

유한요소 기법을 적용한 시간적분법에서 형상함수에 따른 오차추정치 유도

The Derivation of Error Estimates with Various Shape Functions for Time Integration Using Finite Element Approach

장 인 식* 맹 주 원** 김 동 호***
Jang, In-Sik Maeng, Ju-Won Kim, Dong-Ho

요 지

불연속 갤러킨 정식화에 기초를 둔 시간적분법에 대하여 시간을 변수로 한 유한요소적 접근법을 시도하였다. 단일 형상함수와 두 형상함수 정식화에 대해 각각 선형, 이차 형상함수를 적용하여 모두 네 종류의 시간적분법을 유도하였으며, 각 방법에 대하여 시간스텝의 증가에 따른 변위와 속도의 관계를 나타내는 증폭행렬을 계산하였다. 유도된 방법들의 성능을 평가하기 위하여 부하가 갑자기 변하는 진동 문제를 해석하고 변위의 오차를 비교하였다. 네 가지의 방법에 대하여 국부 오차 추정치를 개발하였으며, 오차 추정치의 정확도를 수치예를 이용하여 평가하였다. 단일 형상함수 정식화에서 이차 형상함수를 이용한 오차 추정치가 실제 국부오차를 잘 나타내었으며 유도된 오차 추정치는 시간간격제어 기법에서 시간간격의 크기를 결정하는 척도로 이용 가능하다.

핵심용어 : 시간적분법, 불연속 갤러킨 정식화, 증폭행렬, 형상함수, 국부오차추정치

Abstract

The time finite element approach based on the discontinuous Galerkin formulation is considered for time integration. Two types of shape functions are applied for single and two field formulation, respectively; four time integration methods are derived. An amplification matrix is derived as well for each method. The performance is compared by solving a vibration problem with abrupt load change. Local error estimates are developed for the different four methods and the accuracy of the error estimates is evaluated using numerical examples. The error estimate using quadratic shape function for the single field formulation shows reasonably good performance in representing the real local error. The developed local error estimates may be utilized by tools for deciding time step size in time step control algorithm.

Keywords : *time integration, discontinuous Galerkin formulation, amplification matrix, shape function, local error estimate*

* 성희원·홍익대학교 기계설계학과, 조교수

** 홍익대학교 기계설계학과, 석사과정

*** 생산기술연구원 산업기술교육센터, 선임연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

일반적으로 구조물의 동적 상태를 나타내는 방정식은 시간과 공간이 혼합되어 나타난다. 수치적 해석을 위하여는 시간과 공간의 분리가 필요한데, 공간에 대한 준요소화(semidiscretization)를 수행한 후의 구조 동역학 문제는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$M \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (1)$$

여기서, M 은 질량행렬이며 \mathbf{F}^{ext} , \mathbf{F}^{int} 는 각각 외력과 내력을 나타내는 벡터이다. 또한, \mathbf{x} 위에 나타낸 점(dot)은 시간 t 에 대한 미분을 나타낸다. 초기치 문제는 주어진 초기조건, 초기변위 $\mathbf{x}(0)$ 와 초기속도 $\dot{\mathbf{x}}(0)$ 을 가지고 식(1)을 만족하는 변위 \mathbf{x} 를 구하는 것이다. 시간적분법(time integration)이란 위의 방정식을 시간에 따라 단계적으로 근사해를 구해 나가는 기법이다. 시간적분법에 대한 여러 가지의 기법이 연구되어 왔으며 그 대부분은 유한차분법(finite difference method)적인 특성을 가지고 있다.¹⁾

시간적분법의 중요한 요소로 시간간격을 결정해야 하는데, 일반적으로는 일정한 크기의 시간간격이 사용자에게 의하여 정해진다. 계산 중 시간간격을 자동적으로 결정하는 방법도 있는데, 그 중 하나의 방법은 오차추정에 의해 이루어진다. 일반적으로 오차는 엄밀한 값(exact value)를 얻기 어려우므로 근사값에 의한 추정을 한다. 오차를 추정하는 데는 두 가지의 방법이 이용되는데, 사전(priori)오차와 사후(posteriori)오차가 있다. 두 가지의 오차 모두 계산의 정확도를 측정하거나 적용기법을 이용하여 정확도를 향상시키는데 있어서 중요한 역할을 한다. 사전오차는 모델방정식의 해의 특성이나 요소화(discretization)방법에서의 오차 특성을 기본으로 얻어지는 것으로서, 오차나 수렴률의 정성적(qualitative)인 요소를 제공한다. 그러나, 이 방법은 근사계산에서 실제오차에 대한 많은 정보를 제공할 수 없다. 반면에, 사후오차는 계산 해의 특성을 이용하여

얻어지는 추정치로써, 여러 가지의 적용기법의 기본요소가 되거나 실제오차에 대한 보다 정확한 정보를 제공할 수 있다.

