〈논 문〉 SAE NO. 98370047

다물체로 구성된 궤도차량에 대한 동적 해석 (Ⅰ) : 순환방정식 모듈 개발

Dynamic Analysis of Multibody Tracked Vehicles(Ⅰ) : Development of the Recursive Formulation Module

신 장 호*, 최 진 환**, 이 승 종***
J. H. Shin, J. H. Choi, S. J. Yi

ABSTRACT

In this study, a procedure is presented for the dynamic analysis of a multibody tracked vehicle system. The plannar tracked vehicle model used in this investigation is assumed to consist of two kinematically decoupled subsystems, i.e., the chassis subsystem and track sub-system. The chassis subsystem includes the chassis frame, sprocket, idler and rollers, while the track subsystem is represented as a closed kinematic chain consisting of rigid links interconnected by revolute joints. The recursive kinematic and dynamic formulation module of the vehicle will be developed.

주요기술용어 : Tracked Vehicle(궤도 차량), Kinematically Decoupled Subsystem(기구학적으로 비연성된 부속시스템), Track Subsystem(궤도 부속시스템), Chassis Subsystem(샤시 부속시스템), Closed Kinematic Chain(폐연쇄), Singular Configuration(특이형상)

1. 서 론

궤도차량(tracked vehicle)의 동적해석에는 수백개의 비선형 미분대수방정식의 수치해가 필요하다. 궤도들은 회전이음(revolute joint)으로 연결된 링크들로 구성된 폐연쇄(closed kinematic chains)로 나타낼 수 있다. 이들 폐회로 시스템에 대한 기구학적 고찰은 특이형상(singular configurations)을 피하기 위해서 조심스럽게 수행되어야 한다.

다물체 궤도차량에 대한 2차원 차량모델은 2개의 기구학적으로 비연성된 부속시스템(kinema-

* 한양대학교 대학원 자동차공학과
** 정회원, 국방과학연구소
*** 정회원, 한양대학교 자동차공학과

tically decoupled subsystems) 즉, 샤시 부속시스템 및 궤도 부속시스템으로 구성된다. 샤시 부속시스템은 샤시프레임, 스프라킷, 아이들러 및 롤러로 구성되는 반면에 궤도 부속시스템은 회전이음으로 연결된 강체 링크로 구성된 폐연쇄로 구성된다. 다물체 역학 해석용 컴퓨터 코드에 종종 사용되는 반복 Newton-Raphson 알고리즘을 사용하는 대신에 차량의 순환 기구학 방정식(recursive kinematic equations)을 이용하였다. 일련의 순환 방정식의 사용은 궤도형상의 지속적인 변화 때문에 수치적인 해석을 어렵게 한다. 특히, 특이형상은 수치해석시 독립좌표들의 계속적인 변화에 의해서 피할 수 있다.

다물체로 구성된 궤도차량에 대한 동적 해석은 2편으로 작성되어서 본 논문에서는 순환방정식 모듈 개발에 대한 연구를 발표하고, 2부에서는 궤도링크, 스프라킷, 아이들러, 롤러 및 지면과의 상호관계를 나타내는 비선형 접촉력 모듈 개발에 대한 연구 및 시뮬레이션 결과를 발표하고자 한다.

2. 순환 기구학 방정식(Recursive Kinematic Equations)

2.1 궤도 부속시스템(Track Subsystem)

궤도차량모델의 모든 요소들은 회전이음으로 연결되어 있다. 여기서는 회전이음으로 연결된 강체로 구성된 시스템의 순환 기구학 방정식을 다물체 궤도차량의 2차원 모델(Fig.1)을 이용해서 유도하였다. 만약에 i번째 강체가 i-1번째 강체에 회전이음으로 Fig.2와 같이 연결되어 있다면 다음과 같은 기구학적 구속 조건들이 생긴다.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_1^i &= \mathbf{R}^{i-1} + \mathbf{A}^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_2^{i-1} \\ \theta^i &= \theta^{i-1} + \theta^{i,i-1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{R}^i$는 i번째 강체좌표계 원점의 전역위치벡터(global position vector), $\mathbf{A}^i$는 i번째 강체의 회전을 나타내는 2차원 변환행렬(transformation matrix), $\bar{\mathbf{u}}_1^i$는 i번째 강체의 좌표계로

