

1차 비등방성 단자구 자성체의 자기행동을 기술하는 닫힌형태의 양함수들

허진 · 신성철

한국과학기술원 물리학과, 대전 305-701

(1998년 2월 25일 받음, 1998년 3월 30일 최종수정본 받음)

본 연구에서는 비등방성 에너지가 $K\sin^2\theta$ 로 표현되는 일축 비등방성 자성체의 자기행동을 기술하는 닫힌 형태 (closed-form)의 양함수들 (explicit functions)을 구하였다. 인가 자기마당, 포화 자기화량, 비등방성 에너지 뿐만이 아니라, 자기화역전 기구에도 의존하는 돌림힘, 자기화방향, 자기화감수율을 나타내는 닫힌형태의 양함수들과 이들의 편미분 함수들을 닫힌형태의 양함수들로 결정하였다. 개발된 닫힌형태의 양함수들과 실험적으로 측정 가능한 물리량들에 대한 그들의 편미분 함수들은 최소제곱맞춤법에 의한 포화 자기화량 및 비등방성 측정법의 개발, 자성 집합체의 분산된 자기적 특성 측정법의 개발 뿐만 아니라, 자기이론 계산에도 큰 기여를 하리라 사료된다.

I. 서론

1948년 Stoner와 Wohlfarth는 비등방성 $K\sin^2\theta$ 를 갖는 일축비등방성 단자구 자성체의 자기적 행동을 기술하는 식을 매개변수 연립방정식으로 나타내었다[1]. Stoner와 Wohlfarth는 이 매개변수 연립방정식으로부터 자기화방향을 수치적으로 구하는 한편, 자기화방향을 나타내는 해를 양함수 (explicit function, $z=f(x, y)$)로 구하려고 시도하였다. 그러나 물리적으로 합당한 수치적 결과들과 양함수에 의한 계산 결과가 일치하지 않았기 때문에 해를 양함수 형태로 구하지 못했다. 이는 그들이 구한 매개변수 연립방정식의 해를 나타내는 수학적 식들이 틀렸거나, 시료의 초기 자기화와 자기화역전에 의존하는 수학적 표현들 중에서 물리적으로 합당한 표현을 선택하는 방법의 부재 때문이라 사료된다. 한편, Brud *et al.* [2]과 Pastor [3] 들은 비등방성 에너지 $K\sin^2\theta$ 를 갖는 일축비등방성 단자구 자성체의 자기화방향을 근사적인 전개식으로 나타냈다. 그러나 이 결과들은 자기마당세기가 비등방성 자기마당세기보다 매우 큰 경우에만 성립하는 근사식들이기 때문에, 자기마당세기가 매우 높지 않을 때는 그 오차가 증가한다. 이 전개식들에 의한 자기화방향을 표현들은 낮은 자기마당세기에서는 수렴하지도 않을 뿐만 아니라, 자기화 역전과 같은 중요한 현상을 고려하지 않았다. 따라서 이력현상을 보이는 자기화 과정을 기술할 수 없다.

우리는 결맞음회전 (coherent rotation)과 자벽이동 (domain wall displacement) 기구들을 함께 고려한 자기화역전기구 전환이론을 이용하여, 자기화 과정중 자벽이동에 의한 자기화역전이 일어나는 시료의 자기적 행동을 예측할 수 있음을 보고한 바 있고[5], 자기화 역전기구 전환이론에 근거하여 돌림힘 곡선의 개형[6], 돌림힘 곡선의 해석법들에 대한 연구들도 [7] 최근 수행하였다.

본 논문에서는, 결맞음회전과 자벽이동 기구들을 함께 고려한 자기화 역전기구 전환이론, 돌림힘 곡선의 개형, 돌림힘 곡선의 해석법들에 대한 선행 연구들에 근거하여, 비등방성 에너지가 $K\sin^2\theta$ 로 표현되는 일축비등방성 단자구 자성체의 자기행동을 기술하는 닫힌형태의 양함수들을 구하였다.

II. 자기화역전기구 전환이론에 근거한 돌림힘 곡선의 개형과 특수값들

균질한 포화자기화량 M 과 일차 비등방성 에너지만을 갖는 시료에서, 한 자벽이 생성되거나 이동하기 위해 필요한 자기마당의 최저 세기가 H_0 인 경우를 고려한다. 여기서 H_0 는 초기에 포화된 용이축 방향과 정반대 방향으로 자기마당을 인가할 때 얻어짐은 잘 알려진 사실이다. Fig. 1에서와 같은 용이축을 포함하는 평면위에서 세기가 H 인 자기마당을 시료에 인가할 때, 시료의 단위 부피당 총 에너지 E 는 다음과 같은 식 (1)로 나타낼 수 있다.