일계 미분방정식의 시간적분법에 대한 오차해석에 관한 여러 가지 연구가 진행되어 왔다. Johnson은 동적 열전달문제에서 사후오차 추정치를 제시하였으며, 이 추정치는 거의 최적치에 가까운 것이었다.²⁾ 이 개념은 비선형이나 고유치(eigenvalue)가 널리 분산되어 있는 문제까지 확장하여 시도되었다.^{3),4)} 여기서는 불연속 갤러킨(discontinuous Galerkin)형식을 사용하여 미분방정식의 내연적 일단계(implicit one-step)방법에서의 사전 오차추정치 제시하였다. 또한, 구조동역학에 대한 문제를 다룬 연구 결과로는 Hulbert 등이 일반화된 알파방법(generalized- α method)⁵⁾에 대하여, Zienkiewicz 등이 뉴마크방법(Newmark method)⁶⁾과 같은 유한차분법 형태의 시간 적분법에 대한 단순한 오차추정치를 유도하였다.

본 연구에서는 공간의 준요소화에 많이 사용되는 유한요소법을 시간에 적용하였다. 즉, 유도된 시간적분법은 시간과 공간을 동시에 유한요소법을 이용하여 해석할 수 있다는 특징이 있다. 불연속 갤러킨 방법으로 정식화 하고, 변위에 대해서만 단일 형상함수를 적용하여 근사 계산하는 방법과 변위와 속도에 각각 독립적인 두 가지 형상함수를 적용하는 방법이 사용된다. 먼저, 시간 유한요소법에서 각각의 정식화에 대하여 선형과 이차 형상함수를 이용하여 변위 관계식을 유도한다. 또한, 변위, 속도 관계식에서 유도되는 증폭행렬을 이용하여 국부 오차 추정치를 계산하는 식을 유도한다. 일반적인 형태의 수치예제를 이용하여 실제오차와 비교함으로써 오차추정 방법의 정확도를 검증하고자 한다.

2. 시간유한요소법을 이용한 적분법

2.1 단일 형상함수에 의한 정식화

문제의 근사화에서 변위에 대해서만 형상함수를 적용한 경우이다. 먼저, 식(1)에서 비선형적

인 요소를 제거하고 감소효과를 무시한 경우에 있어서 준요소화 이후의 물체의 거동은 다음의 간단한 운동방정식으로 기술이 가능하다.

$$M \ddot{\underline{u}} + K \underline{u} = F \tag{2}$$

여기서, M , K 는 각각 질량, 강성 행렬을 나타내며, \underline{u} 는 변위, $\ddot{\underline{u}}$ 는 가속도, F 는 물체에 가해지는 외력을 나타낸다. 식 (2)를 만족하는 $\underline{u} = \underline{u}(t)$ 를 구하는 초기치 문제에 필요한 초기치는 다음과 같다.

$$\underline{u}(0) = \underline{d}_0, \dot{\underline{u}}(0) = \underline{v}_0$$

여기서, \underline{d}_0 , \underline{v}_0 는 각각 초기변위, 초기속도를 나타낸다.

시간 변수를 요소화 하는데 있어서 유한요소법에 근거를 둔 불연속 갤러킨 방법을 고려하고자 한다. 이 방법에서는 어떤 시간 t_n 에서 위의 식 (2)에서 정의된 변위가 불연속적인 특성을 가지고 있으며, 이를 고려한 변수를 아래와 같이 정의할 수 있다.⁷⁾

$$d_n^+ = \lim_{s \rightarrow 0} d(t_n+s), d_n^- = \lim_{s \rightarrow 0} d(t_n-s) \\ [d_n] = d_n^+ - d_n^- \tag{3}$$

여기서, $[d_n]$ 는 시간 t_n 에서 d 의 도약(jump)을 의미한다. Fig. 1은 각 시점에서의 변위에 대한 불연속적인 상태를 나타낸다.

이제, 해석하고자 하는 운동방정식 (2)를 불연

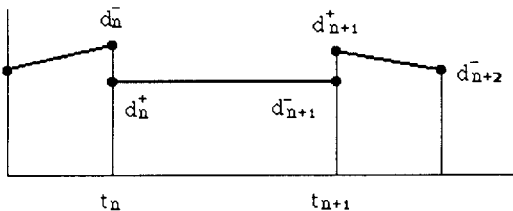


Fig. 1 Displacement history in discontinuous Galerkin method

속 갤러킨방법을 이용한 약형(weak form)으로 표시하면 다음과 같다.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{w}^T M \ddot{u} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{w}^T K u dt \\ + \{w(t_n^+)\}^T K [u(t_n)] + \{\dot{w}(t_n^+)\}^T M [\dot{u}(t_n)] \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{w}^T F dt \tag{4}$$

여기서, w 는 가중함수(weighting function)이다. 변위 u 가 시간변화 t_n 에서 t_{n+1} 사이에서 독립적으로 변화하므로 위의 형식에서는 한 스텝의 시간변화에 따른 형식을 취하였다. 이 형식의 특성이려면 시간 t_n 에서의 불연속특징을 보장하기 위하여 도약항을 도입하였다는 것을 들 수 있다.

