Element-Free Galerkin Method를 이용한 균열진전해석

(Crack Propagation Analysis by Element-Free Galerkin Method)

이 상 호* 김 효 진**

1. 서 론

Element-Free Galerkin(EFG)법은 1994년 Belytschko, Lu와 Gu에 의해서 제안된 요소 개념에서 탈피한 새로운 해석기법으로 현대적 개념의 무요소법 중의 한 축을 이루는 해석 방법이다.[1)]

EFG법의 탄생 배경을 잠시 소개해 보면 다음과 같다. EFG법의 개발자인 Belytschko 교수의 연구실에서는 1980년대 중반부터 1990년대 초반까지 접촉 충돌에 의한 쉘 구조체의 국부 파괴 및 찌그러짐 현상을 보다 정확히 규명하기 위하여 비선형 동적해석에 적용 가능한 h-type 적응적 방법(h-adaptive method)의 알고리즘 개발에 주력하였는데, 그 과정에서 요소의 개념을 사용하는 기존의 해석 방법이 지니는 단점과 한계성이 자주 논의되었으며 효과적으로 적응적 기법을 활용할 수 있는 근본적인 방안 모색이 절실하였다. 1993년, 당시 박사후과정에 있으면서 이러한 문제점을 충분히 이해하고 있던 Dr. Lu는 전자공학과 박사과정에 재학중인 그의 아내로부터 근본적인 해결책의 실마리를 찾게 되는데, 그 아이디어는 다름 아닌 수치해석 분야나 컴퓨터그래픽 분야에서 널리 사용되는 공간상에 분포된 점들을 이용한 curve(surface) fitting의 개념을 잘 활용하면 요소를 사용하지 않고도 절점들만을 이용하여 수치해석이 가능할 수 있으며 그럴 경우 적응적 방법에서 요소분할로 수반되는 각종 어려움을 손쉽게 극복할 수 있지 않겠느냐 하는 것이었다. 이러한 동기부여는 곧바로 이동최소제곱근사법(Moving Least Squares Approximation)[12)]

* 정회원·연세대학교 사회환경시스템공학부, 조교수
** 연세대학교 공과대학 토목공학과, 박사과정

을 이용하여 근사변위함수를 도출하는 Diffuse Element Method(DEM)[14]에 대한 관심으로 이어졌고 결국 정확한 수치해를 보장해 줄 수 없어서 큰 관심을 끌지 못하던 DEM은 Belytschko 등의 노력에 의해 높은 정도를 지닌 근사변위함수를 도출할 수 있는 방법으로 탈바꿈하게 된 것이다. 1994년 소개된 EFG법에서는 DEM에서 사용하지 않는 형상함수의 도함수를 사용하여 보다 매끄러운(smoothed) 해석값을 보장할 수 있게 되었고, 수치적분과정에서 고차의 quadrature rule을 사용하여 정확도를 향상시켰으며, DEM의 단점으로 지목되던 경계영역에서의 해의 부정확성을 개선하기 위해 Lagrange multiplier방법을 사용하여 필수경계조건을 처리함으로써 고체역학 문제의 해석에 있어 절점과 경계조건만을 이용하여 안정적이며 정도가 높은 해석결과를 얻을 수 있었다. 또한 균열해석 문제에의 적용을 통해 EFG법이 파괴역학 분야에 획기적으로 공헌할 수 있음을 암시하였다.

Belytschko 등을 중심으로한 EFG법의 초기 연구에서는 효과적으로 필수경계조건을 처리할 수 있는 방법과 다양한 형태의 가중함수의 사용과 영향영역의 크기변화에 따른 해의 정도 비교와 수렴율에 관한 연구[1),11)], plate와 shell 구조에의 적용[8),9)], 균열해석에의 적용 및 균열선단 주변의 절점배치 여부에 따른 해의 정도 비교[2)], 정적 및 동적 균열전파 문제에서의 효과적인 모델링 방안과 균열전파 해석[4)], 계산시간의 절감을 위한 효율적인 프로그래밍 방법[11)] 등에 관한 연구 등이 진행되었다.

EFG법은 동일한 수의 자유도를 사용하는 경우 유한요소법보다 높은 해의 수렴율(convergence rate)을 나타낼 수도 있으며, 비압축성 재료나 전단문제에 적용시 locking 현상을 극복할 수 있는 등의 장점이 있는 것으로 보고되었다.[1),11)] 그러나 EFG법의 형상함수의 구성이나 몇몇 예제를 통해 보고된 장점들은 경험적으로 증명된 것이기 때문에 초기에는 수학적인 건전성이 부족하였다. 그 후 Babuska와 Melenk[13)], Durate와 Oden[6)] 등에 의해 EFG법에서 사용하는 함수의 근사화 방법이 단위분할(partition of unity)기법의 일환임이 입증되어 그 수식화과정이 수학적 기반위에 서게 되었고, 다양한 공학적 문제에의 적용을 통해 수치적 기법의 노하우가 축적됨에 따라 EFG법은 4년여 남짓한 개발역사에 비해 급속히 빠른 속도로 전산역학분야에의 공헌도를 넓혀가고 있다. EFG법은 특히 개발초기부터 균열문제의 해석에 우수한 적용성이 기대되었고, 응용분야도 주로 정적, 동적 균열전파문제에 적용되면서, 최근 들어 3차원 균열문제에까지 그 적용성을 확장해 나가고 있다.

