

< 논 문 >

다양한 경계조건에서 원판이 결합된 원통 셸의 고유진동 해석

Analysis of Free Vibration of a Cylindrical Shell with a Circular Plate Under Various Kinds of Boundary Conditions

임 정 식* · 손 동 성**

Yim Jeong-Sik and Sohn Dong-Sung

(1998년 7월 8일 접수 : 1998년 9월 14일 심사완료)

Key Words : Circular Cylindrical Shell(원통 셸), Circular Plate(원판), Mode Shape(모드현상), Natural Frequency(고유진동수), Frequency Equation(진동수 방정식), Combined Structure(조합구조물), Receptance Method(동적응답법)

ABSTRACT

A theoretical formulation for the analysis of free vibration of a cylindrical shell with a circular plate attached at an arbitrary axial position of the shell under various kinds of boundary conditions was derived and programed to get the numerical results for natural frequencies and mode shapes of the combined system. The boundary conditions of the shell to be considered here are clamped-free, clamped-simply supported, both ends clamped and both ends simply supported. The frequencies and mode shapes from theoretical calculation were compared with those of commercial finite element code, ANSYS. The results showed good agreement with those of ANSYS in frequencies and mode shapes. The program will contribute to the design optimization of a shell/plate combined system through the analysis of natural frequencies and mode shapes for the system.

1. 서 론

원통 셸 내부에 원판이 결합된 경우는 주변에서 흔히 볼 수 있는 구조물로서 자동차 부품, 냉장고 콤프레서, 구획된 저장용기, 원자로 구조물 등에서 발견할 수 있다. 이러한 구조물의 고유진동을 사전에 아는 것은 공진방지와 진동조절을 위한 경계조건 또는 지지물의 선택 등을 위해 필요하다. 여기서는 산업현장에서 접할 수 있는 몇 가지 경계조건에 대

하여 원통 셸 내부에 원판이 결합된 조합구조물의 고유진동을 동적응답법으로 해석하고 그 결과를 검토하고자 한다.

조합구조물의 고유진동 해석을 위한 동적응답법(receptance method)은 Shkarov⁽¹⁾, Faulkner⁽²⁾, Soedel⁽³⁾ 등에 의해 소개된 이래로 양단이 단순 지지되고 축방향 임의 위치에 원판이 결합된 경우의 해석 결과가 Huang과 Soedel^(4~6)에 의해 발표되었고 Azimi⁽⁷⁾는 다각형의 덕트에 대해 동적응답법을 사용하여 고유진동 해석을 수행하였다. 이 외에 Mead⁽⁸⁾는 일차원의 스프링-질량계에 이 방법을 적용한 연구를 발표하였다.

경계조건이 대칭이 되는 양단 단순지지 원통 셸의

* 정회원, 한국원자력연구소 미래형핵연료개발팀

** 한국원자력연구소

경우 원통 셀의 변위함수를 가정할 때 경계조건을 만족하는 함수의 선택에 있어 삼각함수를 사용할 수 있으므로 비교적 수식의 전개가 간단하다. 이에 비해 비대칭 경계조건을 갖는 외팔 원통 셀에 원판이 결합된 구조물의 고유진동 해석에서는 변위함수로서 보 함수(beam function)를 선택할 수 있고 이러한 해석 결과가 임정식^(9,10) 등에 의하여 발표되었다.

원판이 원통 셀 내부에 부착되어 있는 조합구조물의 고유진동 해석은 상용의 유한요소 해석 코드를 이용하여 해석할 수도 있으며 이 경우는 해석을 위한 입력자료의 준비가 번거롭고 해석결과로부터 해당하는 모드와 진동수를 일치시키기 위한 후처리(post-process)에 많은 시간이 소요되는 단점을 갖는다. 이에 반해 해석적 방법을 사용할 경우는 간단한 입력 및 결과처리에 신속성을 보이는 장점을 갖는다. 따라서 여기서는 외팔 원통 셀에 대한 동적 응답법을 확장하여 산업현장에서 접할 수 있는 고정-자유 이외에 고정-단순, 고정-고정 경계조건 원통 셀에 원판이 결합된 경우에도 적용 가능한 수식을 전개하고 수치해를 얻기 위한 프로그램을 작성하였으며 각각의 경계조건에 따라 원통 셀 내부에 원판이 결합된 조합구조물의 고유진동수가 어떻게 영향을 받는지에 대하여 고찰하였다. 이 고찰에는 삼각함수를 사용하여 해석되는 양단 단순지지 원통 셀에 원판이 결합된 경우의 결과도 포함하였다.

대부분의 고유진동 해석에서와 마찬가지로 저차 공진주파수에 관심이 있으므로 저차의 축방향 모드 및 원주방향 모드에 대하여 관심을 가지고 계산하였으며 계산의 예는 원판이 원통 셀의 내부 축방향 중간에 결합된 경우를 택하였다.

원통 셀만의 고유진동수를 구할 때는 축방향 모드 수와 원주방향 모드 수가 명확하게 구별이 되므로 해당하는 모드에서의 고유진동수 식별에 어려움이 없지만 이와는 달리 원판과 원통 셀이 조합된 경우에는 진동수 방정식으로부터 얻은 고유진동수에 해당하는 고유모드가 어떠한 모드인지를 정확히 확인 할 필요가 있고, 이것은 더욱 ANSYS 해석의 결과 또는 실험의 결과와 비교하기 위해서도 필수적으로 필요하므로 조합 원통 셀의 모드형상도 구하였다.