시간적분법의 알고리즘해석의 편의상 식 (4)에서의 일반적인 다자유도계시스템을 모드해석(modal analysis)을 통하여 스칼라방정식으로 바꾸면 다음과 같이 정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{w} \ddot{u} dt + \omega^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{w} u dt \\ + \omega_n^2 \{w(t_n^+)\} [u(t_n)] + \{\dot{w}(t_n^+)\} [\dot{u}(t_n)] \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{w} F dt \tag{5}$$

여기서, ω_n 는 각 모드를 대표할 수 있는 고유진동수(natural frequency)이다.

2. 1. 1 선형 형상함수

식 (5)에서 기술된 변위의 근사적 해인 u^h 를 어떤 시간 t_n 에서의 변위의 형상함수(shape function) $N(t)$ 를 이용하여 다음과 같이 표시한다.

$$u^h(t) = N_1(t) d_n^+ + N_2(t) d_{n+1}^- \tag{6}$$

여기서, $N_1(t)$, $N_2(t)$ 로 선형 형상함수(linear shape function, L1)를 채택하였으며, d_n^+ , d_{n+1}^- 는 각각 t_n 과 t_{n+1} 에서의 변위를 나타낸다. 위 첨자 +,

는 식 (3)에서 정의하였다.

식 (6)을 식 (5)에 대입하고 적분하여 간단히 하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\omega^2}{2} & -\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{\omega^2}{2} \\ -\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\omega^2}{2} & \frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\omega^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n^+ \\ d_{n+1}^- \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t^2} & \omega^2 - \frac{1}{\Delta t^2} \\ -\frac{1}{\Delta t^2} & \frac{1}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{n-1}^+ \\ d_n^- \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 이며 시간간격 (time step)을 나타낸다. f_n, f_{n+1} 은 $n, n+1$ 스텝에서 힘의 크기를 나타내는 값이다.

이 시간적분법의 효율성을 검증하기 위해서 다음과 같은 예제를 해석하였다.

예제의 기본식과 초기치는 다음과 같다.

$$\ddot{u} + 5u = F, \quad u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 1 \quad (8)$$

$$F = \begin{cases} \sin\left(\frac{\omega_n t}{2}\right) : 0 \leq t \leq 10, \\ 20 : 10 \leq t \leq 20 \end{cases} \quad (9)$$

여기서, ω_n 은 시스템의 고유진동수이고, $u(0), \dot{u}(0)$ 는 각각 초기변위, 초기 속도이다. 또, 갑작스런 부하변화를 주기 위하여 시간이 10까지 정현함수 형태의 외력을 가하다가 시간이 10이후에는 스텝 (step) 형태의 외력을 가하였다.

Fig. 2에서는 L1을 적용한 경우의 수치해석에 의한 오차를 나타내었다. 엄밀해 (exact solution)와 비교하면, 시간이 10까지와 그 이후에서 상대적으로 수치적감쇄 (numerical damping)가 커서 시간이 갈수록 오차의 크기가 증가함을 알 수 있다.

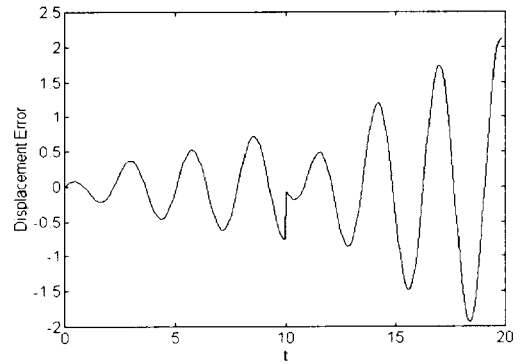


Fig. 2 Displacement error history using L1 ($\Delta t = 0.1$)

2.1.2 이차 형상함수

식 (5)에서 기술된 변위의 근사적 해로써 어떤 시간 t_n 에서의 변위를 이차 형상함수 (quadratic shape function, Q1)를 이용하여 다음과 같이 표시한다.

$$u^h(t) = N_1(t)d_n^+ + N_2(t)d_{n+\frac{1}{2}} + N_3(t)d_{n+1}^- \quad (10)$$

여기서, $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ 는 이차 형상함수 (Q1)이며, $d_n^+, d_{n+\frac{1}{2}}, d_{n+1}^-$ 는 각각 $t_n, t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}$ 의 3절점에서의 변위값을 나타낸다.

식 (10)을 식 (5)에 대입하고 적분하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{5}{\Delta t^2} + \frac{\omega^2}{2} & -\frac{4}{\Delta t^2} - \frac{2\omega^2}{3} & -\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\omega^2}{6} \\ -\frac{12}{\Delta t^2} + \frac{2\omega^2}{3} & \frac{16}{\Delta t^2} & -\frac{4}{\Delta t^2} - \frac{2\omega^2}{3} \\ \frac{7}{\Delta t^2} - \frac{\omega^2}{6} & -\frac{12}{\Delta t^2} + \frac{2\omega^2}{3} & \frac{5}{\Delta t^2} + \frac{\omega^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n^+ \\ d_{n+\frac{1}{2}} \\ d_{n+1}^- \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{\Delta t^2} & \frac{12}{\Delta t^2} & -\frac{9}{\Delta t^2} + \omega^2 \\ \frac{4}{\Delta t^2} & -\frac{16}{\Delta t^2} & \frac{12}{\Delta t^2} \\ \frac{1}{\Delta t^2} & -\frac{4}{\Delta t^2} & \frac{3}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{n-1}^+ \\ d_n^- \\ d_n^- \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+\frac{1}{2}} \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

선형 형상함수에서와 마찬가지로 효율성을 검증하기 위하여 식 (8), (9)의 예제를 해석하였다. Fig. 3은 Q1를 적용한 경우의 수치해석의 예이다. 엄밀해와 수치해를 비교해 보면 L1을 적용했을 경우보다 더 정확하게 수치오차가 현저하게 감소한 것을 알 수 있다.