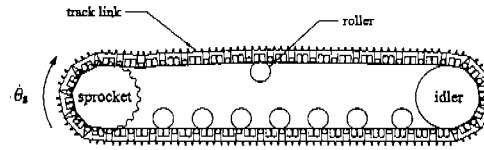

Fig.1 Plannar tracked vehicle model

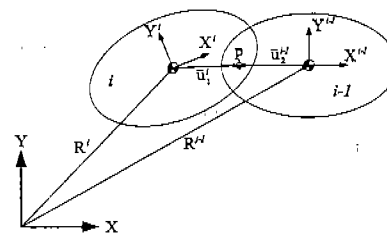

Fig.2 Revolute joint between adjacent bodies

표현되는 연결점(joint definition point)의 상대위치벡터, θ^i는 i번째 강체의 전역좌표계에 대한 절대회전(absolute orientation)을 정의하는 각, 그리고 $\theta^{i,i-1}$은 i-1번째 강체에 대한 i번째 강체의 상대회전각(relative rotation)이다.

식 (1)을 시간에 대해서 미분하면 다음과 같은 속도 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}^i + \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_1^i \omega^i &= \dot{\mathbf{R}}^{i-1} + \mathbf{A}_\theta^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_2^{i-1} \omega^{i-1} \\ \omega^i &= \omega^{i-1} + \omega^{i,i-1} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

여기서 $\mathbf{A}_\theta^i$는 θ^i에 대한 $\mathbf{A}^i$의 편미분이고 ω^i는 i번째 강체의 각속도이다.

식 (2)를 $\dot{\mathbf{R}}^i$와 ω^i에 대해서 푼후 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \omega^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_\theta^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_2^{i-1} - \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_1^i \\ 0 & 0 \quad 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^{i-1} \\ \omega^{i-1} \\ \omega^i \end{bmatrix} \quad (3)$$

식 (1)을 $\mathbf{R}^i$에 대해서 풀고 i를 i-1로 치환해서 순환적으로 대입을 하면

$$R^i = R^1 + A^1\bar{u}_2^1 + \sum_{j=2}^{i-1} A^j d^j - A^i \bar{u}_1^i \quad (4)$$

여기서 $\bar{u}_2^{i-1} - \bar{u}_1^{i-1} = d^{i-1}$이다.

지역좌표계 원점의 절대위치벡터들과 지역좌표계의 회전각들의 속도방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{R}^i = \dot{R}^1 + A_\theta^1\bar{u}_2^1\omega^1 + \sum_{j=2}^{i-1} A_\theta^j d^j \omega^j - A_\theta^i \bar{u}_1^i \omega^i \quad (5)$$

또는

$$\dot{q} = H\dot{q}_i = \begin{bmatrix} H_R \\ H_\theta \end{bmatrix} \dot{q}_i \quad (6)$$

여기서 $q = [R^{1^T}\ R^{2^T} \cdots R^{n^T}\ \theta^1\ \theta^2 \cdots \theta^n]^T$

$= [q_R\ q_\theta]^T$, $q_i = [R^{1^T}\ \theta^1\ \theta^2 \cdots \theta^n]^T$

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & A_\theta^1\bar{u}_2^1 & -A_\theta^2\bar{u}_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & A_\theta^1\bar{u}_2^1 & A_\theta^2 d^2 & -A_\theta^3\bar{u}_1^3 & 0 & \cdots & 0 \\ I & A_\theta^1\bar{u}_2^1 & A_\theta^2 d^2 & A_\theta^3 d^3 & -A_\theta^4\bar{u}_1^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & A_\theta^1\bar{u}_2^1 & A_\theta^2 d^2 & A_\theta^3 d^3 & A_\theta^4 d^4 & \cdots & -A_\theta^n\bar{u}_1^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_R \\ H_\theta \end{bmatrix}$$

