

< 논 문 >

## 광대역 불규칙 가진력을 받는 탄성진자계의 내부공진효과

Influence of Internal Resonance on Responses of a Spring-Pendulum System under Broad Band Random Excitation

이 원 경\* · 조 덕 상\*\*

Won Kyoung Lee and Duk Sang Cho

(1997년 5월 22일 접수 : 1998년 2월 21일 심사완료)

**Key Words** : Internal Resonance(내부공진), Modal Interaction(모드 상호작용), Spring-Pendulum System(탄성진자계), Random Excitation(불규칙가진), Gaussian Closure Method(가우스 절사방법).

### ABSTRACT

An investigation into the modal interaction of an autoparametric system under broad-band random excitation is made. The specific system examined is a spring-pendulum system with internal resonance, which is known to be a good model for a variety of engineering systems, including ship motions with nonlinear coupling between pitching and rolling motions. By means of the Gaussian closure method the dynamic moment equations explaining the random responses of the system are reduced to a system of autonomous ordinary differential equations of the first and second moments. In view of equilibrium solutions of this system and their stability we examine the system responses. The stabilizing effect of system damping is also examined.

### 1. 서 론

내부공진을 가지는 확정적(deterministic) 비선형 다자유도계는 그동안 많은 연구자의 관심을 끌여왔다<sup>(1-11)</sup>. 특히 조화가진력을 받는 계의 경우, 정상상태주기해의 점프현상과 포화현상(saturation phenomenon)을 비롯하여 Hopf 분기와 주기배가 분기를 거쳐 혼돈운동을 가질 수 있음은 잘 알려

져 있다<sup>(4-11)</sup>. 한편 Ibrahim과 그의 동료들은 오랫동안 불규칙가진력을 받는 비선형 다자유도계의 응답특성에 미치는 내부공진효과를 연구해 왔다<sup>(12-20)</sup>. 이 중에서 Ibrahim과 Roberts<sup>(14,18)</sup>와 Roberts<sup>(19)</sup>는 1:2의 내부공진을 가지는 약비선형 다자유도계의 불규칙진동을 해석하기 위하여 3차까지의 비선형항을 고려하였으며, 동흡진기모델<sup>(18)</sup>의 연구에서는 감쇠가 증가함에 따라 응답의 안정영역이 축소될 수도 있음(destabilizing effect)을 발견하였다. 감쇠가 공진응답을 줄여 주므로 응답의 안정화에 기여할 것(stabilizing effect)이라는 통념에 상치되는 이 발견은 주목을 받아왔다<sup>(20)</sup>.

\* 정희원, 영남대학교 공과대학 기계공학부

\*\* 정희원, 한국전력기술(주) 원자력설계개발단

또한 Ibrahim과 Li<sup>(16)</sup>와 Ibrahim<sup>(17)</sup>은 가진력이 특정 임계값에 도달하면 직접 가진되는 모드의 운동이 더 이상 증가하지 않는다는 포화현상을 찾을 수 없었다고 밝히고 있다.

본 연구의 동기는 위의 연구결과와 관련된 다음의 세 질문으로부터 유발되었다: 첫째, 1:2인 내부공진의 영향을 연구하기 위해 3차의 비선형항을 포함시킬 필요가 있는가? 둘째, 정말 감쇠가 응답의 안정영역을 축소시킬 수 있는가? 셋째, 정말 포화현상은 발생하지 않는가? 이 질문에 답하기 위하여 1:2의 내부공진을 가지고 스프링방향으로 광대역가진력을 받는 탄성진자계를 선택하였다. 이 계의 운동방정식으로부터 유도된 Fokker-Planck 방정식으로부터 모멘트방정식을 얻은 후 가우스 절사방법(Gaussian closure method)을 이용하여 1차와 2차 모멘트로 구성된 14 개의 자율상미분방정식을 구하고 이 방정식의 평형해와 그 안정성을 조사하였다.

### 2. 운동방정식

스프링 방향으로 광대역 불규칙 가진력  $F(t)$ 를 받는 탄성진자계가 Fig. 1에 나타나 있다. 선형 점성감쇠력  $c_1 d\bar{x}/dt$ 와  $c_2 d\phi/dt$ 가 각각 스프링운동과 진자운동에 존재한다고 고려하면, 평면운동으로 구속되어 있는 이 계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{\bar{x}} + c_1\dot{\bar{x}} + k\bar{x} - M(l+\bar{x})\dot{\phi}^2 + Mg(1-\cos\phi) = F(t), \quad (1)$$

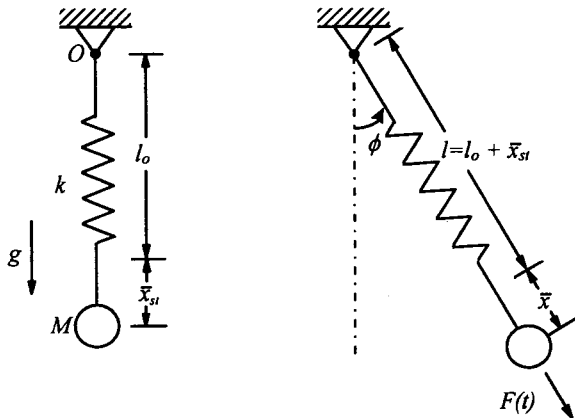


Fig. 1 A randomly excited spring-pendulum system

$$M(l+\bar{x})^2\ddot{\phi} + c_2\dot{\phi} + 2M(l+\bar{x})\dot{\bar{x}}\dot{\phi} + Mg(l+\bar{x})\sin\phi = 0 \quad (2)$$