2.2 두 형상함수에 의한 정식화

식 (2)의 스칼라형식에서 변위와 속도를 각각 독립적인 변수로 가정하면 강형 (strong form)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{v} + w_2^2 u &= F \\ \dot{u} - v &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

이를 변위, 속도 각각에 대한 가중함수를 w_1, w_2 로 두고 식 (12)에 적용하여 약형 (weak formulation)을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} 1. \int_{t_n}^{t_{n+1}} w_2 \dot{v} dt + w_2^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} w_2 u dt + \{w_2(t_n^+)\}[v(t_n)] \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} w_2 F dt \end{aligned} \tag{13}$$

$$2. \int_{t_n}^{t_{n+1}} w_1 \dot{u} dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} w_1 v dt + \{w_1(t_n^+)\}[u(t_n)] = 0 \tag{14}$$

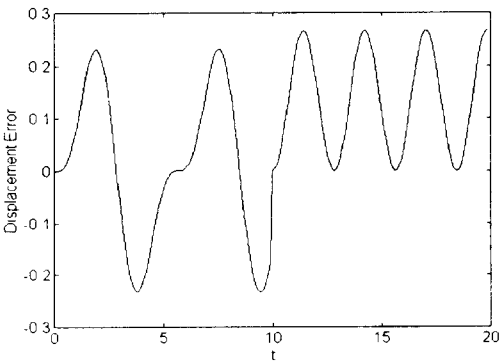


Fig. 3 Displacement error history using Q1 ($\Delta t = 0.1$)

2.2.1 선형-선형 형상함수 (L1L1)

어떤 시간 t_n 에서의 변위와 속도 의 근사값을 u^h, v^h 라고 하고 각각에 대하여 선형-선형 형상함수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$u^h(t) = N_1(t)d_n^+ + N_2(t)d_{n+1}^- \tag{15}$$

$$v^h(t) = N_1(t)v_n^+ + N_2(t)v_{n+1}^- \tag{16}$$

식 (15), (16)을 식 (13), (14)에 적용하여 간단히 하면, 변위와 속도에 관한 다음의 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t \omega^2}{6} & \frac{\Delta t \omega^2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\Delta t \omega^2}{3} & \frac{\Delta t \omega^2}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\Delta t}{6} & -\frac{\Delta t}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\Delta t}{3} & -\frac{\Delta t}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{n+1}^- \\ d_n^+ \\ v_{n+1}^- \\ v_n^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n^- \\ v_n^- \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{6} & \frac{\Delta t}{3} \\ 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^2}{3} & \frac{\Delta t^2}{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

단일형상함수에서와 마찬가지로 효율성을 검증하기 위하여 식 (8), (9)의 예제를 해석하였다. Fig. 4는 L1L1을 이용한 경우의 수치해석의 예이다. 엄밀해와 수치해를 비교해 보면 단일형상함수일 경우보다 더 정확하게 두 해가 일치하는 것을 알 수 있다.

2.2.2 이차-이차 형상함수 (Q1Q1)

위의 선형-선형 형상함수 (L1L1)에서 식 (15), (16)을 구하는 것과 같은 방법으로 이차-이차 형상함수 (Q1Q1)일 때의 행렬식은 다음과 같이 구할 수 있다.

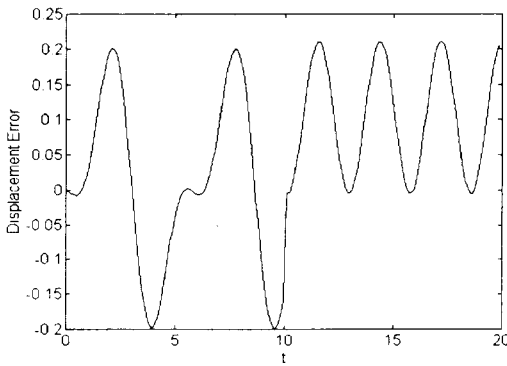


Fig. 4 Displacement error history using L1L1 ($\Delta t=0.1$)