본 기사에서는 이렇듯 새로운 해석기법으로 그 자리를 공고히 해가고 있는 EFG법의 함수 근사화 방법 및 필수경계조건의 처리 그리고 EFG법의 정식화 과정에서 유의해야 할 사항 등을 간단히 언급한 후, 균열해석 분야에의 응용을 소개하고, 끝으로 EFG를 이용한 균열해석에서 사용하는 주요한 기법들의 세부내용에 대해 초점을 맞춰 설명하기로 한다.

2. EFG법에서의 함수 근사화와 정식화 과정의 고려사항

2.1 EFG의 형상함수와 변위함수

EFG는 형상함수를 유도하기 위해서 이동최소제곱근사법(Moving Least Square Approximation)을 이용한다. 이동최소제곱근사법은 공간상에 분포된 절점들을 이용하여 curve(surface) fitting을 하는 방법중의 하나로 Lancaster와 Salkauskas[12)]에 의해 제안되었으며, Nayroles 등[14)]은 이 방법을 활용하여 구조역학분야의 문제 해결에 적용한 바 있다. 그 후 EFG법이 개발되며 정확성을 보장하는 정형화된 방법론이 정립됨에 따라 이동최소제곱근사법은 무요소법에서 근사변위함수를 도출하는 하나의 방법으로 자리잡게 되었다.

이동최소제곱근사법에 의한 근사변위함수 u_i^h는 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
u_i^h(\boldsymbol{x}) &= \sum_{I}^{m_{sn}}\sum_{J}^{m} p_J(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))_{JI}u_{Ii} \\
&= \sum_{I=1}^{n_{sn}} \phi_I(\boldsymbol{x})u_{Ii} \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega \qquad (1)
\end{aligned}
$$

따라서 기준점 $\boldsymbol{x}$를 중심으로 영향영역내에 위치하는 임의의 I번째 절점의 형상함수 $\phi_I(\boldsymbol{x})$는 결국 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_I(\boldsymbol{x}) = \sum_J^m p_J(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))_{JI} \tag{2}$$

여기서,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_{sn}} w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I)\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = [w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1), \cdots, w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{n_{sn}})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_{n_{sn}})] \tag{4}$$

이다. 각 공간성분 i에 대한 형상함수의 도함수는 다음과 같이 계산할 수 있으며,

$$\phi_{I,i} = \sum_J^m [p_{J,i}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})_{JI} + p_J (\boldsymbol{A}^{-1}_{,i}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_{,i})_{JI}] \tag{5}$$

여기서 $\boldsymbol{A}_{,i}$의 역행렬은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\boldsymbol{A}^{-1}_{,i} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}_{,i}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{6}$$

식(2)와 식(5)에서 알 수 있듯이 형상함수 $\phi_I(\boldsymbol{x})$와 형상함수의 미분값을 구하기 위해서는 행렬 $\boldsymbol{A}$의 역행렬을 구해야만 한다. 차원이 높아짐에 따라 $\boldsymbol{A}$의 역행렬 계산은 비교적 많은 계산시간을 요하게 된다. 따라서 서로 직교(orthogonal)하는 다항식을 사용하여 식(5)의 계산을 보다 효율적으로 수행하려는 연구도 시도되었다.[11]

2.2 정식화과정의 고려사항

미소변형 조건에서 경계 Γ로 둘러싸인 영역 Ω을 가지는 2차원 문제의 평형조건식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{7}$$

유한요소법의 경우에는 식(7)을 약형식(weak form)으로 표현한 뒤 이를 이산화하여 선형 계 방정식을 유도해낸다. EFG법의 경우도 이와 같은 Galerkin 방법에 따라 선형 방정식을 유도해 내지만 필수경계조건의 처리를 위해 추가의 구속조건식이 첨가되기 때문에 정식화과정을 통한 최종 계방정식의 구성은 다른 양상을 띄게 된다. EFG법에서 필수경계조건의 처리를 위해 사용하는 대표적인 방법들과 그 특징을 살펴보면 다음과 같다.

2.2.1 Lagrange multiplier 방법[1),2)]

Lagrange multiplier 방법은 기본적인 변분형식(variational form)이 어떤 구속조건을 만족하도록 하기 위하여 Lagrange multiplier λ를 포함하는 구속조건식을 변분형식에 추가시켜 줌으로써 구속조건을 강제적으로 만족시키는 방법이다. 초기의 EFG 연구에서는 Lagrange multiplier 방법을 적용하여 필수경계조건을 처리하였다. 이 방법을 적용한 경우 변분형식의 필수경계에 대한 항은 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$\delta W_u(\boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma_u} \delta\lambda \cdot (\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{u} \cdot \lambda d\Gamma \tag{8}$$

Lagrange multiplier 방법을 사용할 경우 그 적용은 매우 간단하다. 그러나 강성도 행렬은 더 이상 정치(positive definite)가 아니고, 구속조건의 수 만큼 미지수가 증가하게 되며, 띠폭(banded width)을 가지지 않아 계산량의 현저한 증가를 초래하게 되는 단점이 있다.