여기서  $x$ 와  $\phi$ 는 각각 스프링운동과 진자운동을 나타내며 다음과 같은 표현을 이용하여

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{2M\omega_1}, \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2Ml^2\omega_2} \quad (3)$$

$$\tau = \omega_1 t, \quad r = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{M}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l}$$

식 (1)과 (2)를 무차원화하면 다음을 얻는다.

$$x'' + 2\zeta_1 x' + x - (1+x)\phi'^2 + r^2(1-\cos\phi) = W(\tau), \quad (4)$$

$$(1+x)^2\phi'' + 2\zeta_2 r\phi' + 2(1+x)x'\phi' + r^2(1+x)\sin\phi = 0 \quad (5)$$

위의 식들에서  $\dot{\phantom{x}}$ 과  $\dot{\phantom{\phi}}$ 은 각각  $t$ 와  $\tau$ 에 대한 미분을 나타내며

$$W(\tau) = \frac{F(\tau/\omega_1)}{Ml\omega_1^2} \quad (6)$$

이다. 근사해석을 위하여 이 계가 약비선형계라고 가정하기로 한다. 즉 식 (4)와 (5)에서 4차이상의 비선형항을 무시하면 다음을 얻는다.

$$x'' + 2\zeta_1 x' + x + \frac{r^2}{2}\phi^2 - (1+x)\phi'^2 = W(\tau), \quad (7)$$

$$(1+x)^2\phi'' + 2\zeta_2 r\phi' + r^2(1+x)\phi + 2(1+x)x'\phi' - \frac{1}{6}r^2\phi^3 = 0 \quad (8)$$

식 (1)에서 질량  $M$ 에 작용하는 가진력  $F(t)$ 는 평균이 0이고 어떤 주파수 한계  $\omega_o$  ( $\omega_o \gg \omega_1$ )내에서 균일한 스펙트럼 밀도  $S_o$ 를 가지는 정상 가우스과정(stationary Gaussian process)으로 가정하였다. 이 가진력  $F(t)$ 의 자기상관함수 (autocorrelation function)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_{FF}(v) = E[F(t)F(t+v)] = 2S_o\omega_o(\sin\omega_o v)/\omega_o v \quad (9)$$

여기서  $v$ 와  $E[\ ]$ 는 각각 시간지연과 기대값을 나타낸다. 무차원 가진력  $W(\tau)$ 의 자기상관함수는

$$\begin{aligned}
 R_{ww}(u) &= E[W(\tau)W(\tau+u)] \\
 &= \frac{2\pi S_o}{m^2 l^2 \omega_1^3} \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega u}{u} \right\} \quad (10) \\
 &= \frac{\pi}{\Omega} \sigma_w^2 \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega u}{u} \right\}
 \end{aligned}$$

이때  $\sigma_w^2$  은  $W(\tau)$  의 제곱평균값,  $u = \omega_1 v$  는 무차원 시간지연이며  $\Omega = \omega_o / \omega_1$  이다.  $\Omega \gg 1$  인 경우 식 (10) 의 괄호 속의 항은 Dirac delta 함수로 근사할 수 있으므로 식 (10) 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_{ww}(u) \approx 2D\delta(u) \quad (11)$$

여기서

$$2D = \frac{2\pi S_o}{m^2 l^2 \omega_1^3} = \frac{\pi}{\Omega} \sigma_w^2$$

은 진동수를  $f = 2\pi\omega$  로 표현할 때의 스펙트럼밀도이다.

### 3. Fokker-Planck 방정식

식 (7) 과 (8) 을 4차원 상태벡터의 1계 상미분방정식으로 변환하기 위하여 식 (8) 을 우선 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{aligned}
 \phi'' &= [-2\zeta_2 r \phi' - r^2 \phi - r^2 x \phi - 2x' \phi' \\
 &\quad - 2xx' \phi' + r^2 \phi^3 / 6] \frac{1}{1+2x+x^2} \quad (12)
 \end{aligned}$$

이 식 (12) 의 분수항을 power series로 전개한 후 4차 이상의 비선형항을 무시하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \phi'' &= -2\zeta_2 r \phi' - r^2 \phi + r^2 x \phi + 4\zeta_2 r x \phi' \\
 &\quad - 2x' \phi' + \frac{1}{6} r^2 \phi^3 - r^2 x^2 \phi \quad (13) \\
 &\quad - 6\zeta_2 r x^2 \phi' + 2xx' \phi'
 \end{aligned}$$

여기서 다음과 같은 좌표변환을 이용하고

$$\{x, \phi, x', \phi'\}^T = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}^T = X$$

불규칙과정  $W(\tau)$  를 브라운과정(Brownian process)  $B(\tau)$  의 도함수(formal derivative) 즉,  $W(\tau) = dB/d\tau$  로 나타내면 식 (7) 과 (8) 은 다음과 같은 Ito 방정식으로 표시된다.

$$dX_1 = X_3 dt, \quad dX_2 = X_4 dt,$$

$$\begin{aligned}
 dX_3 &= \left( -2\zeta_1 X_3 - X_1 - \frac{r^2}{2} X_2^2 \right. \\
 &\quad \left. + X_4^2 + X_1 X_4^2 \right) dt + dB,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dX_4 &= \left( -2\zeta_2 r X_4 - r^2 X_2 + r^2 X_1 X_2 \right. \\
 &\quad \left. + 4\zeta_2 r X_1 X_4 - 2X_3 X_4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} r^2 X_2^2 - r^2 X_1^2 X_2 \right. \\
 &\quad \left. - 6\zeta_2 r X_1^2 X_4 + 2X_1 X_3 X_4 \right) dt \quad (14)
 \end{aligned}$$