$$u^h(t) = N_1(t)d_n^+ + N_2(t)d_{n+\frac{1}{2}} + N_3(t)d_{n+1}^- \quad (18)$$

$$v^h(t) = N_1(t)v_n^+ + N_2(t)v_{n+\frac{1}{2}} + N_3(t)v_{n+1}^- \quad (19)$$

식 (13), (14) 에 식 (18), (19) 를 적용하면 다음의 행렬식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t \omega^2}{30} & \frac{\Delta t \omega^2}{15} & \frac{2\Delta t \omega^2}{15} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{\Delta t \omega^2}{15} & \frac{8\Delta t \omega^2}{15} & \frac{\Delta t \omega^2}{15} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2\Delta t \omega^2}{15} & \frac{\Delta t \omega^2}{15} & \frac{\Delta t \omega^2}{30} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{\Delta t}{30} & -\frac{\Delta t}{15} & -\frac{2\Delta t}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{\Delta t}{15} & \frac{8\Delta t}{15} & -\frac{\Delta t}{15} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{2\Delta t}{15} & -\frac{\Delta t}{15} & \frac{\Delta t}{30} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{n+1}^- \\ d_{n+\frac{1}{2}} \\ d_n^+ \\ v_{n+1}^- \\ v_{n+\frac{1}{2}} \\ v_n^+ \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n^- \\ v_n^- \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{15} & \frac{2\Delta t}{15} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2\Delta t^2}{15} & \frac{\Delta t^2}{15} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

선형-선형 형상함수(L1L1)에서와 마찬가지로 효율성을 검증하기 위하여 식 (8), (9)의 예제를 해석하였다. Fig. 5는 Q1Q1을 이용한 경우의 수치해석의 예이다. 엄밀해와 수치해를 비교해 보면 단일 형상함수일 때와 L1L1일 경우보다 더 정확하게 서로의 값이 일치하여 계산오차가 최소인 것을 알 수 있다.

2.3 증폭행렬

일자유도계 모델 문제는 일차식과 유사한 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_{n+1} = [A]y_n + [F]L_n \quad (21)$$

여기서, $[A]$ 는 증폭행렬(amplification matrix)이고, $y_n = \begin{Bmatrix} d_n \\ v_n \end{Bmatrix}$ 으로 변위와 속도를 각 요소로 하는 벡터이며, $L_n = \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix}$ 는 하중(load)을 나타내는 벡터이다.

2.3.1 단일 형상함수에 의한 계산

선형 형상함수(L1)를 적용한 경우에 대하여 식 (7)과 속도에 대한 정의를 이용하여 증폭행렬 $[A]_{L1}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$[A]_{L1} = \frac{1}{D_1} \begin{bmatrix} 2 - \Omega^2 & 2\Delta t \\ -2\Delta t \omega^2 & 2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

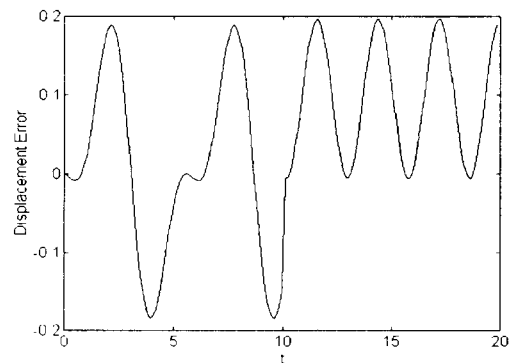


Fig. 5 Displacement error history using Q1Q1 ($\Delta t=0.1$)

여기서, $D_1 = 2 + \Omega^2$, $\Omega = \omega \Delta t$ 이다.

$[F]_{L1}$ 는 다음과 같다.

$$[F]_{L1} = \frac{1}{D_1} \begin{bmatrix} \Delta t^2 & \Delta t^2 \\ \Delta t & \Delta t \end{bmatrix} \quad (23)$$

마찬가지로 이차형상함수(Q1)를 적용하여 증폭행렬 $[A]_{Q1}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$[A]_{Q1} = \frac{1}{D_2} \begin{bmatrix} 72 - 30\Omega^2 + \Omega^4 & 3\Delta t(24 - 2\Omega^2) \\ 3\Delta t(-24\omega^2 + 2\omega^2\Omega^2) & 72 - 30\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서, $D_2 = 72 + 6\Omega^2 + \Omega^4$ 이다.

$[F]_{Q1}$ 는 다음과 같다.

$$[F]_{Q1} = \frac{1}{D_2} \begin{bmatrix} \Delta t^2(12 - \Omega^2) & \Delta t^2\Omega^2 \\ \Delta t(12 - 5\Omega^2) & 3\Delta t(4 + \Omega^2) \end{bmatrix} \quad (25)$$

2. 3. 2 두 형상함수에 의한 계산

선형-선형 형상함수(L1L1)를 적용한 경우 식(17)을 이용하여 증폭행렬 $[A]_{L1L1}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$[A]_{L1L1} = \frac{1}{D_{11}} \begin{bmatrix} 2(18 - 7\Omega^2) & 2\Delta t(18 - \Omega^2) \\ -2\Delta t\omega^2(18 - \Omega^2) & 2(18 - 7\Omega^2) \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서, $D_{11} = 36 + 4\Omega^2 + \Omega^4$ 이다.