2.2.2 수정변분원리[11)]

수정변분원리(Modified Variational Principle)는 Lagrange multiplier 방법과 유사한 방법으로 고체역학이나 구조역학 문제에서 물리적으로 필수경계영역에서의 표면력(즉, 반력)을 의미하는 Lagrange multiplier λ대신에 직접 표면력 $\boldsymbol{t}$를 대입하여 다음과 같이 식을 구성한다.

$$\delta W_u(\boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma \tag{9}$$

수정변분원리를 사용할 때에는 강성도 행렬 구성의 전반에 걸친 수정이 요구되나 Lagrange multiplier 방법과는 달리 강성도 행렬의 크기가 증가하지 않으므로 전자에 비해 계산시간을 줄일 수 있는 장점이 있다. 그러나 이 방법은 수식화 과정이 복잡하고 해의 정도가 Lagrange multiplier 방법에 비해 떨어지는 단점이 있다.

2. 2. 3 Penalty 방법[2)]

Penalty 방법의 사용시 추가 고려 항은 다음과 같다.

$$\delta uW(u) = \frac{\beta}{2}\int_{\Gamma_u} \delta t \cdot \|u - \bar{u}\|^2 d\Gamma \qquad (10)$$

여기서, β는 구속조건을 만족시키기 위한 penalty parameter이다.

Penalty 방법은 Lagrange multiplier 방법과는 달리 전체 강성도 행렬이 정치행렬이고 행렬의 크기가 바뀌지 않는 장점이 있다. 그러나 이 방법은 β값의 결정여부에 따라 해의 정도가 영향을 받을 수 있다는 단점이 있다.

2. 2. 4 FEM과의 조합 방법[3)]

필수경계조건을 만족시키도록 하는 또 다른 방법의 하나는 기존의 해석기법과 EFG를 조합하는 방법이다. Belytschko 등은 필수경계영역에는 유한요소를 배치시키고 그 내부에서는 EFG를 사용하는 조합방법을 제안하였다.[2)] 조합방법 사용시 유한요소를 사용하는 영역과 EFG절점을 사용하는 영역의 접속부인 천이 영역에서는 Ramp 함수를 사용한 혼합된 형상함수 $N_I^c(x)$를 사용한다. 그림 1은 EFG-FEM의 조합에 따른 영역 구분을 도시하고 있다. 천이 영역에서의 형상함수 $N_I^c(x)$는 다음과 같다.

$$N_I^c(x) = \begin{cases} [1-R(x)]N_I(\xi(x)) + R(x)\phi_I(x) \\ R(x)\phi_I(x) \end{cases} \qquad (11)$$

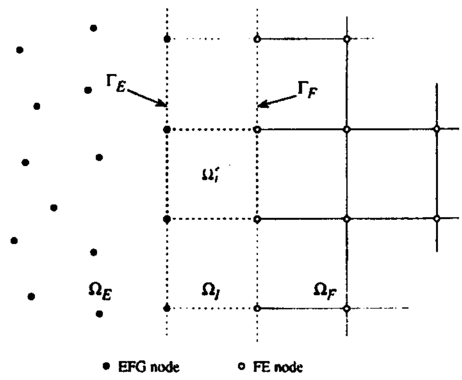

그림 1 EFG-FEM의 천이 영역

여기서, $N_I(\xi(x))$는 유한요소법의 형상함수이고, $\phi_I(x)$는 EFG의 형상함수를 의미하며, 식 (11)의 첫 번째 식은 영향영역의 기준점 x_I가 접속요소의 영역(Ω_I)내에 포함될 경우의 형상함수를 나타낸 것이며, 두 번째 식은 기준점 x_I가 접속요소의 영역(Ω_I)의 외부에 위치할 경우의 형상함수를 나타낸 것이다. 그리고 $R(x)$는 Ramp함수로서 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

$$R(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Gamma_E, \\ 0 & x \in \Gamma_F, \end{cases} \qquad (12)$$

EFG-FEM 조합방법은 EFG에서 만족시키기 어려웠던 필수경계조건을 유한요소를 사용하여 자동으로 만족시키면서 필요한 부위에서만 EFG를 사용할 수 있어서 EFG만을 사용하는 경우 보다 전산처리시간을 훨씬 단축할 수 있다는 장점이 있으나 해의 수렴율이 EFG의 지배를 받지 않고 유한요소법의 지배를 받아 더 작아지는 단점이 있다.

필수경계조건을 처리하는 방법이외에도 Galerkin 방법에 따라 정식화해 가는 과정에서 유한요소법을 정식화할 때와는 다르게 고려해야하는 점이 있다. 그것은 자연경계조건을 만족시키는 것이다. 유한요소법에서는 작용하중을 자연경계조건상의 절점들에만 작용시키지만 EFG의 경우, 아니 무요소법의 경우 영향영역내의 절점들의 합

으로 형상함수를 형성하기 때문에 하중값이 해석 대상 내부의 절점들에도 영향을 미친다는 것을 유념해야한다.

3. EFG법의 균열문제에의 응용

요소를 사용하지 않고, 임의로 배치된 절점들과 경계조건만을 이용하여 수치계산을 수행하는 EFG는 개발초기부터 주로 균열해석 문제에 그 응용의 초점을 맞춰왔다. EFG의 초기 연구에서는 Mode I의 응력확대계수 K값을 구하는데 그쳤지만 그 후에 정적 균열전파해석, 동적 균열전파해석, 더 나아가서는 3차원 균열해석에까지 그 적용성을 확대해 나가고 있다. 본 장에서는 그 대표적인 적용 예를 살펴보기로 한다.