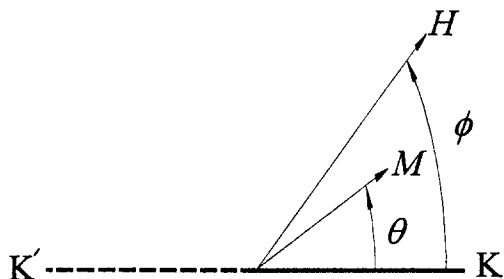


Fig. 1. Coordinates used in this study. The direction of \vec{K} denotes the positive easy direction which is the angular measurement origin.

$$E = K \sin^2 \theta - MH \cos(\phi - \theta). \quad (1)$$

여기서, K 는 형상비등방성과 고유비등방성을 함께 고려한 일차 일축 비등방성 에너지 상수이고, θ 및 ϕ 는 각각 초기에 포화된 용이축 방향으로부터 반시계 방향으로 측정된 자기화와 자기마당의 방향들이다. 유효 비등방성 자기마당 (1st-order effective anisotropy field, H_K)은 $H_K = 2K/M$ 로 정의되었다. 한편, 돌림힘 $\tau (= \vec{M} \times \vec{H})$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau = MH \sin(\phi - \theta). \quad (2)$$

여기서, $t = \tau/K$ 로 정의된 무차원 (dimensionless) 돌림힘 t 를 도입하면, 평형상태 조건 ($\partial E / \partial \theta = 0$)과 식 (2)로부터 t 는 다음 식들 (3) 및 (4)로 나타낼 수 있다.

$$t = \sin 2\theta, \quad (3)$$

$$= 2h \sin(\phi - \theta). \quad (4)$$

식 (3) 및 (4)는 Stoner와 Wohlfarth가 유도한 매개변수 연결방정식인데, 여기서 h 는 $h = H/H_K$ 로 정의된 무차원 자기마당이다.

이제, ϕ 와 h 에 대해 식들 (3) 및 (4)를 만족하고 물리적으로 합당한 해집합을 선택하면 돌림힘 곡선을 얻을 수 있다[6]. 이력현상이 없는 돌림힘 곡선의 예들로서, 매우 낮은 자기마당에서 얻어지는 돌림힘 곡선은 자기화가 역전되지 않는 경우에 해당하고, 매우 높은 자기마당에서 얻어지는 돌림힘 곡선은 자기화가 연속적인 회전에 의해 역전되는 경우에 해당한다. 그러나, 일반적으로 돌림힘곡선은 자기화역전에 의해 이력현상을 보이는데, 결맞음회전 이론 또는 자벽이동 이론을 포함하는 자기화역전기구 전환이론에서는, 돌림힘 곡선에서 자기화가 역전되는 자기마당의 방향 ϕ_c 는 다음과 같이 표현된다[5].

$$\phi_c = \begin{cases} \text{Not exist} & \text{for } h < h_0, \\ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{h_0}{h} \right) & \text{for } h_0 \leq h \leq h'_x, \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2}{h^2} \left(\frac{1-h^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right) & \text{for } h'_x \leq h < 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } h \geq 1. \end{cases} \quad (5)$$

여기서, $h_0 = H_0/H_K$, $h_x = (1 - 3h_0^{2/3} + 3h_0^{4/3})$ 일 때, h'_x 는 다음과 같이 정의 되었다.

$$h'_x = \begin{cases} h_x & \text{for } h_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ \frac{1}{2} & \text{for } h_0 \geq \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \quad (6)$$

일반적으로 중간 자기마당 영역에서 측정된 t - ϕ 곡선은 이력 현상 때문에 둥근 (미분 가능한) 정점들이 나타나지 않을 수 있다. 둥근 정점들이 나타나기 위해서는 인가 자기마당의 세기가 $h < h_1$, $h > h_2$, $h > h_3$ 를 만족해야 한다[6]. 한편, 둥근 정점이 나타나지 않을 조건은 $h_1 \leq h \leq h_2$ 이다. 여기서, h_1 , h_2 , h_3 들의 수학적 표현들은 각각 다음 식들 (7), (8), (9)로 표현된다[6].