또, $[F]_{L1L1}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$[F]_{L1L1} = \frac{1}{D_{11}} \begin{bmatrix} \Delta t^2(18 - 5\Omega^2) & 3\Delta t^2(6 - 3\Omega^2) \\ \frac{1}{3}\Delta t(18 - 43\Omega^2 + 2\Omega^4) & \frac{1}{3}\Delta t(36 - 32\Omega^2 + \Omega^4) \end{bmatrix} \quad (27)$$

이차-이차 형상함수(Q1Q1)를 이용한 식(20)의 결과를 이용하여 증폭행렬 $[A]_{Q1Q1}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$[A]_{Q1Q1} = \frac{1}{D_{22}} \begin{bmatrix} 3(1200 - 528\Omega^2 + 17\Omega^4) & 3\Delta t(1200 - 128\Omega^2 + \Omega^4) \\ -3\Delta t\omega^2(1200 - 128\Omega^2 + \Omega^4) & 3(1200 - 528\Omega^2 + 17\Omega^4) \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서, $D_{22} = 3600 + 216\Omega^2 + 9\Omega^4 + \Omega^6$ 이다.

또, $[F]_{Q1Q1}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$[F]_{Q1Q1} = \frac{1}{2D_{22}} \begin{bmatrix} \Delta t^2(2400 + 124\Omega^2 + 33\Omega^4) & \Delta t^2(1200 + 32\Omega^2 + 21\Omega^4) \\ \Delta t(1200 + 72\Omega^2 + 55\Omega^4 - 6\Omega^6) & \Delta t(2400 + 144\Omega^2 + 5\Omega^4 - 3\Omega^6) \end{bmatrix} \quad (28)$$

3. 국부오차 추정치의 계산

국부오차는 시간 t_n 에서 t_{n+1} 까지 d_n, v_n 을 각각 초기조건으로 할 때 수치해와 엄밀해(exact solution)의 차이를 의미한다. 이를 식으로 나타내면, 국부오차 e_{n+1} 는 다음과 같이 정의한다.

$$e_{n+1} = d_{n+1}^- - u_{n+1} \quad (29)$$

여기서, u_{n+1} 는 다음과 같은 국부문제의 해이다.

$$M\ddot{u} + Ku = F$$

$$u(t_n) = d_n, \dot{u}(t_n) = v_n \quad (30)$$

테일러 급수를 이용하여 u_{n+1} 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{u}_n + \frac{1}{6}\Delta t^3 u_n^{(3)}(\xi_d) \quad (31)$$

여기서, $\xi_d \in [t_n, t_{n+1}]$ 이고 $u_n^{(3)}(\xi_d) = d^3u/dt^3|_{t=\xi_d}$ 이다.

식(31)에서 Δt^2 항까지의 전개식을 \tilde{u}_{n+1} 라고 하고, u_n, \dot{u}_n 을 각각 수치해인 d_n^-, v_n^- 로 근사화하면 다음과 같이 오차추정치를 정의할 수 있다. 추정내 오차는 e_{n+1} 과 구별하여 \tilde{e}_{n+1} 로 표시하였다.

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{n+1} &= d_{n+1}^- - \tilde{u}_{n+1} \\ &= d_{n+1}^- - (d_n^- + \Delta t v_n^- + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{u}_n) \end{aligned} \quad (32)$$

식(32)에서의 가속도항을 근사값으로 나타내면 다음과 같다.

$$\ddot{u}_n \simeq \frac{v_{n+1}^- - v_n^-}{\Delta t} \quad (33)$$

정의된 국부오차 추정치를 앞에서 유도한 네 가지의 시간적분법에 각각 적용하면 d_{n+1}^- , v_{n+1}^- 의 형태에 따라 서로 상이한 오차 추정치의 계산이 가능하다.

3.1 단일 형상함수에 의한 계산

선형형상함수(L1)를 적용한 경우 d_{n+1}^- , v_{n+1}^- 에 대한 관계식(22), (23)을 식(32), (33)에 대입하여 국부오차 추정치를 계산하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (\tilde{e}_{n+1})_{L1} &= d_{n+1}^- - \tilde{u}_{n+1} \\ &= \frac{-2\Omega^2 d_n^- - \Omega^2 \Delta t v_n^- + \Delta t^2 (f_n + f_{n+1})}{2D_1} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, $D_1 = 2 + \omega^2$, $\Omega = \omega \Delta t$ 이다. 위에서 구한 오차추정치의 정확도를 알아보기 위해서 간단한 수치 예를 계산하였다. 예제의 기본식과 초기치는 식(8), (9)와 같다.

Fig. 6에서는 식(29)에서 정의된 실제오차와 추정된 오차 식(34)에 의한 계산값의 차이를 나타내었다. 추정된 오차값이 실제오차값과 10^{-3} 의 차수(order) 범위에서 거의 일치함을 보여주고 있다.