이제 Markov 벡터  $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}^T$  를 Fokker-Planck 방정식

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} p(\mathbf{x}, \tau) &= - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau)] \quad (15)
 \end{aligned}$$

에 적용하기로 한다. 여기서  $p(\mathbf{x}, \tau)$  는 결합확률 밀도함수(joint probability density function) 이고  $a_i(\mathbf{x}, \tau)$  와  $b_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$  는 각각 Markov 과정  $X(\tau)$  의 1차 및 2차 증가모멘트(incremental moment)이다. 이러한 증가모멘트는 다음과 같이 정의된다<sup>(21)</sup>.

$$\begin{aligned}
 a_i(\mathbf{x}, \tau) &= \lim_{\delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{\delta \tau} E\{X_i(\tau + \delta \tau) \\
 &\quad - X_i(\tau) \mid X(\tau) = \mathbf{x}\} \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{ij}(\mathbf{x}, \tau) &= \lim_{\delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{\delta \tau} E\{[X_i(\tau + \delta \tau) - X_i(\tau)] \\
 &\quad \times [X_j(\tau + \delta \tau) - X_j(\tau)] \mid X(\tau) = \mathbf{x}\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

따라서 식 (14) 로부터  $a_i(\mathbf{x}, \tau)$  와  $b_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$  는 다음과 같이 계산된다.

$$a_1 = x_3, \quad a_2 = x_4$$

$$a_3 = -2\zeta_1 x_3 - x_1 - \frac{1}{2} r^2 x_2^2 + x_4^2 + x_1 x_4^2$$

$$\begin{aligned}
 a_4 &= -2\zeta_2 r x_4 - r^2 x_2 + r^2 x_1 x_2 + 4\zeta_2 r x_1 x_4 \\
 &\quad - 2x_3 x_4 + \frac{1}{6} r^2 x_2^2 - r^2 x_1^2 x_2 \\
 &\quad - 6\zeta_2 r x_1^2 x_4 + 2x_1 x_3 x_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= b_{12} = b_{13} = b_{14} = b_{21} = b_{22} \\
 &= b_{23} = b_{24} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{31} &= b_{32} = b_{34} = b_{41} = b_{42} = b_{43} \\
 &= b_{44} = 0 \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$b_{33} = 2D$$

식 (18) 을 식 (15) 에 대입하면 다음과 같은 Fokker-Planck 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} = & -\frac{\partial}{\partial x_1}(x_3 p) - \frac{\partial}{\partial x_2}(x_4 p) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_3} [(-2\zeta_1 x_3 - x_1 \\ & - \frac{1}{2} r^2 x_2^2 + x_4^2 + x_1 x_4^2) p] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_4} [(-2\zeta_2 r x_4 - r^2 x_2 \\ & + r^2 x_1 x_2 + 4\zeta_2 r x_1 x_4 - 2x_3 x_4 \\ & + \frac{1}{6} r^2 x_2^3 - r^2 x_1^2 x_2 - 6\zeta_2 r x_1^2 x_4 \\ & + 2x_1 x_3 x_4) p] + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (D p) \end{aligned} \quad (19)$$

#### 4. 가우스 절사방법

Fokker-Planck 방정식 (19)로부터 완전해  $p(\mathbf{x}, t)$ 를 구하는 것은 불가능하지만<sup>(20,22)</sup>, 임의의 차수  $n(= \alpha + \beta + \gamma + \eta)$ 에 대한  $p(\mathbf{x}, t)$ 의 모멘트 방정식은 식 (19)에  $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta$ 를 곱하고 전 상태 공간  $(-\infty < x_i < \infty)$ 에 대해서 적분함으로써 얻을 수 있다.  $n=2$ 인 경우 동적 모멘트 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{m}_{1000} &= m_{0010} \\ \dot{m}_{0100} &= m_{0001} \\ \dot{m}_{0010} &= -m_{0010} - 2\zeta_1 m_{0010} + m_{0002} \\ &\quad - \frac{r^2}{2} m_{0200} + m_{1002} \\ \dot{m}_{0001} &= -r^2 m_{0100} - 2r\zeta_2 m_{0001} + r^2 m_{1100} \\ &\quad + 4r\zeta_2 m_{1001} - 2m_{0011} + 2m_{1011} \\ &\quad + \frac{r^2}{6} m_{0300} - r^2 m_{2100} - 6r\zeta_2 m_{2001} \\ \dot{m}_{2000} &= 2m_{1010} \\ \dot{m}_{0200} &= 2m_{0101} \\ \dot{m}_{0020} &= 2D - 2m_{1010} - 4\zeta_1 m_{0020} \\ &\quad + 2m_{0012} - r^2 m_{0210} + 2m_{1012} \\ \dot{m}_{0002} &= -r^2 m_{0101} - 4r\zeta_2 m_{0002} + 2r^2 m_{1101} \\ &\quad + 8r\zeta_2 m_{1002} - 4m_{0012} + 4m_{1012} \\ &\quad + \frac{r^2}{3} m_{0301} - 2r^2 m_{2101} - 12r\zeta_2 m_{2002} \\ \dot{m}_{1100} &= m_{0110} + m_{1001} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{1010} &= m_{0020} - m_{2000} - 2\zeta_1 m_{1010} \\ &\quad + m_{1002} - \frac{r^2}{2} m_{1200} + m_{2002} \\ \dot{m}_{1001} &= m_{0011} - r^2 m_{1100} - 2r\zeta_2 m_{1001} + r^2 m_{2100} \\ &\quad + 4r\zeta_2 m_{2001} - 2m_{1011} + 2m_{2011} \\ &\quad + \frac{r^2}{6} m_{1300} - r^2 m_{3100} - 6r\zeta_2 m_{3001} \\ \dot{m}_{0110} &= m_{0011} - m_{1100} - 2\zeta_1 m_{0110} \\ &\quad + m_{0102} - \frac{r^2}{2} m_{0300} + m_{1102} \\ \dot{m}_{0101} &= m_{0002} - r^2 m_{0200} - 2r\zeta_2 m_{0101} \\ &\quad + r^2 m_{1200} + 4r\zeta_2 m_{1101} - 2m_{0111} \\ &\quad + 2m_{1111} + \frac{r^2}{6} m_{0400} - r^2 m_{2200} \\ &\quad - 6r\zeta_2 m_{2101} \\ \dot{m}_{0011} &= -m_{1001} - r^2 m_{0110} - 2\zeta_1 m_{0011} \\ &\quad - 2r\zeta_2 m_{0011} + m_{0003} - 2m_{0021} \\ &\quad - \frac{r^2}{2} m_{0201} + 4r\zeta_2 m_{1011} - r^2 m_{1110} \\ &\quad + m_{1003} + 2m_{1021} + \frac{r^2}{6} m_{0310} \\ &\quad - r^2 m_{2110} - 6r\zeta_2 m_{2011} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta\gamma\eta}(\tau) &= E[X_1^\alpha X_2^\beta X_3^\gamma X_4^\eta] \\ &= \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta p(\mathbf{x}, \tau) \\ &\quad \times dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \end{aligned}$$