그림 2(a)는 두 개의 원공을 지닌 평판에 서로 다른 방향으로 초기 균열이 존재하는 문제를 나타내며 그림 2(b)는 EFG에 의한 해석결과를 보여준다. 이 문제에서 균열은 일정한 크기로 증가한다고 가정한 뒤 균열의 진전을 해석하였는데 Newman[15]이 제시한 실험결과와 매우 유사한 해석결과를 얻을 수 있었다. 그 후 EFG법은 기존의 해석방법으로는 결과를 얻기가 용이하지 않은 다양한 균열진전문제를 정확히 해석할 수 있는 가장 효율적인 기법으로 부상하게 되었다.

그러나 정적 균열진전해석은 균열의 증분을 임의로 정한 뒤 균열진전각에 따라 다시 재해석을 수행하는 방법이기 때문에 균열의 진전방향을 예측할 수 없는 경우의 문제를 다루는데 한계가 있었으므로 Belytscko와 Tabbara[4]는 충격하중에 의해 초기균열이 임의의 방향으로 진전해 나가는 동적 균열전파 문제를 해석하였다. 그림 3은 충격하중에 의한 동적 균열전파 문제의 한 예로서 해석대상 모형과 해석결과를 보여주고 있다.

최근에는 3차원 균열진전 문제에의 적용에 관한 연구가 활발히 진행중인데[10] 3차원 균열문제는 2차원 문제와 비교할 때 계산시간이 엄청나게 증가하므로 효과적으로 계산시간을 단축시킬 수 있는 기법의 개발이 필요하다. 또한 균열진전에 따라 지속적으로 변하는 해석대상체내의 기하학적 형상변화를 효과적으로 표현할 수 있는 방법이 정립되어야 한다. 그림 4 는 동적 인장하중을 받는 3차원 평판의 내부에서 동전모양의 균열이 전파되는 과정을 해석한 결과이다. 이 모델의 해석에는 유한요소법과의 조합방법을 통해 hexahedral 요소 1350개와 EFG 절점 1536개가 사용되었으며 성장해 가는 균열면은 삼각형면을 사용하여 규정하였다.

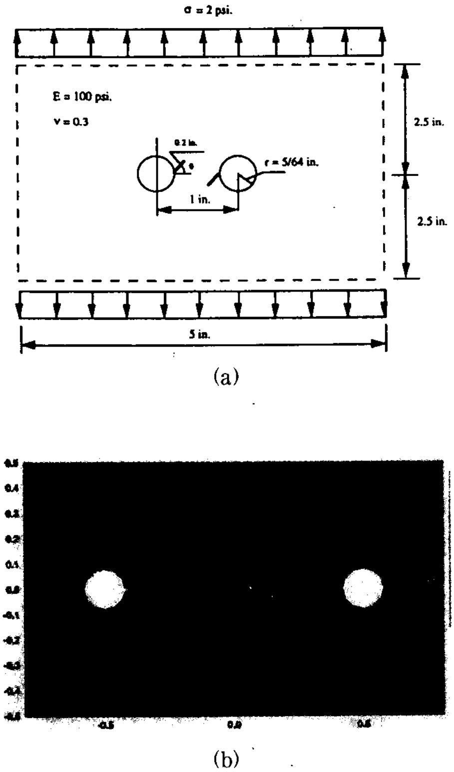

그림 2 정적 균열성장문제 해석 결과

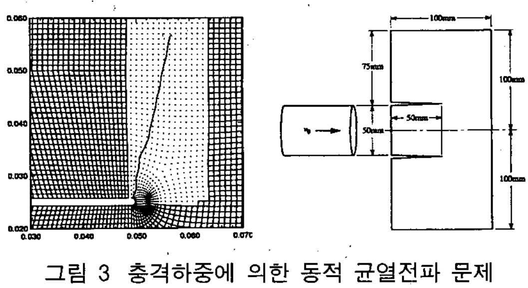

그림 3 충격하중에 의한 동적 균열전파 문제

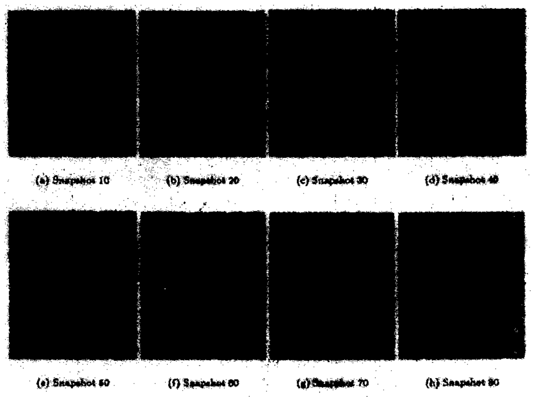

그림 4 내부에 동전모양의 균열을 지닌 solid의 균열 진전과정 해석

4. 균열해석을 위한 수치적 기법

본 장에서는 균열문제의 해석시에 요구되는 실제적인 프로그램밍 테크닉 중에서 중요한 몇가지 사항들에 대해 기술하고자 한다.

4.1 균열의 모형화와 균열성장에 따른 절점배치의 수정

균열은 연속적인 선분들을 사용하여 모형화 하는데 이때 선분들의 각 끝점에는 매우 가까운 거리로 배치된 복절점을 위치시키고 상호 균열의 존재에 의해 분리되어 서로 균열의 반대편에 위치한 것으로 취급함으로써 균열의 불연속성을 고려한다. 균열선단(crack tip)은 1개의 절점을 사용하여 나타내며 균열선상에 위치한 절점들에는 traction free의 조건을 부여한다. 균열이 성장하여 균열선단이 이동하게 되면 새로운 균열선단의 위치를 결정하고 전 단계의 균열선단절점과 새로운 균열선단절점을 선분으로 연결한 후 전 단계 균열선단절점을 복절점화 함으로써 한 step의 균열성장과정을 모형화 할 수 있다.

