칭 변단면을 갖는 단순보의 좌굴하중

표 1 비대칭 변단면을 갖는 단순보 좌굴하중 [N]

Flange taper ratio ($\alpha_n = \frac{B_n}{B_0}$)	This Study		ABAQUS	
	0.1	507.811	-412.302	489.43
0.2	559.337	-458.950	541.28	-446.83
0.3	611.336	-524.640	593.76	-512.79
0.4	663.875	-612.604	646.72	-600.50
0.5	716.816	-723.942	699.97	-710.97
0.6	769.893	-859.161	753.27	-844.72
0.7	822.836	-1018.64	806.34	-1002.1
0.8	875.436	-1202.78	858.98	-1183.6
0.9	927.550	-1412.07	911.05	-1389.4
1.0	979.113	-1647.05	962.46	-1620.1

5. 결 론

본 논문에서는 비대칭 선형 변단면을 갖는 박벽 공간 보의 안정성거동을 조사하기 위하여, 전단변형효과를 무시하는 경우에 공간 보의 평형방정식을 유도하는 일반이론이 제시되었다. 단면 내부의 임의점을 통과하는 부재축과, 주축의 방향과 무관한

두 개의 직각좌표축을 도입하고, 이 축에 대한 박벽단면의 이동변위와 유한한 회전각의 2차항까지 포함되는 회전변위 그리고 뒀으로 인한 비틀변위를 도입하여 연속체의 선형화된 에너지원리를 적용함으로써, 박벽 공간 보부재의 탄성변형에너지 그리고 초기 단면력에 의한 포텐셜에너지를 유도하였다. 제시된 이론의 유한요소 정식화에서는 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 탄성강도행렬과 기하강도행렬을 산정하였으며 단면내부의 임의의 점에 작용하는 off-axis 분포하중에 대한 하중보정강도행렬을 고려하였다. 대칭 및 비대칭 변단면을 갖는 박벽 공간 보부재의 안정성에 대한 수치해석 결과를 여러 문헌의 결과 및 ABAQUS의 쉘요소를 이용한 해석결과와 비교 분석하여 본 연구의 이론 및 방법의 타당성을 입증하였다. 또한, 본 논문에서 제시된 이론은 비대칭 변단면을 갖는 박벽 공간 보의 도심, 전단중심의 위치 및 주축의 방향과 무관하게 부재축을 정의할 수 있기 때문에 주형, 가로보 및 세로보가 서로 복잡하게 연결되어 있는 교량구조의 해석에도 유용하게 적용될 수 있다고 판단된다.

감사의 글

본 논문은 한국학술진흥재단의 대학부설연구소 지원사업에 대한 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 관계자 여러분에게 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. V. Z. Vlasov, *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd ed., Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem, 1961.
2. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
3. R. W. Barsoum and R. H. Gallagher, "Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems", *Int. j. numer. methods eng.*, 2, pp.335~352, 1970.

4. T. M. Roberts and C. A. Burt, "Instability of monosymmetric I-beams and cantilevers", *Int. J. Mech. Sci.*, 27, (5), pp.313~324, 1985.
5. J. Paavola and S. Salonen, "Flexural-torsional stability of thin-walled columns", *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 118, (12), pp.2384~2400, Dec. 1992.
6. M. M. Attard, "Lateral buckling analysis of beams by the FEM", *Computers and structures*, 23, (2), pp.217~231, 1985.
7. S. Kitipornchai and N. S. Trahair, "Elastic stability of tapered I-beams", *J. Struct. Div., ASCE*, 98 (ST3), pp.713~727, 1972.
8. M. A. Bradford and P. E. Cuk, "Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams", *J. Struct. Eng. ASCE*, 114(5), pp. 977~995, 1988.
9. S. L. Chan, "Buckling analysis of structures composed of tapered members", *J. Struct. Eng., ASCE*, 116, pp.1893~1906, 1990.
10. M. Kim, *Elastic and Inelastic Buckling of Tapered Members with Accumulated Strain*, Ph. D. Thesis, State University of New York at Buffalo, 1992.
11. S. Kitipornchai and N. S. Trahair, "Elastic behavior of tapered monosymmetric I-beams", *J. Struct. Div., ASCE*, 101 (ST8), pp.1661~1678, 1975.
12. ABAQUS, *User's Manual*, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992.
13. W. F. Chen and T. Atsuta, *Theory of Beam-Columns, Vol. 2, Space Behavior and Design*, McGraw-Hill, New York, 1977.
14. M. Y. Kim, S. P. Chang and S. B. Kim, "Spatial stability analysis of thin-walled space frames", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 39, pp.499~525, 1996.
15. 김문영, 김성보, "박벽 공간 뼈대구조의 자유진동 및 안정성 해석을 위한 일반이론", *한국전산구조공학회논문집*, 제11권 제1호, pp. 191~204, 1998.

(접수일자 : 1998. 8. 28)