이다. 모멘트 방정식 (20)은 1차 모멘트에 대한 4개의 미분방정식과 2차 모멘트에 대한 10개의 미분방정식으로 구성되었다. 1차 모멘트에 대한 미분방정식은 1차에서 3차까지의 모멘트들로 구성되어 있으며 2차 모멘트에 대한 미분방정식은 1차에서 4차까지의 모멘트들로 구성되어 있다. 이러한 3차 및 4차 모멘트들을 1차 및 2차 모멘트로 전환하기 위하여 cumulant 절사방법을 사용한다.

불규칙 변수벡터  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 의 특성함수(characteristic function)  $\psi_x$ 의 로그값은 cumulant의 향으로 표시될 수 있다. 특성함수는 다음과 같이 정의된다<sup>(20)</sup>.

$$\begin{aligned} \psi_x(\boldsymbol{\theta}) &= E\{\exp[i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots \\ &\quad + \theta_n X_n)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p(\mathbf{x}, \tau) \exp[i(\theta_1 x_1 \\ &\quad + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n)] dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (21)$$

여기서  $\theta_j$ 는 임의의 실수이다. 함수  $\psi_x(\theta)$ 를 Maclaurin 급수로 전개하면 다음과 같이 다양한 차수의 모멘트항으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \psi_x(\theta) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} E[(i\theta_1 X_1 \\ &\quad + i\theta_2 X_2 + \dots + i\theta_n X_n)^k] \quad (22) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n (i\theta_j) E[X_j] + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \\ &\quad \frac{1}{2!} (i\theta_j)(i\theta_l) E[X_j X_l] + \dots \end{aligned}$$

차수  $K (= k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ 의 모멘트는 함수  $\psi_x(\theta)$ 를 미분함으로써 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}] &= \\ \frac{1}{i^K} \left. \frac{\partial^K \psi_x(\theta)}{\partial \theta_1^{k_1} \dots \partial \theta_n^{k_n}} \right|_{\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = 0} \quad (23) \end{aligned}$$

함수  $\psi_x(\theta)$ 의 로그는  $K$ 차의 cumulant  $\lambda$ 의 항으로 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln \psi_x &= i\theta_1 \lambda_1 [X_1] + i\theta_2 \lambda_1 [X_2] \\ &\quad + \dots + i\theta_n \lambda_1 [X_n] \\ &\quad + \sum_j \sum_l (i\theta_j)(i\theta_l) \lambda_2 [X_j X_l] \quad (24) \\ &\quad + \sum_j \sum_l \sum_r (i\theta_j)(i\theta_l)(i\theta_r) \\ &\quad \times \lambda_3 [X_j X_l X_r] + \dots \end{aligned}$$

여기서  $K$ 차의 cumulant는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \lambda_K [X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}] &= \\ \frac{1}{i^K} \left. \frac{\partial^K \ln \psi_x(\theta)}{\partial \theta_1^{k_1} \dots \partial \theta_n^{k_n}} \right|_{\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = 0} \quad (25) \end{aligned}$$

식 (22), (23), (25)로 부터  $K$ 차 cumulant를 다음과 같이  $K$ 차 이하의 모멘트들의 조합으로 나타낼 수 있다.

$$\lambda_1 [X_\alpha] = E[X_\alpha] \quad (26)$$

$$\lambda_2 [X_\alpha X_\beta] = E[X_\alpha X_\beta] - E[X_\alpha] E[X_\beta] \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 [X_\alpha X_\beta X_\gamma] &= E[X_\alpha X_\beta X_\gamma] \\ &\quad - \sum E[X_\alpha] E[X_\beta X_\gamma] \quad (28) \\ &\quad + 2E[X_\alpha] E[X_\beta] E[X_\gamma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 [X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\eta] &= E[X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\eta] \\ &\quad - \sum E[X_\alpha] E[X_\beta X_\gamma X_\eta] \\ &\quad + 2 \sum E[X_\alpha] E[X_\beta] E[X_\gamma X_\eta] \quad (29) \\ &\quad - \sum E[X_\alpha X_\beta] E[X_\gamma X_\eta] \\ &\quad - 6E[X_\alpha] E[X_\beta] E[X_\gamma] E[X_\eta] \end{aligned}$$

계의 비선형성이 작은 경우, 계의 응답은 가우스 분포와 근사하므로 3차 이상의 cumulant들은 무시할 만하다. 따라서 식 (28)과 (29)에서  $\lambda_3$ 와  $\lambda_4$ 를 0으로 놓음으로써 3차 및 4차 모멘트들은 1차 또는 2차 모멘트로 표시될 수 있다<sup>(20)</sup>.