초기 연구단계의 균열해석에서는 균열선단 주변의 응력집중현상을 잘 표현하고 해의 정확도를 향상시키기 위해 균열선단주변에 일 단의 절점군을 추가하여 자유도를 증가시키는 방법을 사용하였다. 즉, 균열선단을 중심으로 가상의 원을 형성하여 여러 개의 동심원에 대해 반경을 늘려가며 절점들을 그 원상에 배치한 별모양의 절점군을 사용하였다. 이러한 절점군은 균열의 선단이 이동함에 따라 좌표변환을 통해 같이 이동하게 되며, 이때 절점군의 배치 영역내에 포함되는 초기에 배치된 절점들은 일시적으로 제거하였다가 균열선단이 이동하여 별모양 절점군의 영역권에서 벗어나게 되면 다시 복원된다. 이와 같은 과정은 유한요소법에서 사용해야 하는 fine mesh의 재구성에 비하면 그 작업이 용이하고 효율성이 높으며 자동화가 가능하다. 그림 5는 이와 같은 절점배치의 한 예를 보여준다. 그러나 후에는 균열선단 주변의 자유도를 증가시키는 대신에 근사함수의 확장방법을 사용하여 해의 정확도를 높이는 방법을 사용하였다.[7] 이에 관해서는 뒤에서 더 자세히 언급하기로 한다.

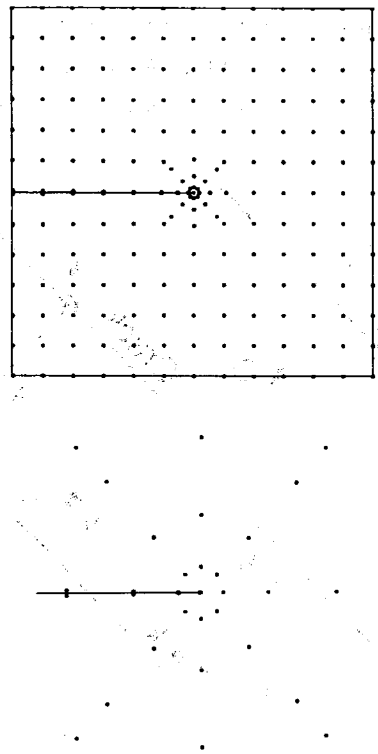

그림 5 균열해석을 위한 절점배치

4.2 균열을 인식과 위치판단

균열에 의한 불연속성을 고려하기 위해서는 대상절점들 사이에 균열이 존재하는지의 여부를 점검할 필요가 있다. 이러한 점검과정은 균열을 나타내는 선분과 고려대상의 절점들을 연결한 선분의 교차여부를 따져 판정하면 효과적이다. 이 때 선분의 기울기를 이용하는데 기울기의 상대적인 차이로 선분들의 교차여부 뿐만이 아니라 평행한지 또는 균열의 앞에 있는지 뒤에 있는지를 모두 파악할 수 있다.

그림 6은 균열과 절점간의 선분이 교차하는지의 여부를 점검하기 위해 고려해야 하는 기본적인 4가지 경우를 나타내고 있는데 (a)는 절점간의 선분이 균열을 나타내는 선분과 교차하는 경우이며, (b)는 한 절점이 다른 선(균열선) 위에 놓여있는 경우이고, (c)는 두 점이 균열의 한 쪽 면에 있고 한 선분 (x_I-x)은 수직인 경우이며, (d)는 절점이 서로 균열의 반대편에 있지만 균열과 교차하지 않는 경우이다.

그림 6(a)와 같이 두 절점 사이에 균열이 존재하는 경우 균열을 인식하는 과정은 다음과 같이 두가지의 기본 단계로 이루어 진다. 첫 번째 단계는 두 개의 절점 x_I와 x가 서로 균열선분(c_1-c_2)의 반대편에 있는지를 판정하는 것이고, 두 번째 단계는 균열선분의 두 끝점 c_1과 c_2가 서로 두 절점이 이루는 선분(x_I-x)의 반대편에 있는지를 판정하는 것이다. 이러한 두 가지의 조건을 모두 만족시킨다면, 두 절점 x_I와 x사이에는 균열이 존재하고 있는 것으로 판정할 수 있다. 위와 같은 알고리즘으로 균열을 인식하는 경우 다른 기하학적인 알고리즘과 마찬가지로 고려해야 되는 예외적인 상황이 발생되는데 그 중 한 가지는 그림 6(c)와 같이 선분 중의 하나가 수직으로 위치하여 기울기가 무한대가 되는 경우이다. 이런 경우에는 위치판정을 위한 기울기를 계산하는 과정에서 분모가 0이 되지 않도록 수정해 주어야 한다. 고려해야 할 또 다른 경우는 그림 6(b)와 같은 특수한 상황으로 대상절점들중 하나가 균열 선분위에 위치해 있는 경우이다. 이 경우의 또 다른 형태는 절점이 균열선분상에 놓이지는 않았지만 균열선상의 앞쪽이나 뒤쪽에 있는 경우이다. 이러한 모든 경우의 판별식은 수치적으로 쉽게 세울 수 있다. 이와 같이 수치적으로 균열과 절점간의 위치적 관계를 정확히 판정하는 기술은 무요소법을 이용하여 균열을 해석하는데 있어 균열에 의한 불연속성을 반영하기 위한 기초가 된다.