벡터 q_i의 요소들은 모두 궤도 부속시스템의 독립좌표들이 아니다. 왜냐하면 폐연쇄이고 2개의 회전 좌표들은 궤도링크의 폐회로 방정식으로부터 구할 수 있기 때문이다. 행렬 H는 다음과 같이 분리될 수 있다.

$$H = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_n \\ H_\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서

$$\bar{H}_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & I & 0 & \cdots & 0 \\ I & I & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & I & \cdots & I \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad H_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times(n+2)}$$

$$\bar{H}_n = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_\theta^1\bar{u}_2^1 & -A_\theta^2\bar{u}_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_\theta^2\bar{u}_2^2 & -A_\theta^3\bar{u}_1^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_\theta^3\bar{u}_2^3 & -A_\theta^4\bar{u}_1^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -A_\theta^n\bar{u}_1^n \end{bmatrix}_{2n\times(n+2)}$$

$\overline{H}_i$와 H_θ는 상수인 반면 $\overline{H}_n$는 궤도링크 회전각에 대한 비선형 함수이다. 그리고 $\overline{H}_n$에서 비선형성의 증가는 스프라킷의 회전속도에 영향을 받는다.[1~5]

2.2 샤시 부속시스템(Chassis Subsystem)

샤시 부속시스템을 구성하는 요소들 즉, 스프라킷, 아이들러 및 롤러는 Fig.3와 같이 모두 샤시프레임에 회전이음으로 연결되어 있다. 만약에 i번째 강체가 샤시프레임에 회전이음으로 연결되어 있다면 다음과 같은 기구학적 구속조건들이 생긴다.

$$\left.\begin{aligned} R^i &= R^c + A^c\,\overline{u}_i^c \\ \theta^i &= \theta^c + \theta^{i,c} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

여기서 R^i는 i번째 강체좌표계 원점의 전역위치벡터, R^c는 샤시프레임좌표계 원점의 전역위치벡터, A^c는 샤시프렘임의 회전을 나타내는 2차원 변환행렬, $\overline{u}_i^c$는 샤시프레임좌표계로 표현되는 i번째 강체의 연결점을 나타내는 상대위치벡터, θ^i는 i번째 강체의 전역좌표계에 대한 절대회전각, θ^c는 샤시프레임의 전역좌표계에 대한 절대회전각, 그리고 $\theta^{i,c}$는 샤시프레임에 대한 i번째 강체의 상대회전각이다.

식 (8)을 시간에 대해서 미분하면 다음과 같은 속도 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} \dot{R}^i &= \dot{R}^c + A_\theta^c\,\overline{\overline{u}}_i^c\,\omega^c \\ \omega^i &= \omega^c + \omega^{i,c} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

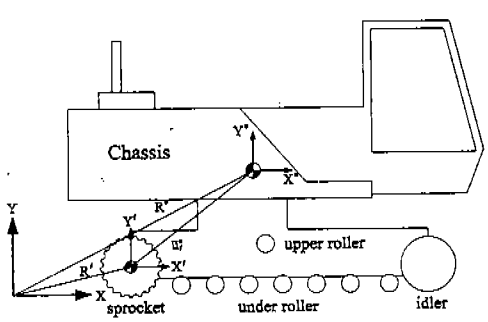

Fig.3 Chassis subsystem

여기서 A_θ^c는 θ^c에 대한 A^c의 편미분이다.