$$h_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{2^{\frac{3}{2}} h_0^2}{(-27 h_0^4 + 3 h_0^3 \sqrt{-12 + 81 h_0^2})^{\frac{3}{2}} + \frac{(-27 h_0^4 + 3 h_0^3 \sqrt{-12 + 81 h_0^2})^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}}} & \text{for } h_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ \frac{1}{2} & \text{for } h_0 > \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \quad (7)$$

$$h_2 = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}h_0\right)^2} & \text{for } h_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ \frac{1}{2} & \text{for } h_0 > \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \quad (8)$$

$$h_3 = \begin{cases} \sqrt{2h_0^2 + \sqrt{2}h_0 + \frac{1}{2}} & \text{for } h_0 \leq \left(\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \sqrt{\frac{-4+3\sqrt{3}}{2}} & \text{for } h_0 \geq \left(\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{cases} \quad (9)$$

여기서, $h_0 > \sqrt{2}/4$ 일 때, $h \geq 1/2$ 이면 결맞음회전에 의해 자기화가 역전되므로 $h_1 = h_2 = 1/2$ 로 정하였다. Fig. 2에 h_0 와 h_1, h_2, h_3 의 관계들을 기호들로 나타냈다. $h_0 = 0$ 이면 $h_1 = 0, h_2 = h_3 = 0.71$ 이다. 한편, h_0 가 증가하면 h_1 는 증가하고 h_2 는 감소하여, $h_0 = 0.55$ 일 때 $h_1 = h_2 = 0.5$ 이다. 즉, 시료의 h_0 가 높을 수록 낮은 자기마당 세기에서 높이가 1인 정점을 얻기 위한 최저 자기마당 세기(h_1)가 높아지고, 높은 자기마당 세기에서 높이가 1인 정점을 얻기 위한 최저 자기마당 세기(h_2)가 낮아진다. 한편, h_0 가 증가하면 h_3 는 증가하다가, $h_0 > 0.06$ 일 때 약 0.77 이 된다. 여기서, $0.71 \approx 1/\sqrt{2}$, $0.35 \approx \sqrt{2}/4$, $0.06 \approx \left((1 - \sqrt{2\sqrt{3}-3})/2\right)^{3/2}$ 및 $0.77 \approx \sqrt{-4+3\sqrt{3}}/\sqrt{2}$ 임을 이용하였다. Fig. 2에서, h_0 및 h 에 따라 A, B, C, D, E, F, G, H 로 명명된 8개의 영역들은, 이력 현상의 유무, 미분 가능한 정점의 개수, 자기화 역전기구로 구별되는 $t-\phi$ 곡선의 8가지 유형에 대응된다. 각 유형의 특징은 다른 논문에서 자세히 설명되었는데 [6] 간단히 설명하면 다음과 같다. A 영역 ($h > 1$)과 H 영역 ($h < h_0$)에서는, $t-\phi$ 곡선이 이력현상이 없이 연속적이다. B, D, F, G 영역들 ($h_0 \leq h \leq h'_x$)에서는 자기화 역전이 비가역 자벽이동에 의해 일어나고, 높은 세기의 C, E 영역들 ($h'_x \leq h$)에서는 결맞음회전에 의해 일어나는데, $h_0 \leq h < 1$ 이면 항상 이력현상이 나타난다. B 와 C 영역들은 자기화 역전기구가 서로 다르지만 높이가 ± 1 인 두개의 정점들이 나타나는 공통점을 갖는다. B 영역은 자벽이동에 의해 자기화가 역전되며 $h_0 < 0.06$ 인 연자성체에서만 나타나고, C 영역에서는 결맞음회전에 의해 자기화가 역전되며 $h_0 > 0$ 이기만 하면 나타난다. D 와 E 영역들도 자기화 역전기구는 서로 다르지만, 높이가 1인 정점만이 나타나는 공통점을 갖는다. D 영역은 $h_0 > 0.35$ 인 시료에서는 나타나지 않고, E 영역은 $h_0 < 0.06$ 인 시료에서는 나타나지 않는다. $h_0 > 0.35$ 인 시료에서는 나타나지 않는 F 영역에서는 미분 가능한 정점이 존재하지 않는다. G 영역에서는 자벽이동에 의해

자기화가 역전 되지만, 높이가 $2h$ 인 정점이 나타난다. 자기화역전 기구 전환이론에서는, 돌림힘 곡선의 특수값들은 h 에 의존할 뿐만 아니라 h_0 에도 의존하는데, 돌림힘 곡선의 유형에 따라 특수값들을 나타내는 식들을 표 1에 요약하였다.