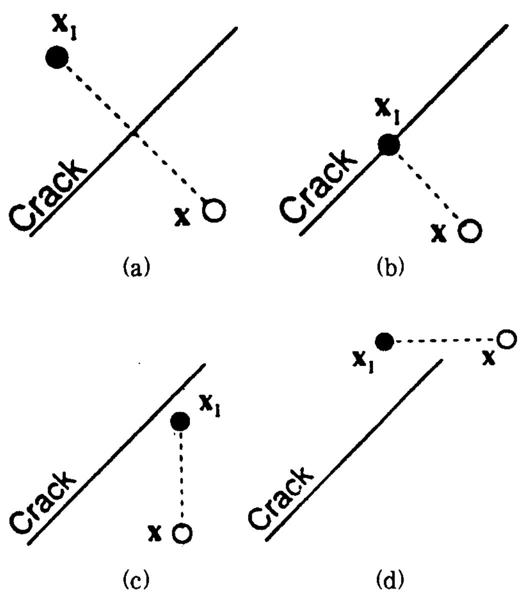

그림 6 선분 교차여부를 결정하기 위한 4가지 경우

4.3 균열을 포함하는 영향영역에서 형상함수의 연속성 유지를 위한 절점거리의 수정[16]

EFG의 초기연구에서는 균열이 존재하는 영향영역을 단순히 기준절점에서 파악할 수 있는 가시권과 균열에 의해 가려지는 비가시권으로 나누어 비가시권을 완전히 무시하는 방법을 사용하였

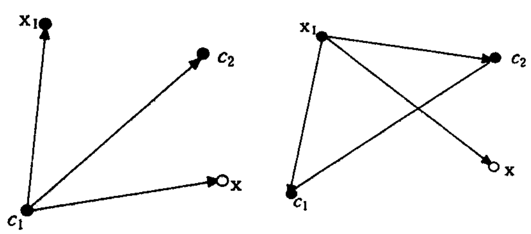

그림 7 두 선분의 교차여부를 결정하는 알고리즘

는데 이 방법은 비가시권의 절취부(균열선단)에서 형상함수 뿐만 아니라 가중함수까지 불연속하게 만드는 단점이 있었다. 이러한 단점은 해의 정도에 큰 영향을 미치게 되므로 후에 균열을 포함하는 영향영역에서 EFG 형상함수가 연속성을 유지할 수 있는 방안이 개발되었다. 결론적으로 말하자면 어느 기준점을 중심으로 영향영역을 설정할 때 그 영향영역내에 균열이 포함되게 되면 실질적인 유효영향영역과 그에 따른 형상함수는 다음과 같은 방법을 사용하여 구할 수 있다. ① 영향영역내에 균열이 존재하여 영향영역이 균열에 의해 완전히 절단되는 경우에는 절단부를 제외한 나머지 유효영향영역내의 절점들만을 이용하여 형상함수를 도출한다. ② 만약 영향영역내에 균열선단이 존재하는 경우에는 영향영역의 기준점과 균열반대편에 위치하는 대상절점사이의 거리를 실제보다 서로 더 멀리 떨어져 있는 것으로 생각하여 절점거리를 증가시켜줌으로써 균열 반대편에 위치하는 절점의 영향을 덜 받도록 조절하며 가중함수나 형상함수가 일치된 연속성을 유지할 수 있도록하며 계산한다.

절점거리를 수정하여 연속한 형상함수를 얻을 수 있는 방법들을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 먼저 첫 번째는 빛의 회절이론을 이용한 개념으로 균열을 빛이 통과하는 것을 막는 장애물이라고 생각하고 빛이 회절하는 원리를 적용하여 영향영역에 연속성을 부여하는 방법이다. 즉, 빛이 직진하는 동시에 가로막힌 장애물의 뒤로 돌아가는 성질을 가진 것에 착안하여 균열 반대편에 있는 절점의 영향도 어느정도 고려하도록 실제의 절점거리를 수정해 주는 것이다. 두 번째로는 투과이론의 개념을 이용할 수 있는데 균열선단에 투명한 정도가 변할 수 있는 투과성을 부여하여 균열선단에서는 완전히 투명하고 균열선단에서 균열의 뒤쪽으로 어느정도 가게 되면 완전히 불투명하다고 생각하는 것이다. 이러한 방법들을 사용하면 형상함수가 그림 8처럼 균열선단에 가까이 가면서 갑자기 잘라지지 않고 균열선단의 뒤로 가면서 부드럽게 0으로 수렴하며 영향력을 미치는 정도가 점점 약해지게 된다. 그림 9는 절점거리의 수정에 의해 얻어진 연속한 형상함수의 예를 나타낸다.