식 (28)과 (29)의 관계를 식 (20)에 대입하면 1차 및 2차 모멘트들로 구성된 14개의 모멘트에 대한 14개의 미분방정식들을 얻을 수 있다. 편의를 위하여 이 14개의 자율 상미분방정식 (autonomous ordinary differential equations)으로 구성된 계를 다음과 같이 나타낸다.

$$m' = f(m) \quad (30)$$

여기서  $m = \{m_{1000}, m_{0100}, \dots, m_{0011}\}^T$ 는 14개의 요소를 가진 모멘트 벡터이며  $f(m) = \{f_1(m), f_2(m), \dots, f_{14}(m)\}^T$ 은 이 계의 벡터장 (vector field)이다. 우선 계 (30)의 평형해  $m_0$ 는 다음의 식

$$f(m_0) = 0 \quad (31)$$

으로 부터 구해지며 이 평형해의 안정성을 판별하기 위하여

$$m = m_0 + \delta m$$

으로 두고 평형해의 작은 교란  $\delta m$ 에 대한 미분방정식으로 바꿔쓴 후  $\delta m$ 의 비선형항을 무시하면 다음과 같은 선형 상미분방정식을 얻는다.

$$\delta m' = \left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|_{m=m_0} \delta m \quad (32)$$

이 Jacobian 행렬의 모든 고유치의 실수부가 음이면 그 평형해  $m_0$ 는 점근적으로 안정하다고 판단된다.

식 (20)과 (31)을 면밀히 관찰하면 이 계는 다음과 같은 평형해를 갖게 됨을 알 수 있다.

$$m_{2000} \equiv E[X_1^2] = D/2\zeta_1, \quad m_{0020} \equiv E[X_2^2] = D/2\zeta_1$$

나머지 모멘트들은 0 (33)

이 평형해는 탄성진자계가 진자운동 없이 스프링 운동 ( $x$ )만 하고 있으며,  $x$ 와  $\dot{x}$ 의 제곱 평균값이 서로 같으며  $D$ 에 비례하고  $\zeta_1$ 에 반비례함을 보여주고 있다.

### 5. 수치 결과

수치예를 위하여 우선 대수방정식 (31)을 수치적으로 풀어서 식 (33)으로 표시된 평형해가 유일한 평형해임을 확인한 후, 이 평형해의 안정성을 판별하였으며, 이 평형해가 안정성을 잃는 경우에는 상미분방정식 (30)을 수치적으로 적분함으로써 모멘트들의 거동을 조사하였다.

Fig. 2는  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$ ,  $2D = 0.0002$ 인 경우에, 진동수비  $r = \omega_2/\omega_1$ 에 따라 정상상태(steady state)에서의 운동의 제곱평균값이 어떻게 변화하는지를 보여 주고 있다. 이 그림에서 내부공진영역( $r \approx 0.5$ )을 벗어나 있는 두 수평선은 각각 스프링운동과 진자운동의 제곱평균값이  $r$  뿐만 아니라

라  $r$ 에 무관하므로 운동이 정상과정(stationary process)임을 말해 주고 있다. 이 결과는 불규칙 가진력에 의해 직접 가진되는 스프링운동만 존재하고 진자운동은 일어나지 않으며, 정상가진(stationary excitation)에 의한 응답이 정상과정임을 보여 주고 있으므로 선형계의 응답특성과 일치한다. 이 사실은 비록 두 운동이 비선형항으로 연성되어 있다 하더라도 내부공진영역을 벗어나면 이 계는 전혀 연성되어 있지 않은 선형계나 다름이 없음을 말해 주고 있다. 평형해의 안정성해석에 따르면  $r_{H1}$ 과  $r_{H2}$ 에서 Hopf 분기에 의해 이 해가 안정성을 잃는 것으로 확인되었다. 따라서  $r_{H1} < r < r_{H2}$ 에서는 이 해가 불안정하여 모멘트들이 시간에 따라 일정한 값을 갖지 않고 주기해, 준주기해, 혼돈운동 등의 운동양상을 보일 수가 있다<sup>(7, 11)</sup>. 이 그림에서는 두 제곱평균값들의 변동의 상한(upper limit)과 하한(lower limit)을 나타내었다. 이 결과는 스프링운동은 안정한 영역에서의 스프링운동보다 작아지는 반면에, 큰 진자운동이 발생하여 내부공진을 통해 직접 가진되는 스프링운동으로부터 직접적으로 가진되지 않는 진자운동으로 에너지가 전달되었음을 보여주고 있다. 시간의 경과에 따라 이 운동의 제곱평균값이