III. 자기화역전 기구 전환이론에 근거한 자기 행동들 나타내는 단힌형태의 양함수들

자기화역전 기구 전환이론에 근거하여 자기행동들 나타내는 단힌형태의 양함수들을 구하기 위해, 먼저 돌림힘을 기술하는 단힌형태의 양함수를 구한다. 여기서, 돌림힘을 기술하는 단힌형태의 양함수는 Fig. 2에서 h_0 및 h 에 따라 A, B, C, D, E, F, G, H 로 명명된 8가지 유형의 $t-\phi$ 곡선을 기술할 뿐만 아니라 표 1에 나타낸 특수값을 만족해야 한다.

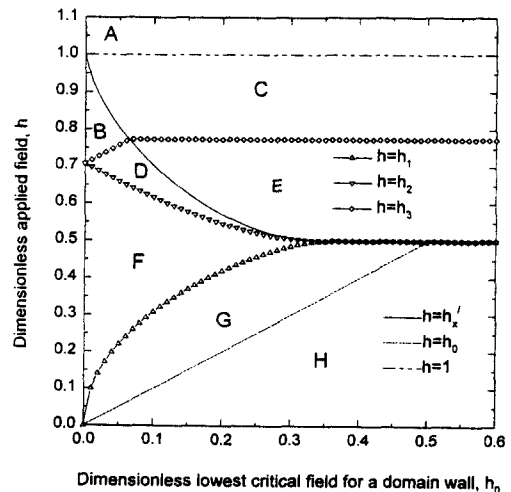


Fig. 2. domains identified by field intensities of h'_x, h_1, h_2, h_3 in space spanned by h and h_0 .

Table 1. Peculiar values of τ - ϕ curves.

| Type | Conditions | $Kt _{\phi=\frac{\pi}{2}}$ | $K\frac{\partial t}{\partial \phi} _{\phi=0}$ | $K\frac{\partial t}{\partial \phi} _{\phi=\pi}$ | $K\frac{\partial t}{\partial \phi} _{\phi=\frac{\pi}{2}}$ |
|------|--------------------------------------|----------------------------|---|---|---|
| A | $1 \leq h$ | 0 | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $-\frac{2Kh}{h-1}$ |
| C | $h_3 \leq h < 1$ | $2Kh\sqrt{1-h^2}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh^2(2h^2-1)}{h^2-1}$ |
| D | $h_2 \leq h < h_x$ | $2Kh\sqrt{1-h^2}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh^2(2h^2-1)}{h^2-1}$ |
| E | $h_x \leq h < h_3$ | $2Kh\sqrt{1-h^2}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh^2(2h^2-1)}{h^2-1}$ |
| B | $h_2 \leq h < h_3, h_2 \leq h < h_x$ | $2Kh\sqrt{1-h^2}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh^2(2h^2-1)}{h^2-1}$ |
| F | $h_1 < h < h_2$ | $2Kh\sqrt{1-h^2}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh^2(2h^2-1)}{h^2-1}$ |
| G | $h_0 \leq h \leq h_1$ | $2Kh\sqrt{1-h^2}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh^2(2h^2-1)}{h^2-1}$ |
| H | $h < h_0$ | $2Kh\sqrt{1-h^2}$ | $\frac{2Kh}{h+1}$ | $\frac{2Kh}{h-1}$ | $\frac{2Kh^2(2h^2-1)}{h^2-1}$ |

이제, 식 (3)의 우변을 $\sin(2(\theta-\phi)+2\phi)$ 로 변형하고, 변형된 식을 sine 함수의 가법정리를 사용하여 전개한 후, sine 및 cosine 함수들의 2배각 공식들을 이용하여 정리하면, 식 (4)는 다음과 같은 식 (10)으로 표현될 수 있다.

$$t=2\sin(\theta-\phi)\cos(\theta-\phi)\cos 2\phi+\sin 2\phi(1-2\sin^2(\theta-\phi)). \quad (10)$$

식 (4)으로부터 식 (10)은 다음과 같은 식 (11)로 표현될 수 있다.

$$t=-\frac{t}{h}\cos(\theta-\phi)\cos 2\phi+\sin 2\phi\left(1-\frac{t^2}{2h^2}\right). \quad (11)$$

식 (11)의 우변 두번째 항을 좌변으로 이항하여 제곱하면 다음과 같은 식 (12)를 얻을 수 있다.

$$\left(t-\sin 2\phi\left(1-\frac{t^2}{2h^2}\right)\right)^2=\frac{t^2}{h^2}\cos^2(\theta-\phi)\cos^2 2\phi. \quad (12)$$