식 (9)를 $\dot{R}^c$와 ω^c에 대해서 푼후 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{R}^i \\ \omega^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_\theta^c\,\overline{u}_i^c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}^c \\ \omega^c \\ \omega^i \end{bmatrix} \tag{10}$$

지역좌표계 원점의 절대위치벡터들과 지역좌표계의 회전각들의 속도방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{q}_c = H_c(\dot{q}_i)_c \tag{11}$$

여기서 $q_c = [R^{c^T} R^{1^T} R^{2^T} \cdots R^{n^T}\ \theta^c\ \theta^1\ \theta^2 \cdots \theta^n]^T$,

$(q_i)_c = [R^{c^T}\ \theta^c\ \theta^1\ \theta^2 \cdots \theta^n]^T$

$$H_c = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & A_\theta^c\overline{u}_1^c & 0 & \cdots & 0 \\ I & A_\theta^c\overline{u}_2^c & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & A_\theta^c\overline{u}_n^c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_R)_c \\ (H_\theta)_c \end{bmatrix}$$

샤시 부속시스템 역시 궤도 부속시스템과 같이 일반좌표분할(generalized coordinate partitioning)을 이용하여 일반좌표를 독립좌표로 표현하였다.[6]

3. 운동 방정식

궤도의 운동방정식은 절대 좌표계로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_R \\ \ddot{q}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_R \\ Q_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_R \\ F_\theta \end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서 M은 궤도의 절대 좌표에 대한 질량행렬, Q는 외부에서 작용하는 힘 및 모멘트 벡터, F는 구속력 및 구속모멘트의 벡터이다.

식 (12)를 일반좌표 $\ddot{q}=[\ddot{q}_R \ \ddot{q}_\theta]^T$에 대해서 풀면

$$\begin{bmatrix}\ddot{q}_R\\ \ddot{q}_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_R\\ H_\theta\end{bmatrix}\ddot{q}_i+\begin{bmatrix}\gamma_R\\ \gamma_\theta\end{bmatrix} \tag{13}$$

여기서 벡터 γ는 속도의 2차항을 가지게 되며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\gamma=\dot{H}\dot{q}_i=\begin{bmatrix}\overline{H}_1\dot{\overline{H}}_n\\ 0\end{bmatrix}\dot{q}_i \tag{14}$$

식 (13)을 식 (12)에 대입하고 양변의 앞에 행렬 H의 전치행렬을 곱해주고 $H^TF=0$라는 것을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H^TMH\ddot{q}_i=H^T(Q-M\gamma) \tag{15}$$

이 방정식을 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_i\ddot{q}_i=Q_i \tag{16}$$

여기서 궤도 부속시스템과 샤시 부속시스템에 대한 M_i와 Q_i는 각각 다음과 같다.

$$\begin{cases}(M_i)_{track}=H^TMH=(\overline{H}_n{}^T\overline{H}_1{}^TM_R\overline{H}_1\overline{H}_n\\ \qquad +H_\theta{}^TM_\theta H_\theta)\\ (Q_i)_{track}=H^T(Q-M\gamma)=[\overline{H}_n{}^T\overline{H}_1{}^T(Q_R\\ \qquad -M_R\gamma_R)+H_\theta{}^T(Q_\theta)]\end{cases}$$

$$\begin{cases}(M_i)_{chassis}=H_c^TM_cH_c\\ (Q_i)_{chassis}=H_c^T(Q_c-M_c\gamma_c)\end{cases}$$

4. 특이형상 (Singular Configuration)

Fig.4는 궤도링크의 특이형상을 나타낸다. 특이형상은 궤도형상의 반복되는 변화때문에 나타나게 된다. 이런경우 독립 좌표를 계속해서 바꾸어 줌으로서 특이형상을 피할 수 있다.