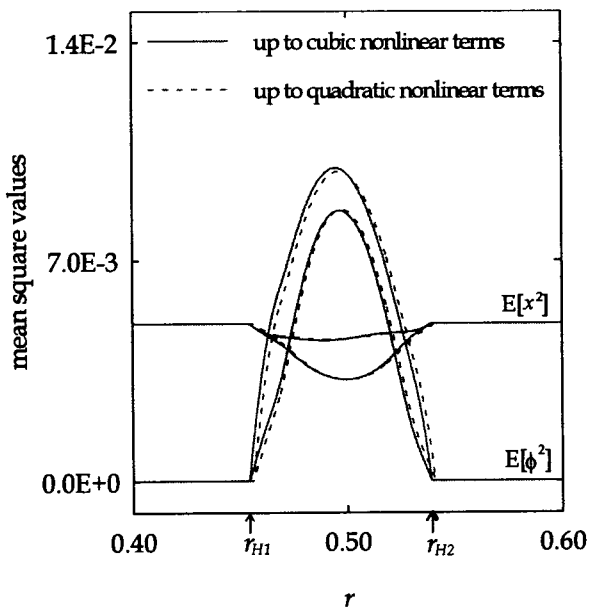


Fig. 2 Limits of mean square values  $E[x^2]$  and  $E[\phi^2]$  as functions of the frequency ratio  $r$  ( $\zeta_1 = 0.01$ ,  $\zeta_2 = 0.01$ ,  $2D = 0.0002$ )

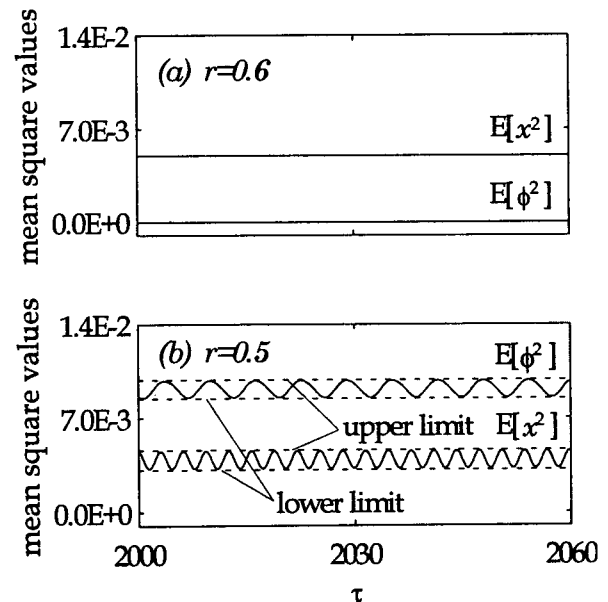


Fig. 3 Time histories of mean square values  $E[x^2]$  and  $E[\phi^2]$  ( $\zeta_1 = 0.01$ ,  $\zeta_2 = 0.01$ ,  $2D = 0.0002$ )

두 한계 사이에서 변동하므로 응답이 비정상과정을 말해주고 있다. 결국 내부공진조건이 비선형항들의 연성을 강화함으로써, 가진력이 정상과정이라 하더라도 응답이 비정상과정인 비선형계의 전형적인 응답특성을 보여주고 있다.

이 그림에서 실선과 점선은 각각 3차 및 2차의 비선형항까지 포함하여 해석한 결과이다. 두 결과가 정성적으로 뿐만 아니라 정량적으로도 잘 일치하는 것으로 보아 3차의 비선형항의 기여가 미미함을 알 수 있다. 이 사실은 2차의 비선형항이 계의 지배적인 비선형항일 때 1:2 내부공진이 특별한 의미가 있음을 상기하면 지극히 당연한 것이다. 결국 2차의 비선형항까지만 고려하더라도 식 (20)에서 4차 모멘트가 등장하지 않아 수식이 훨씬 간단해지는 반면에 결과의 정확성에 입는 손상은 미미하므로 구태여 3차의 비선형항을 해석에 포함시킬 이유가 없다고 판단된다.

Fig. 3은 운동의 제곱평균값이 시간이 경과함에 따라 어떻게 변화하는지를 보여 주고 있는데 Fig. 3(a)와 3(b)는 각각  $r=0.6$ 과  $0.5$ 에 해당하는 것이다. Fig. 3(a)는 두 제곱평균값이 일정한 정상과정을 보여 주고 있으며, Fig. 3(b)는 내부공진 효과로 말미암아 이 들이 비정상과정이 되었음을 보여 주고 있다. 이 그림을 면밀히 관찰하면  $E[x^2]$  과  $E[\phi^2]$ 는 각각 해당하는 모드의 고유진동수의

두배인 진동수로 변동하고 있음을 알 수 있다. 이 사실은 어떤 조화함수를 제공하면 그 조화함수의 진동수의 두배인 진동수를 갖게 됨과 일치한다.

Fig. 4와 5는 각각  $\zeta_1=0.005$ 와  $\zeta_2=0.01$ 일 때 평형해(스프링모드만의 운동)의 안정성이 바뀌는 경계 즉 Hopf 분기점을  $2D-r$  평면에 나타낸 것이다. 이 그림은 감쇠가 증가함에 따라 평형해가 안정한 영역이 확대함을 보여주고 있는데 이 결과는 감쇠( $\zeta_1$ )가 불안정영역을 확대시키기도 한다는 Ibrahim과 Roberts<sup>(18)</sup>의 결과와 상치한다. 이 결과<sup>(18)</sup>는 운동의 제곱평균값을 1로 정규화하는 과정에서  $D$ 를  $2\zeta_1$ 으로 구속하게 되었는데, 이 구속 때문에 감쇠  $\zeta_1$ 이 증가하면  $D$ 도 증가하게 되어 불안정한 영역이 확대된 현상을, 감쇠  $\zeta_1$ 에 의한 계의 고유한 특성으로 잘못 이해한 탓으로 판단된다.