식 (12)의 우변을, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 임을 이용하여 변형하고 정리하면 식 (12)가 (13)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} t^2-2t\sin 2\phi\left(1-\frac{t^2}{2h^2}\right)+\sin^2 2\phi\left(1-\frac{t^2}{2h^2}\right)^2 \\ =\frac{t^2}{h^2}\left(1-\frac{t^2}{4h^2}\right)(1-\sin^2 2\phi). \end{aligned} \quad (13)$$

이제 식 (13)을 전개하고 t 에 대해 내림차 순으로 정리

하면 다음과 같은 t 에 대해 4차 방정식 (14)를 얻는다.

$$\begin{aligned} t^4+4h^2\sin 2\phi t^3+4h^2(h^2-1)t^2 \\ -8h^4\sin 2\phi t+4h^4\sin^2 2\phi=0. \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)는 이미 발표된 식과 동등하다. 예로서 식 (12)의 ϕ 의 $\pi/4$ 를 대입하면, 식 (12)는 Miyajima [4]가 1차 자기화 비등방성 에너지 상수 및 포화 자기화량을 측정하기 위해 유도한 다음과 같은 식을 나타낼 수 있다.

$$\frac{\tau^2}{H^2}=\frac{1}{2}-\frac{K^2}{M^2}\tau \quad (15)$$

이제, 4차식 (14)를 t 에 대해 풀면 t 를 ϕ 및 h 에만 의존하는 양함수 $t(h, \phi)$ 로 얻을 수 있다. 4차 방정식의 일반해는 알려져 있는데, 4개의 수학적 해들은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$t_1=-h^2\sin(2\phi)+\frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B+C}), \quad (16)$$

$$t_2=-h^2\sin(2\phi)+\frac{1}{2}(\sqrt{A}+\sqrt{B+C}), \quad (17)$$

$$t_3=-h^2\sin(2\phi)-\frac{1}{2}(\sqrt{A}+\sqrt{B-C}), \quad (18)$$

$$t_4=-h^2\sin(2\phi)-\frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B-C}), \quad (19)$$

여기서 A, B, C 들은 ϕ 및 h 의 매우 복잡한 양함수인데, 그 형태들은 다음과 같다.

$$A = \frac{a^4}{4} - \frac{2}{3}b + \frac{2^{\frac{1}{3}}x}{3(y + \sqrt{y^2 - 4x^3})^{\frac{1}{3}}} + \frac{(y + \sqrt{y^2 - 4x^3})^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}, \quad (20)$$

$$B = \frac{a^2}{2} - \frac{4}{3}b - \frac{2^{\frac{1}{3}}x}{3(y + \sqrt{y^2 - 4x^3})^{\frac{1}{3}}} - \frac{(y + \sqrt{y^2 - 4x^3})^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}, \quad (21)$$

$$C = \frac{z}{4} \left(\frac{a^4}{4} - \frac{2}{3}b + \frac{2^{\frac{1}{3}}x}{3(y + \sqrt{y^2 - 4x^3})^{\frac{1}{3}}} + \frac{(y + \sqrt{y^2 - 4x^3})^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} \right)^{-1}. \quad (22)$$

여기서, $a = 4h^2 \sin 2\phi$, $b = 4h^2(h^2 - 1)$, $c = -8h^4 \sin 2\phi$, $d = 4h^4 \sin^2 2\phi$, $x = b^2 - 3ac + 12d$, $y = 2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd$, $z = -a^3 + 4ab - 8c$ 이다. 한편, 식 (14)의 대칭성으로부터 $t_1(n\pi - \phi, h) = -t_4(\phi, h)$ 및 $t_2(n\pi - \phi, h) = -t_3(\phi, h)$ 가 성립한다. 여기서, n 은 정수이다.

4차 방정식 (14)를 풀면 수학적으로 4개의 식 (16), (17), (18), (19)들에 의해 표현되는 식을 갖게 된다. 반면, 주어진 ϕ 및 h 에 대해 물리적으로 합당한 t 의 값은 초기에 포화된 용이축방향과 자기화역전이 고려된 자기화 상태에 의존하므로, 많으면 2개이다. 따라서 임의의 h 및 ϕ 에 대해 얻을 수 있는 4개의 수학적 표현들로부터, 물리적으로 합당한 돌림힘 함수를 선택하는 과정이 필요하다. 한편, 물리적으로 합당한 돌림힘 함수는 Fig. 2에서, h_0 및 h 에 따라 A, B, C, D, E, F, G, H로 명명된 8가지 유형의 $t-\phi$ 곡선을 기술할

뿐만 아니라, 표 1에 나타난 특수값을 만족해야 한다. 따라서, 돌림힘 함수 $t(\phi, h; h_0)$ 의 표현식은 다음과 같이 유일하게 정해진다.