이것을 보여주기 위해 다음과 같이 궤도링크의 연결을 나타내는 2개의 폐회로 방정식을 사용하였다.

$$\begin{aligned}&l^1+\left\{\sum_{i=2}^{n}l^i\cos\theta^{i,1}\right\}=0\\ &\left\{\sum_{i=2}^{n}l^i\sin\theta^{i,1}\right\}=0\end{aligned} \tag{17}$$

식 (17)은 두개의 종속각 $\theta^{k,1}$과 $\theta^{l,1}$을 정의하기 위해 이용될 수 있으며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}&l^1+\left\{\sum_{i=2,\,i\neq k,\,l}^{n}l^i\cos\theta^{i,1}\right\}+l^k\cos\theta^{k,1}\\ &\qquad+l^l\cos\theta^{l,1}=0\\ &\left\{\sum_{i=2,\,i\neq k,\,l}^{n}l^i\sin\theta^{i,1}\right\}+l^k\sin\theta^{k,1}\\ &\qquad+l^l\sin\theta^{l,1}=0\end{aligned} \tag{18}$$

만약에 모든 궤도링크의 길이가 같다고 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

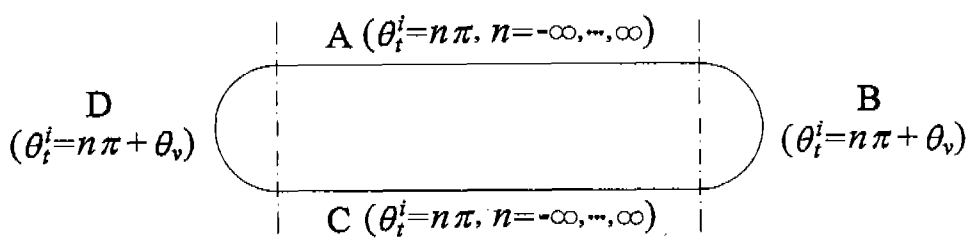

Fig.4 Singular configuration

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta^{k,1}+\cos\theta^{l,1}&=A_c\\ \sin\theta^{k,1}+\sin\theta^{l,1}&=A_s\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

여기서

$$A_c=-(1+\sum_{i=2,i\neq k,l}^{n}\cos\theta^{i,1}),$$

$$A_s=-\sum_{i=2,i\neq k,l}^{n}\sin\theta^{i,1}$$

식 (19)를 시간에 대해서 미분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다..

$$\begin{bmatrix}\sin\theta^{k,1} & \sin\theta^{l,1}\\ \cos\theta^{k,1} & \cos\theta^{l,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^{k,1}\\ \omega^{l,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dot{A}_c\\ \dot{A}_s\end{bmatrix} \quad (20)$$

식 (20)을 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\omega^{k,1}\\ \omega^{l,1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sin(\theta^{k,1}-\theta^{l,1})}\begin{bmatrix}\cos\theta^{l,1} & -\sin\theta^{l,1}\\ -\cos\theta^{k,1} & \sin\theta^{k,l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dot{A}_c\\ \dot{A}_s\end{bmatrix} \quad (21)$$

식 (21)에서 계수행렬(coefficient matrix)은 $(\theta^{k,1}-\theta^{l,1})$가 0이나 π에 가까워지면 특이(singular)해진다. 특이형상이 발생하면 수치해석상의 문제점들이 나타나게 된다. 예를 들어서 독립속도의 작은 오차는 종속 속도에는 굉장히 큰 오차를 발생시키게 된다. 만약에 종속좌표의 오차가 커지면 비선형 기구학적 구속방정식을 풀기위한 Newton Raphson 반복회수가 굉장히 많이 필요하게 된다. 더욱이 종속좌표계의 수치오차는 힘과 시스템의 관성을 변화시키기 때문에 시스템은 경직(stiff)하게 된다. 하지만, 특이형상은 시뮬레이션시 독립좌표를 다른것으로 계속 바꾸어 줌으로써 피할 수 있다.