Fig. 6과 7은 제곱평균값의 한계를 가진력의 제곱평균값  $\sigma_w^2$ 에 비례하는 스펙트럼밀도  $D$ 의 함수로 나타낸 것이다. 이 그림들은 스펙트럼밀도가 0으로부터 증가하기 시작하여 Hopf 분기점인  $2D_H$ 에 도달할 때까지 스프링운동의 제곱평균값은 직선적으로 증가하는 반면에 진자운동은 전혀 일어나지 않는 선형계의 응답특성을 보여주고 있다. Hopf 분기를 거쳐 평형해가 불안정해진 후에

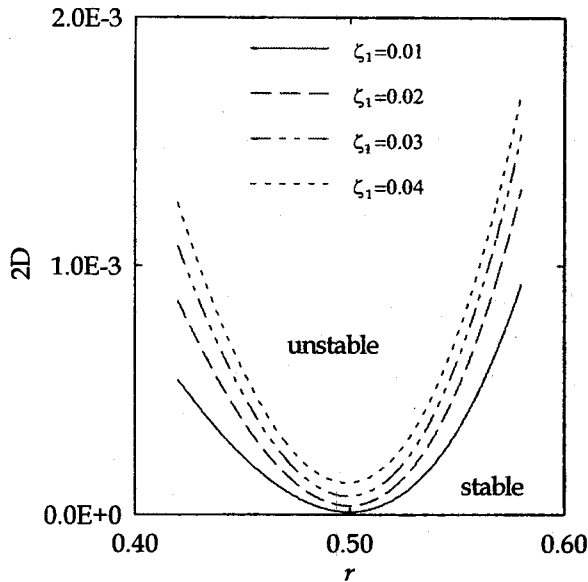


Fig. 4 Influence of damping  $\zeta_1$  on the stability boundary ( $\zeta_2 = 0.01$ )

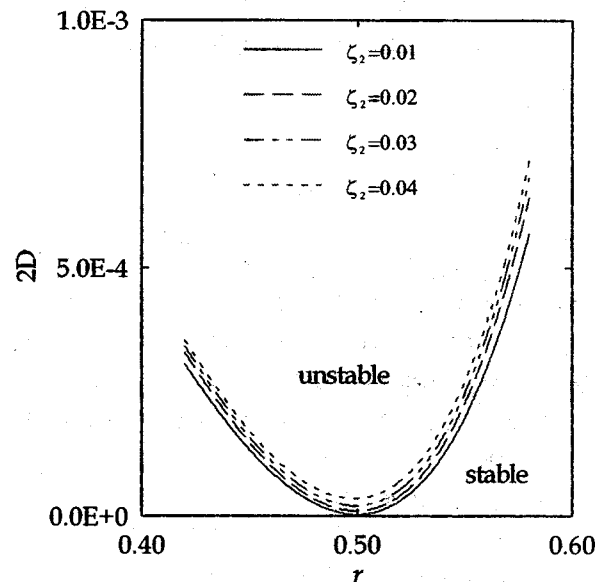


Fig. 5 Influence of damping  $\zeta_2$  on the stability boundary ( $\zeta_1 = 0.005$ )

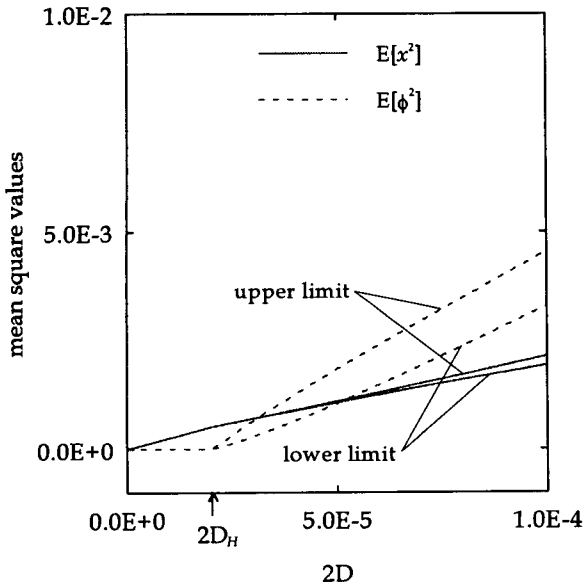


Fig. 6 Limits of mean square values  $E[x^2]$  and  $E[\phi^2]$  as functions of the spectral density  $2D$  ( $r=0.49, \zeta_1=0.01, \zeta_2=0.01$ )

도 스프링운동의 제곱평균값의 한계들이 여전히 증가하는 경향 즉, 가진력이 특정 임계값에 도달하면 직접가진되는 모드의 운동이 더 이상 증가하지 않는다는 확정계의 포화현상과는 전혀 다른 응답특성을 보여줌으로써, 불확정계에서는 포화현상이 발견되지 않는다는 Ibrahim<sup>(17)</sup>의 말을 확인하고 있다. 이 그림들 역시 감쇠( $\zeta_2$ )가 증가함에 따라 평형해의 안정영역이 확대되는 경향을 잘 보여주고 있다.

### 6. 결 론

불규칙가진력을 받는 비선형 2자유도계의 내부공진효과를 조사하기 위하여, 스프링방향으로 광대역 불규칙 가진력을 받는 탄성진자계를 선택하여 연구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 1:2인 내부공진의 영향을 연구하는 데에는 응답특성에 미치는 3차의 비선형항의 영향이 미미하므로 정성적인 해석(qualitative analysis)에서는 확정계에서와 마찬가지로 3차의 비선형항을 포함시킬 필요가 없다고 판단된다.