여기서, 자기화가 역전될 때의 조건들 $h \geq \text{Min}(\sqrt{2}h_0, h_x')$ 와 $\text{Min}(h_0, 1/2) \leq h \leq \text{Min}(\sqrt{2}h_0, h_x')$ 은 식 (5)로 표현되는 ϕ_c 의 값이 각각 $3\pi/4$ 보다 작거나 클 조건이다. 이때, $t_h(\phi, h; h_0)$, $t_m(\phi, h; h_0)$, 및 $t_l(\phi, h; h_0)$ 은 h_0 및 h 에 따라 각각 식들 (24), (25), 및 (26)으로 주어진다.

$$t_h(\phi, h; h_0) = \begin{cases} t_1 & \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \\ t_2 & \text{for } \frac{\pi}{4} \leq \phi < \phi_c, \\ t_3 & \text{for } \phi_c \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}, \\ t_4 & \text{for } \frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \pi, \end{cases} \quad (24)$$

$$t_m(\phi, h; h_0) = \begin{cases} t_1 & \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \\ t_2 & \text{for } \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}, \\ t_1 & \text{for } \frac{3\pi}{4} \leq \phi < \phi_c, \\ t_4 & \text{for } \phi_c \leq \phi \leq \pi, \end{cases} \quad (25)$$

$$t_l(\phi, h; h_0) = \begin{cases} t_1 & \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \\ t_2 & \text{for } \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}, \\ t_1 & \text{for } \frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \pi, \\ t_4 & \text{for } \pi \leq \phi \leq \frac{5\pi}{4}, \\ t_3 & \text{for } \frac{5\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{7\pi}{4}, \\ t_4 & \text{for } \frac{7\pi}{4} \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (26)$$

이제, 식 (3), (4), (23)들로부터 자기화방향 θ 를 다음과 같은 양함수로 나타낼 수 있다.

$$\theta(\phi, h; h_0) = \begin{cases} \phi - \sin^{-1} \left(\frac{t(\phi, h; h_0)}{2h} \right), & \text{for } h \geq h_0, \\ \frac{1}{2} \sin^{-1} (t(\phi, h; h_0)), & \text{for } h < h_0. \end{cases} \quad (27)$$

$$t(\phi, h; h_0) = \begin{cases} t_h(\phi, h; h_0) & \text{for } h \geq \text{Min}(\sqrt{2}h_0, h_x'), \\ t_m(\phi, h; h_0) & \text{for } \text{Min}(h_0, \frac{1}{2}) \leq h \leq \text{Min}(\sqrt{2}h_0, h_x'), \\ t_l(\phi, h; h_0) & \text{for } h < \text{Min}(h_0, \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (23)$$

이제, 식 (3) 및 (4)을 ϕ 로 각각 미분한 식들로부터 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial t}{\partial \phi} = 2h \cos(\phi - \theta) \left(1 - \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right), \quad (28)$$

$$= 2 \cos(2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \phi}. \quad (29)$$

식 (28) 및 (29)의 우변들을 연립하여 $\partial \theta / \partial \phi$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{h \cos(\phi - \theta)}{\cos(2\theta) + h \cos(\phi - \theta)}. \quad (30)$$

한편, 식 (30)을 식 (28) 또는 (29)의 우변에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial t}{\partial \phi} = \frac{2h \cos(2\theta) \cos(\phi - \theta)}{\cos(2\theta) + h \cos(\phi - \theta)}. \quad (31)$$

반면, 식 (3) 및 (4)을 h 로 각각 미분한 식들로부터 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial t}{\partial h} = 2 \sin(\phi - \theta) - 2h \cos(\phi - \theta) \frac{\partial \theta}{\partial h}, \quad (32)$$

$$= 2 \cos(2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial h}. \quad (33)$$