Fig.4에서 보여주는 것과 같이 종속각 $\theta^{k,1}$과 $\theta^{l,1}$이 동시에 A또는 C의 영역을 지날때 식 (21)은 특이형상을 나타내게 된다. 그러나 $\theta^{k,1}$과 $\theta^{l,1}$이 동시에 B 혹은 D영역을 지나거나 하나는 B 혹은 D 다른 하나는 A 혹은 C의 영역에 있다면 항상 일정한 양의 각을 가지는 θ_V로 인하여 특이형상은 나타나지 않는다. 이러한 궤도의 기구학적 형상을 이용하여 독립좌표와 종속좌표를 순환시킴으로써 특이형상을 피하게 된다.[7)~10)]

특이형상을 피하기 위한 또 다른 방법은 Fig. 5와 같이 임의의 2차 이음(secondary joint)에서 chain을 잘라서 spanning tree structure를 형성한다. 2차 이음에서의 연결조건은 강성계수와 감쇠계수를 포함하는 secondary joint force를 이용하는 penalty function approach를 이용하는 방법이 있다.

5. 요약 및 결론

본 논문에서는 궤도차량을 기구학적으로 비연성된 2개의 부속시스템으로 나타내었으며 궤도

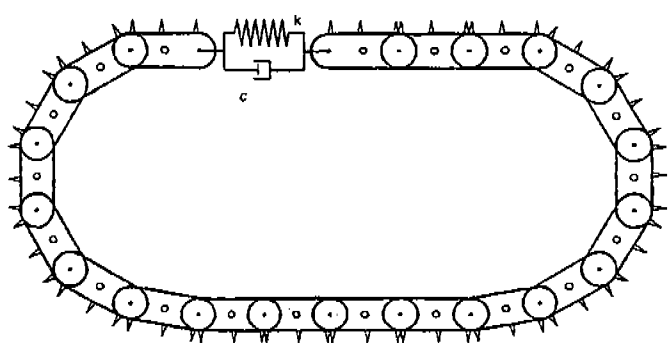

Fig.5 Secondary joint

부속시스템과 샤시 부속시스템의 순환방정식 모듈을 개발하였다. 특히 궤도 부속시스템의 경우 시뮬레이션시 궤도형상의 계속적인 변화때문에 발생하는 특이형상을 피하기 위해서 독립좌표를 계속해서 다른것으로 바꾸어주는 방법과 궤도를 절단하여 양끝을 강성계수 및 감쇠계수를 가지는 이차이음으로 나타내는 방법을 제안하였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 연구비 지원(과제번호 971-1002-013-2)으로 일부 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Wang, K.W., Liu, S.P., Hayek, S.I., and Chen, F.H.K., "On the Impact Intensity of Vibrating Axially Moving Roller Chains", ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, pp. 397~403, 1992.
2. Chen, C. K., and Freudenstein, F., "Toward a More Exact Kinematics of Roller Chain Drive", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 110, pp. 269~275, 1988.
3. Choi, J., Shabana, A. A., and Wehage, R., 1994, "Propagation of Nonlinearities in the Inertia Matrix for Tracked Vehicle", Proceedings of the ASME Design Technical Conferences, ASME Advances in Design Automation, Minneapolis, Minnesota, September.
4. Jerkovsky, W., "The Structure of Multibody Dynamics Equations", Journal of Guidance and Control., Vol. 1, No. 3 pp. 173~182, 1978.
5. Khulief, Y. A., and Shabana, A. A., "Dynamics of Multibody Systems With Variable Kinematic Structure", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 108, June, pp. 167~175, 1986.
6. Wehage, R. A., "Generalized Coordinate Partitioning in Dynamic Analysis of Mechanical Systems", Ph. D. Thesis, University of Iowa, 1980.
7. Nakanishi, T., and Shabana, A. A., "Dynamics of Tracked Vehicles", Technical Report KMTR-92-001, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago, 1992.
8. Nakanishi, T., and Shabana, A. A., "On the Numerical Solution of Tracked Vehicle Dynamic Equations", Nonlinear Dynamics, Vol. 6, pp. 391~417, 1994.
9. Shabana, A. A., 1994, "Computational Dynamics", Wiley, NY. 1994.
10. Shabana, A. A., "Dynamics of Multibody Systems", John Wiley & Sons, New York, 1989.
11. 신장호, 최진환, 이승종, "접촉력을 고려한 궤도차량의 동적 모델링", 한국자동차공학회 96년도 추계학술대회.