둘째, 감쇠가 응답의 안정영역을 축소하기도 한다(destabilizing effect)는 Ibrahim과 Roberts<sup>(18)</sup>의 발견과는 달리, 감쇠가 증가함에 따라 안정영

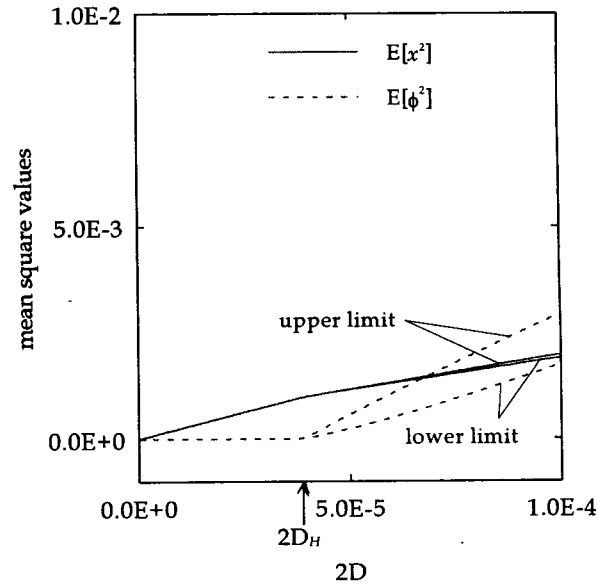


Fig. 7 Limits of mean square values  $E[x^2]$  and  $E[\phi^2]$  as functions of the spectral density  $2D$  ( $r=0.49, \zeta_1=0.01, \zeta_2=0.02$ )

역이 확대됨을 확인하였다. Ibrahim과 Roberts<sup>(18)</sup>의 발견은 그들의 정규화조건에서 기인한 착오라고 판단된다.

셋째, 가진력이 증가하더라도 직접가진되는 모드의 응답은 더 이상 증가하지 않는, 가진력의 임계점이 존재한다는 포화현상은 발견되지 않았다.

### 후 기

이 연구는 한국과학재단의 특정기초연구비(과제번호: 96-0200-07-01-3)의 지원에 의한 것임.

### 참 고 문 헌

- (1) Minorsky, N., 1962, *Nonlinear Oscillations*, Princeton: Roberty E. Krieger.
- (2) Kane, T. R. and Kahn, M. E., 1968, On a Class of Two-degree-of-freedom Oscillations, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, pp. 547~552.
- (3) Breitenberger, E. and Mueller, R. D., 1981, The Elastic Pendulum: a Nonlinear Paradigm, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 22(6), pp. 1196~1210.
- (4) Haxton, R. S. and Barr, A. D. S., 1972,



- The Autoparametric Vibration Absorber, ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, pp. 119~125.
- (5) Haddow, A. G., S. Barr, A. D. S., and Mook, D. T., 1984, "Theoretical and Experimental Study of Modal Interaction in a Two-Degree-of-Freedom Structure, Journal of Sound and Vibration, Vol. 97(3), pp. 451~473.
- (6) Bux, S. L. and Roberts, J. W., 1986, Non-linear Vibratory Interactions in Systems of Coupled Beam, Journal of Sound and Vibration, Vol. 104, pp. 497~520.
- (7) Nayfeh, A. H., Mook, D. T. and Marshall, L. R., 1973, Nonlinear Coupling of Pitch and Roll Modes in Ship Motions, Journal of Hydronautics Vol. 7(4), pp. 145~152.
- (8) Nayfeh, A. H. and Zavodney, L. D., 1988, Experimental Observation of Amplitude- and Phase-Modulated Responses of Two Internally Coupled Oscillators to a Harmonic Excitation, Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 706~710.
- (9) Lee, W. K. and Hsu, C. S., 1994, A Global Analysis of an Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance, Journal of Sound & Vibration, Vol. 171(3), pp. 335~359.
- (10) Lee, W. K. and Kim, C. H., 1995, Combination Resonances of a Circular Plate with Three-Mode Interaction, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 62, pp. 1015~1022.
- (11) Lee, W. K., and Park, H. D., 1997, Chaotic Dynamics of an Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance, Nonlinear Dynamics, Vol. 14, pp. 221~229.
- (12) Ibrahim, R. A., 1995, Recent Results in Random Vibrations of Nonlinear Mechanical Systems, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 117, pp. 222~233.
- (13) Ibrahim, R. A., Soundararajan, A., and Heo, H., 1985, Stochastic Response of Nonlinear Dynamic Systems Based on a Non-Gaussian Closure, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 965~970.
- (14) Ibrahim, R. A. and Roberts, J. W., 1976, Broad Band Random Excitation of a Two-Degree-of-Freedom System with Autoparametric Coupling, Journal of Sound & Vibration, Vol. 44(3), pp. 335~348.
- (15) Ibrahim, R. A. and Heo, H., 1986, Autoparametric Vibration of Coupled Beams Under Random Support Motion, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 421~426.
- (16) Ibrahim, R. A. and Li, W., 1988, Structural Modal Interaction with Combination Internal Resonance under Wide-Band Random Excitation, Journal of Sound & Vibration, Vol. 123(3), pp. 473~495.
- (17) Ibrahim, R. A., 1991, Nonlinear random vibration: Experimental results, Applied Mechanics Review, Vol. 44, pp. 423~446.
- (18) Ibrahim, R. A. and Roberts, J. W., 1977, Stochastic Stability of the Stationary Response of a System with Autoparametric Coupling, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik and Mechanik 57, pp. 643~649.
- (19) Roberts, J. W., 1980, Random Excitation of a Vibratory System with Autoparametric Interaction, Journal of Sound & Vibration, Vol. 69(1), pp. 101~116.
- (20) Ibrahim, R. A., 1985, *Parametric Random Vibration*, John Wiley, NewYork.
- (21) Soong, T. T., 1973, *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press Inc.
- (22) Lin, Y.,K., 1976, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, Robert E. Krieger Publishing Co.
- (23) Soong, T. T. and Grigoriu, M., 1993, *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice-Hall International, Inc.