식 (32)과 (33)들의 우변들을 연립하여 $\partial \theta / \partial h$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \theta}{\partial h} = \frac{\sin(\phi - \theta)}{\cos(2\theta) + h \cos(\phi - \theta)}. \quad (34)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \phi} = \frac{2h^2 \cos 2\phi t^3 - 2h^4 \cos 2\phi t + h^4 \sin 4\phi}{t^3 + 3h^2 \sin 2\phi t^2 + 2h^2(h^2 - 1)t - 2h^4 \sin 2\phi}. \quad (36)$$

$$\frac{\partial t}{\partial h} = \frac{2(h \sin 2\phi t^3 + 2h(h^2 - 1)t^2 - 4h^3 \sin 2\phi t + 2h^3 \sin^2 2\phi)}{t^3 + 3h^2 \sin 2\phi t^2 + 2h^2(h^2 - 1)t - 2h^4 \sin 2\phi}. \quad (37)$$

$$\tau = K \left(\left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{h} \right)^2 \right) \sin 2\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} \right) \sin 6\phi + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{h} \right)^2 \sin 6\phi \right) \text{ for } h \gg 1. \quad (38)$$

식 (34)를 식 (32) 또는 (33)의 우변에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial t}{\partial h} = \frac{2 \cos(2\theta) \sin(\phi - \theta)}{\cos(2\theta) + h \cos(\phi - \theta)}. \quad (35)$$

따라서, 식 (27)로 표현된 자기화방향 함수를 식 (30)과 (34)에 대입하면 $\partial \theta / \partial \phi$ 및 $\partial \theta / \partial h$ 를 나타내는 닫힌 형태의 양함수들도 얻을 수 있다.

한편, 돌림힘함수의 편미분의 양함수 형태는 식 (27)을 식 (31) 및 (35)에 대입하여 얻을 수도 있지만, 이들의 또 다른 양함수적 표현은 식 (14)의 좌우변을 ϕ 및 h 로 편미분하여 얻은 다음과 같은 식들과 동등하다.

저자들이 유도한 닫힌 형태의 양함수들의 정확성을 조사하기 위해, 자기화역전기구 전환이론 [5]에 근거한 돌림힘 곡선의 개형 [6] 및 돌림힘 곡선의 해석법들 [7]에 대한 연구에서 언급한 모든 경우에 대해 함수값들을 계산하여 확인하였다.

한편, Burd *et al.* [2]은 Schlechtweg의 계산결과 [8]와 매우 높은 자기마당에서 성립하는 근사식 $\sin(\phi - \theta) \approx (\phi - \theta)$ 을 이용하여 돌림힘을 표현하는 양함수들을 다음과 같은 근사식으로 구하였다.

이 식은 비등방성 자기마당 세기보다 훨씬 높은 경우에 식 (23)의 근사식들에 해당한다. 후에, $(1/h)$ 에 대해 6차까지 구하여진 돌림힘 함수의 Fourier 전개식도 발표되었다. [3]. 그러나 Pastor의 결과도 자기마당세기 비등방성 자기마당세기보다 매우 큰 경우에만 성립하는 근사식이다. 따라서, 자기마당세기가 매우 높지 않을 때는 그 오차가 증가할 뿐만 아니라 $h/1$ 이던 수렴하지도 않는다. 게다가, 돌림힘을 기술하는 지금까지 개발된 양함수들 [2, 3]은 모두 전개식들이므로 이력현상과 같이 급격한 변화를 보이는 돌림힘 곡선을 기술할 수 없다.

한편, 용이축을 포함하는 평면에서 임의의 자기마당의 함수로 측정되는 자기화 측정, 자기화감수를 측정, 강자

성공명 [9] 실험의 결과들을 해석하는 데에도 (23) 및 (27)과 그 편미분 식들이 활용될 수 있음은 반드시 강조되어야 한다. 예로서, 자기화감수율을 구하는 과정은 다음과 같다. 자기마당에 평행 및 수직인 자기화성분들을 각각 $M_{\parallel}(\mathbf{h}, \phi; \mathbf{h}_0)$ 및 $M_{\perp}(\mathbf{h}, \phi; \mathbf{h}_0)$ 라 정하고, 용이축방향에 평행 및 수직인 자기화 성분들 $M_x(\mathbf{h}, \phi; \mathbf{h}_0)$ 및 $M_y(\mathbf{h}, \phi; \mathbf{h}_0)$ 라 정하면, 다음과 같은 관계들이 성립한다.