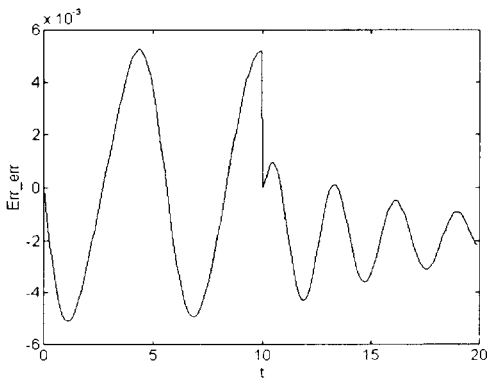


Fig. 6 Error between real error and estimated error using L1 ($\Delta t = 0.1$)

이차형상함수(Q1)를 적용한 경우 식(24), (25)를 이용하여 다음의 오차추정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} (\tilde{e}_{n+1})_{Q1} &= d_{n+1}^- - \tilde{u}_{n+1} \\ &= \frac{1}{2D_2} [-6\Omega^4 d_n^- + \Delta t \Omega^2 (12 - \Omega^2) v_n^- \\ &\quad + \Delta t^2 \{3(4 + \Omega^2) f_n - (12 - \Omega^2) f_{n+1}\}] \end{aligned} \quad (35)$$

여기서, $D_2 = 72 + 6\Omega^2 + \Omega^4$ 이다.

마찬가지로 오차추정치의 정확도를 알아보기 위해서 동일한 수치 예를 계산하였다. 그 결과가 Fig. 7에 나타나 있다. 실제오차와 추정된 오차가 10^{-3} 차수의 차이를 보이고 있다. Fig. 6의 결과와 비교해 보면 Q1에 의해 추정된 오차가 L1에 의한 오차추정치보다 정확함을 알 수 있다.

3.2 두 형상함수에 의한 계산

선형-선형 형상함수(L1L1) 적용의 경우 식(26), (27)을 이용하여 국부오차 추정치를 계산하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (\tilde{e}_{n+1})_{L1L1} &= d_{n+1}^- - \tilde{u}_{n+1} \\ &= \frac{-4\Omega^4 d_n^- + \Delta t \Omega^2 (6 - \Omega^2) v_n^-}{2D_{1,1}} \\ &\quad + \frac{\Delta t^2 \{ (90 + 13\Omega^2 - 2\Omega^4) f_n + (72 + 14\Omega^2 - \Omega^4) f_{n+1} \}}{6D_{1,1}} \end{aligned} \quad (36)$$

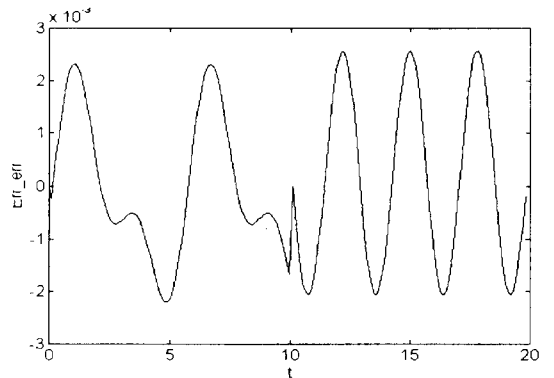


Fig. 7 Error between real error and estimated error using Q1 ($\Delta t = 0.1$)

여기서, $D_{1,1} = 36 + 4\Omega^2 + \Omega^4$ 이다.

위에서 구한 오차추정치 정확도를 알아보기 위하여 앞에서의 동일한 수치 예를 적용하였다. 그 결과가 Fig. 8에 나타나 있다. Fig. 7의 결과와 비교하면 약간 큰 값을 가지고 있음을 알 수 있다. 즉, L1L1에 의한 변위의 정확도는 Q1에 의한 정확도 보다 높게 나타났지만, 오차의 추정 에 있어서는 반대의 결과를 보였다.

이차-이차 형상함수(Q1Q1) 적용의 경우 식 (28), (29)를 이용하여 국부오차 추정치를 계산 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (\tilde{e}_{n+1})_{Q1Q1} &= d_{n+1}^- - \tilde{u}_{n+1} \\ &= \frac{-\Omega^4(300 - \Omega^2)d_n^- + \Delta t \Omega^2(600 - 54\Omega^2 - \Omega^4)v_n^-}{2D_{2,2}} \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{4D_{2,2}} \{(3600 + 176\Omega^2 + 11\Omega^4 + 12\Omega^6)f_n \\ &\quad - (80\Omega^2 + 8\Omega^4 - 3\Omega^6)f_{n+1}\} \end{aligned} \quad (37)$$

여기서, $D_{2,2} = 3600 + 216\Omega^2 + 9\Omega^4 + \Omega^6$

위에서 구한 오차추정치 정확도를 알아보기 위 해서 동일한 수치 예를 적용하여 결과를 Fig. 9에 나타내었다. 오차추정치의 오차는 Q1에 의하여 구해진 Fig. 7의 결과 보다 다소름을 알 수 있다.