4.4 EFG 근사함수의 확장방법

특이성을 띄는 균열선단 주변에서의 보다 더 정확한 수치해를 얻기 위하여 EFG의 근사함수를 확장하는 방법이 개발되었다.[7] 이 방법은 균열선단의 특이성을 표현할 수 있는 singular 함수와 같은 항을 도입하여 기본 다항식이나 근사변위함수를 확장하는 방법으로 기존의 절점군을 사용하여 자유도를 높이는 방법에 비해 월등한 정확성을 유지할 수 있다. EFG 근사함수를 확장

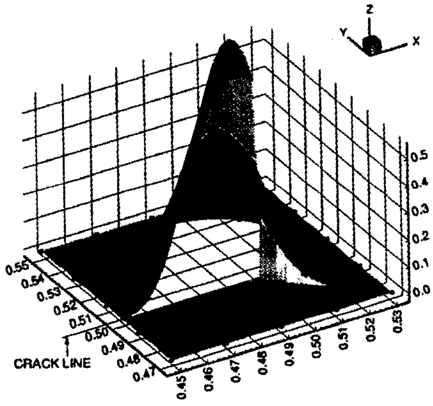

그림 8 가시한계이론에 의한 균열선단주변 절점의 형상함수

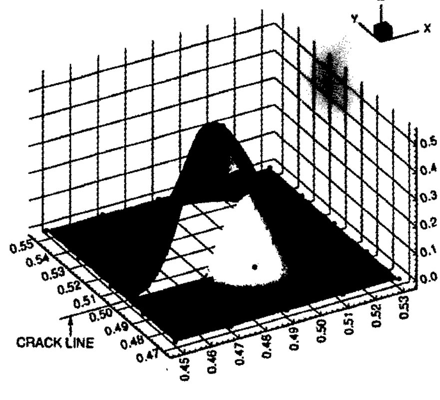

그림 9 균열선단 주변의 절점의 연속한 형상함수

하는 방법에는 trial function에 확장항을 추가시켜 근사함수를 구성하는 외적인 확장방법과 EFG 기본식에 확장함수를 포함시키는 내적인 확장방법이 있다.

외적인 확장방법은 여러가지가 있으나 그 중 이동최소제곱근사법을 이용한 방법과 단위분할을 이용한 방법을 소개하고자 한다. 이동최소제곱근사법에 의한 근사변위함수의 확장은 이동최소제곱근사식에 해와 밀접한 관계가 있는 새로운 함수를 더하여 수행한다. 한 예로 선형탄성파괴역학에서는 균열선단주변의 점근성을 나타내는 함수를 추가할 수 있다. 한편 단위분할법을 사용하여 근사함수를 유도하는 방법은 기존의 EFG 근사변위함수식에 외적으로 고차의 다항식이나 파괴역학에서 사용하는 점근적인 균열선단의 특성을 반영할 수 있는 확장함수를 추가시켜 근사함수를 구성한다. 이와같은 외적인 확장에서는 확장함수를 단위분할에 의거하여 함수의 곱을 통해 구성한 후 이 값을 본래의 근사변위함수식에 더하여 구성하기 때문에 근사변위함수를 확장할 때 다양한 방법으로 유연하게 구성할 수 있다는 장점이 있다.

내적인 확장방법은 EFG의 기본 다항식에 처음부터 확장하려는 항을 추가하여 근사변위함수를 유도해 내는 방법으로 다항식에 균열선단의 특이성을 반영할 수 있는 모든 항을 추가하는 전체적인 확장방법과 단지 방사상 특성을 나타내는 항만을 추가하는 부분적인 확장방법이 있다. 전체적인 확장방법에서는 다음과 같이 삼각함수와 $\sqrt{r}$ 항을 추가한 다항식을 사용한다.

$$\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}) = \left[1,\ x,\ y,\ \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\right.$$
$$\left.\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right] \qquad (13)$$

내적인 확장방법은 외적인 확장방법과 달리 추가의 미지수가 필요없으나 기본 다항식의 크기가 증가되며 또한 모멘트 행렬, 역행렬을 구하는데 많은 계산이 필요하게 되고 정규화 조건을 만족시키기 위해서 영향영역의 크기가 커져야 하는 단점이 있다. 또한, 확장된 형상함수에 선형의 형상함수를 조합할 때에는 해의 정확성에 영향을 주게 되므로 시스템 행렬을 Gram-Schmidt의 직교방법에 의해 대각화하는 과정이 필요하다. 한편 부분적인 확장법은 $\sqrt{r}$과 같은 방사상의 항만을 더해 다음과 같이 다항식을 부분적으로 확장하는 방법이다.

$$\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}) = [1,\ x,\ y,\ \sqrt{r}] \qquad (14)$$

이 방법은 균열선단주위의 균열각의 변화가 완만한 경우에 알맞고 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$의 역행렬을 구하는 과정이 전체적인 확장방법보다 더 간단하다. 그러나 이와 같은 부분적인 확장법을 사용할 경우에는 균열선단에서의 응력값이 방사형으로 특이성을 보이는 단점이 있다. 따라서 부분적인 확장법은 일정 수준의 정확도에 빠른 계산이 요구될 때에 적당하고, 전체적인 확장법은 높은 정확도를 요구할 때에 적당하다.

4.5 확장이론과 선형이론의 조합에 의한 근사변위함수 구성

일반적인 문제의 경우 넓은 영역을 대상으로 5.4절에서 설명한 확장방법을 사용하는 것은 불필요한 계산량의 증가를 초래하므로 확장된 근사함수와 선형 근사함수를 조합하여 해석의 효율을 높일 수 있다. 보통 특이성이 발생하는 균열선단을 중심으로 균열크기를 고려하여 적당한 크기의 영역에는 확장함수를 도입하고 일정거리 밖은 선형함수를 사용하는 방법을 사용한다. 확장된 근사함수와 선형 근사함수를 조합하는 방법에는 두 가지가 있는데 그 첫번째 방법은 근사함수들을 조합할 때 선형적인 결합방법을 사용하여 FEM-EFG 조합 때와 마찬가지로 Rmap 함수를 이용하여 두 가지 함수가 공존할 수 있는 천이영역(transition)을 만들어서 근사함수식을 유도해내는 방법이다. 일반적인 ramp 함수는 확장 경계면에서는 1이고 선형경계면에서는 0의 값을 갖는다. 또 한 가지 방법은 균열선단에서 떨어진 곳을 단순하게 확장된 근사함수에서 선형 근사함