$$M_{\parallel}^2(\mathbf{h}, \phi; \mathbf{h}_0) = M^2 \left(1 - \left(\frac{t}{2h} \right)^2 \right), \quad (39)$$

$$M_{\perp}(\mathbf{h}, \phi; \mathbf{h}_0) = M \frac{t}{2h}, \quad (40)$$

$$M_x(\mathbf{h}, \phi; \mathbf{h}_0) = M \sin \theta, \quad (41)$$

$$M_y(\mathbf{h}, \phi; \mathbf{h}_0) = M \cos \theta. \quad (42)$$

한편, 용이축방향에 평행 및 수직인 무차원 인가 자기마당 성분들 h_{ax} 및 h_{ay} 라 정하면, $h_{ax} = h \sin \phi$ 및 $h_{ay} = h \cos \phi$ 가 성립한다. 따라서, 식 (23), (27), 및 그 편미분 식들을 이용하면, 자기마당에 의존하는 자기화감수율을 나타내는 닫힌형태의 양함수 및 그 편미분 함수들을 chain rule [10]에 의해 쉽게 구할 수 있다.

IV. 결 론

돌림힘 및 자기화방향을 나타내는 닫힌형태의 양함수는 자기화역전 기구 전환이론에 따르므로 Stoner-Wohlfarth의 결과와 비교하여 자벽이동에 의해 자기화가 역전되는 단자구 시료의 자기화 과정에도 적용될 수 있을 뿐 아니라, 미분 가능한 닫힌 형태의 양함수라는 장점이 있다. 따라서 돌림힘과 자기화방향을 나타내는 식들 (23) 및 (27)와 그 편미분 식들은 자기마당의 함수로 측정된 일축비등방성 단자구 자성체의 돌림힘, 자기화, 및 자기화감수율을 양함수들로 나타낼 수 있다. 따라서 포화자기화량 및 비등방성 자기마당의 방향과 크기를 간단하게 측정할 수 있는 Levenberg-Marquart algorithm을 이용하는 비선형 최소제곱맞춤법 (least square fit method)들을 제공할 뿐 아니라 [11], 그 식들의 선형 결합들은 상호작용이 없는 단자

구 자성체들로 이루어진 자성집합체의 자기적 거동을 기술할 수 있다. 한편, H. Schäfer 및 E. Sternin가 개발한 Broadband Dielectric Spectra 해석법 [12]에 적용된 Tikhonov Regulation Algorithm [13]을 이용하면, 식들 (23) 및 (27)와 그 편미분 식들은 자기모멘트들과 비등방성 자기마당의 방향과 세기의 분산을 측정할 수 있는 방법을 제공하는데 큰 기여를 하리라 사료된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학기술원 재료계면연구센터를 통한 한국과학재단 우수연구센터 지원금에 의한 것이며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- [1] E. C. Stoner and E. P. Wohlfarth, *Philos. Trans. R. Soc. London Sect. A* **240**, 599 (1948).
- [2] J. Brud, M. Huq, and E. W. Lee, *J. Magn. Magn. Mater.* **5**, 135 (1977).
- [3] G. Pastor and M. Torres, *J. Appl. Phys.* **58**, 920 (1985).
- [4] H. Miyajima, K. Sato, and T. Mizoguchi, *J. Appl. Phys.* **47**, 4469 (1976).
- [5] 허진, 신성철, *응용물리*, **10**(5) 463 (1997).
- [6] 허진, 신성철, *자기학회, 인쇄중* (1998).
- [7] 허진, 신성철, *응용물리*, 투고중 (1998).
- [8] H. Schlechtweg, *Ann. Phys.* **27**, 573 (1936).
- [9] Z. Celinski, K. B. Urquhart, B. Heinrich, *J. Magn. Magn. Mat.* **166**, 129 (1997); and references there in.
- [10] Any elementary text book on vector calculus.
- [11] W. H. Press, AS. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, (Cambridge Univ. Press, 2ed Ed. New York, 1992), Chap. 15.
- [12] H. Schäfer and E. Sternin, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2177 (1996).
- [13] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, *Solutions of Ill posed Problems*, (J. Wiley, New York, 1977).

Explicit and Closed-form Expressions Describing Magnetic Behaviors of the First-Order Uniaxial Magnetic Materials

Jeen Hur and Sung-Chul Shin

*Department of Physics, Korea Advanced Institute of Science and Technology,
Taejon 305-701*

(Received 25 February 1998, in final form 30 March 1998)

Explicit and closed-form expressions describing magnetic behaviors of uniaxial magnetic materials are derived. Explicit and closed-form expressions for magnetic torque, magnetization orientation, and their derivative functions with respect to the intensity and the orientation of an applied field. Those explicit expressions could give elegant methods of measuring magnetic anisotropy and saturation magnetization by the least square fitting. In addition, one could use them to study the distribution function of magnetic properties of a non-interacting magnetic aggregate.