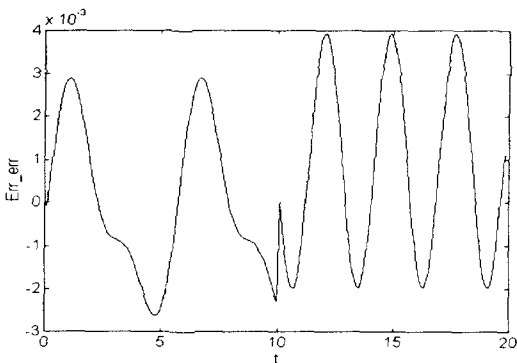


Fig. 8 Error between real error and estimated error using L1L1 ($\Delta t = 0.1$)

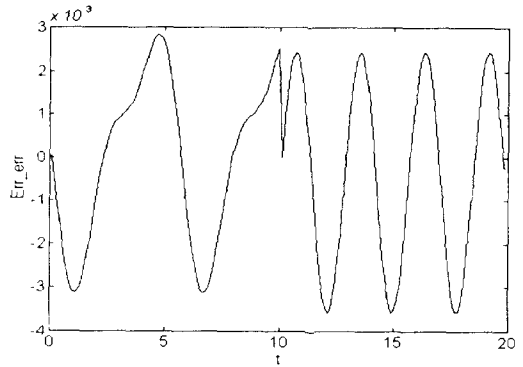


Fig. 9 Error between real error and estimated error using Q1Q1 ($\Delta t = 0.1$)

4. 결 론

구조동역학에서 준요소화된 문제를 시간에 대한 유한요소법을 적용하여 해석하였다. 불연속 갤러킨 방법을 이용하고 단일 형상함수[선형 형상함수(L1), 이차 형상함수(Q1)]에 의한 정식화와 두 형상함수[선형-선형 형상함수(L1L1), 이차-이차 형상함수(Q1Q1)]에 의한 정식화를 이용하여 네 가지의 시간적분법을 유도하였다. 공간적인 문제의 해석에 널리 이용되는 유한요소법을 시간에 적용한 알고리즘은 형상함수의 차수를 증가시키거나, 변위와 속도에 각각 독립적인 형상함수를 채택함으로써 정확도를 높일 수 있는 장점이 있다. 간단한 수치예를 통하여 확인하면 L1-Q1-L1L1-Q1Q1의 순으로 변위의 변화에 대한 정확도가 증가함을 알 수 있었다. 또한, 증폭 행렬을 유도하여 시간스텝 증가에 따른 변위와 속도의 변화 추이를 명확하게 알 수 있는 방법을 제시하였다. 시간적분법에서 결정하여야 할 중요한 요소인 시간간격을 제어하는데 사용될 국부오차를 추정하는 식을 유도하였다. 여러 형태의 시간간격 제어기법이 연구되어 왔는데, 오차 계산의 어려움 때문에 각 스텝에서의 오차를 계산하여 시간간격 결정에 사용되는 기법은 많지 않다. 따라서, 정확한 오차 추정은 시간간격 계산의 전제 조건이라 할 수 있다. 본 연구에서는, 시간적

분법에서 도출되는 변위와 속도를 이용하여 국부 오차를 근사적으로 추정하는 시도를 하였다. 먼저, 각 시간스텝에서의 변위와 속도를 초기치로 하나의 스텝에 대한 변위, 속도 변화를 계산하는 국부문제를 정의하였다. 국부오차를 정의하고 테일러 전개식을 이용하여 근사치를 도입하여 오차를 수치적으로 추정하는 관계식을 유도하였다. 근사하는 방법에 따라 위에서 유도된 네 가지의 시간적분법에서 각각 상이한 오차추정식을 유도하였다. 정확한 해를 알고 있는 수치예제를 통하여 실제 국부오차값과 추정한 오차값을 비교하였다. 실제 오차와의 차이는 모두 10^{-3} 차수(order)의 크기를 가지며 알고리즘에 따라 L1-L1L1-Q1Q1-Q1의 순으로 크게 나타났다. 이는 앞에서 본 변위의 정확도의 순서와는 상이한 결과이다. 유도된 오차 추정식은 오차값을 이용하여 시간간격을 결정하는 시간간격 제어 알고리즘 등에 사용할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Hughes, T. J. R., "The Finite Element Method : Linear Statics and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987, p.803.
2. Johnson, C. and Nie, Y. Y., "An a posteriori error estimates and automatic time step control for backward Euler discretization of a parabolic problem", Technical Report, Chalmers University of Technology, Goteberg, Sweden, 1985.
3. Orady, E. A., "An automatic step length control algorithms for stiff ODEs systems", *Computers & Structures*, Vol.43, No.5, 1992, pp.935~939.
4. Johnson, C., "Error estimates and adaptive time-step control for loss of one-step methods for stiff ordinary differential equations", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.25, No.4, 1988, pp.908~926.
5. Hulbert, G. M. and Jang, I., "Automatic time step control algorithms for structural dynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.26, 1995, pp. 155~178.
6. Zienkiewicz, O. C. and Xie. Y. M., "A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.20, 1991, pp.871~887.
7. Johnson, C., "Numerical Solution of Partial Differential Equations by The Finite Element Method", Cambridge University Press, Cambridge, 1990, p.278.
8. 장인식, "구조동역학에서의 오차 추정과 시간 간격 제어 알고리즘", 한국자동차공학회논문집, 제4권, 제4호, 1996, pp.190~200.
9. 장인식, 맹주원, "시간유한요소법을 이용한 국부오차 추정치의 계산", 대한기계학회 추계 학술대회논문집(A), 1997, pp.297~302.

(접수일자 : 1998. 8. 24)