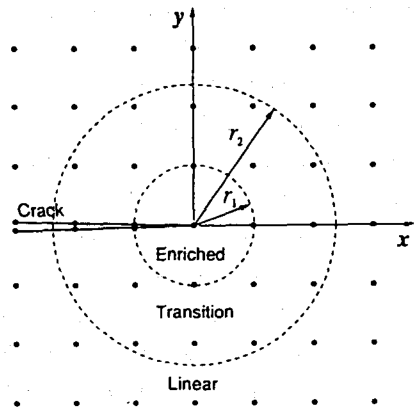

그림 10 선형이론과 확장이론의 근사함수의 조합도

수로 바꾸는 방법인데 근사함수가 변화되는 거리는 응력확대계수가 지배하는 영역밖으로 설정되어야 한다.

5. 결론과 전망

EFG법은 날로 복잡해져가는 수치해석문제에서 유한요소법이 지니는 한계성을 극복해보고자 하는 방법의 일환으로 개발된 이후 지금까지 급속히 발전되어 오고 있다. 기존의 유한요소법과 비교해 보면 정해진 규칙에 의해 요소를 구성할 필요가 없고, locking문제를 극복할 수 있으며, 임의의 절점배치에서도 우수한 해석결과를 나타내고, 해의 수렴률이 유한요소법에 비해 높으며, 응력이나 변형률 등의 해석결과 값들이 유한요소법과는 달리 영역전체에서 매끄럽게 형성되기 때문에 후처리 과정에서 따로 이를 다루지 않아도 된다는 등의 장점이 있다. 그에 반해서 추가로 필수경계조건을 처리하는 과정이 필요하며 이론적 기반이 유한요소법에 비해 매우 취약하며, 기존의 수치해석방법에 비해 역사가 짧기 때문에 다양한 적용방법이 아직 개발되지 않았다는 등의 단점이 있다.

본 기사에서 소개한 EFG법이 보다 발전하기 위해서는 그 이론적 기반이 더욱 튼튼히 확보되고 더욱 다양한 분야의 연구자들에 의해 각 분야에서 적용성 및 효율성을 검증받는 것이 중요하리라 본다. 아무튼 4년여의 짧은 기간동안에 몇몇 응용분야를 포함하여 3차원 균열진전해석에까지 그 적용범위를 확대한 EFG법은 관련 연구자들의 이 방법에 대한 매력과 관심에 비례하여 빠르게 발전이 진행되고 있으며, 21세기에는 수치해석분야를 리드하는 하나의 해석방법으로 그 자리를 공고히 할 것이라고 예상해 본다.

참 고 문 헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., (1994), "Element-free Galerkin Methods", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp.229~256.
2. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., (1994), "Fracture and Crack Growth by Element Free Galerkin Methods", *Modeling Simul. Mater. Sci. Eng.*, Vol. 2, pp.519~534.
3. Belytschko, T., Organ, D. and Krongauz, Y., (1995), "A Coupled Finite Element-Element-Free Galerkin Method", *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp.186~195.
4. Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. and Tabbara, M., (1995), "Element-free Galerkin Methods for Static and Dynamic Fracture", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, pp.2547~2570.
5. Belytschko, T. and Tabbara, M., (1996), "Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp.923~938.
6. Duarte, C. A. and Oden, J. T. (1995), "hp Clouds-A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems", *Technical Report 95-05, TICAM*, The University of Texas at Austin.
7. Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T., (1997), "Enriched Element-

Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 40, pp.1483~1504

8. Krysl, P. and Belytschko, T., (1996), " Analysis of Thin Shells by the Element-Free Galerkin Method", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 3057~3080.
9. Krysl, P. and Belytschko, T., (1996), "Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Method", *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp.26~35.
10. Krysl, P. and Belytschko, T., (1997), "A Three-Dimensional Crack Growing Under a Tensile Pulse : Simulation by The Element Free Galerkin Method", submitted to *International Journal of Solids and Structures.*
11. Lu, Y. Y., Belytschko, T. and Gu, L., (1994), "A New Implementation of the Element Free Galerkin Method", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 113, pp. 397~414.
12. Lancaster, P. and Salkauskas, K., (1981), "Surfaces Generated by Moving Least Squares Method", *Mathematics of Computation*, Vol. 37, pp.141~158.
13. Melenk, J. M. and Babuska, I., (1996), "The Partition of Unity Finite Element Method : Basic theory and applications", *Research Report No. 96-01, TICAM.*
14. Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P., (1992), "Generalizing the Finite Element Method : Diffuse Approximation and Diffuse Elements", *Computational Mechanics,* Vol. 10, pp.307~318.
15. Newman, J. C., (1971), "An Improved Method of Collocation for The Stress Analysis of Cracked Plates with Various Shaped Boundaries", *NASA Report TN D-6376.*
16. Organ, D., Fleming, M., Terry, T. and Belytschko, T., (1996), "Continuous Meshless Approximations for Nonconvex Bodies by Diffraction and Transparency", *Computational Mechanics*, Vol. 18, pp.225~235.