2. 수식의 전개

원통 셀 내부에 원판이 결합된 조합원통 셀의 수식전개는 원통 셀만의 고유진동 해석과 원판의 고유진동 해석이 독립적으로 선행된 후 이들의 결과를

조합하여야 한다. 외팔 원통 셀만의 고유진동 해석은 임정식^(11,12) 등이 보 함수와 Rayleigh-Ritz법을 이용한 해석결과를 발표하였고, 외팔 경계조건 이외의 경계조건에서는 경계조건에 따라 달라지는 보 함수의 고유치 및 변수를 결정하여 사용할 수 있으므로 여기서는 원통 셀만의 고유진동 해석 과정은 생략한다. 또 단순지지 경계조건을 갖는 원통 셀 내부에 원판이 결합되어 있는 경우는 Huang 등⁽³⁾에 의해 보고되어 있고, 외팔 원통 셀 내부에 원판이 결합되어 있을 경우의 수식전개는 임정식 등^(9,10)에서 상세히 기술되어 있으므로 여기서는 중복되는 부분에 대하여는 생략하고 보 함수를 사용하여 해석할 수 있는 고정-자유 및 고정-단순지지와 고정-고정 경계조건을 갖는 원통 셀 내부에 하나의 원판이 결합된 경우에 대하여 간략히 수식 전개를 보이고자 한다.

2.1 원판 결합 원통 셀 변위의 가정

원판과 원통 셀이 결합된 구조물의 변위는 댐핑이 없다고 가정 ($\zeta=0$)할 때, 진동에 의한 셀의 변위를 다음과 같이 일반적인 셀 변수를 사용하여 모드 합으로 표현 할 수 있다⁽³⁾.

$$u_i(a_1, a_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega_c^2)} \times e^{j\omega t} U_{ik}(a_1, a_2) \quad (1)$$

여기서

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{a_1} \int_{a_2} (f_1 U_{1k} + f_2 U_{2k} + f_3 U_{3k}) \times A_1 A_2 da_1 da_2 \quad (2)$$

이다. 또 상기 식 (2)에서

$$N_k = \int_{a_1} \int_{a_2} (U_{1k}^2 + U_{2k}^2 + U_{3k}^2) \times A_1 A_2 da_1 da_2 \quad (3)$$

이다. 식 (2)에서 3개의 변위 U_{ik} 는 k 모드에서 i -방향의 변위로서 $i=1,2,3$ 은 각각 축방향, 원주방향 및 반경방향 변위를 나타낸다. 셀 좌표 방향으로의 하중함수 f_1, f_2, f_3 는 입력으로 주어지는 주기력을 의미하며 이들은 원판과 원통 셀의 결합부위에서 나타나는 구속력 및 구속 모멘트로서 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$f_i(a_1, a_2, t) = f_i^*(a_1, a_2) e^{j\omega t}, \quad i=1,2,3 \quad (4)$$

셀 변위 성분의 가정은 보 함수를 도입하여 다음과

같이 나타낼 수 있다⁽¹¹⁾.

$$u(x, \theta, t) = A \phi' \cos n \theta e^{j\omega t} \quad (5)$$

$$v(x, \theta, t) = B \phi \sin n \theta e^{j\omega t} \quad (6)$$

$$w(x, \theta, t) = C \phi \cos n \theta e^{j\omega t} \quad (7)$$

여기서 보 함수와 그의 미분은 다음의 식 (8), (9) 와 같다.

$$\phi(x) = \cosh p_r x - \cos p_r x - C_r (\sinh p_r x - \sin p_r x) \quad (8)$$

$$\phi'(x) = \sinh p_r x + \sin p_r x - C_r (\cosh p_r x + \cos p_r x) \quad (9)$$

식 (8), (9)의 C_r, p_r 은 경계조건에 따라 다음과 같이 구별하여 구할 수 있다.

1) 고정-자유 경계조건

$$C_r = \frac{\sinh p_r L - \sin p_r L}{\cosh p_r L + \cos p_r L} \quad (10)$$

$$\cosh p_r L \cos p_r L + 1 = 0 \quad (11)$$

(2) 고정-단순 경계조건

$$C_r = \frac{\cosh p_r L - \cos p_r L}{\sinh p_r L - \sin p_r L} \quad (12)$$

$$\tan p_r L = \tanh p_r L \quad (13)$$

(3) 고정-고정 경계조건

$$C_r = \frac{\cosh p_r L - \cos p_r L}{\sinh p_r L - \sin p_r L} \quad (14)$$

$$\cosh p_r L \cos p_r L - 1 = 0 \quad (15)$$

(4) 단순-단순 경계조건

양단 단순지지 원통 쉘의 변위함수를 다음과 같이 삼각함수를 사용하면 경계조건을 정확하게 만족하게 되므로 복잡한 보 함수를 사용할 필요가 없다.

$$u(x, \theta, t) = A \cos(m\pi x/L) \cos n \theta e^{j\omega t} \quad (16)$$

$$v(x, \theta, t) = B \sin(m\pi x/L) \sin n \theta e^{j\omega t} \quad (17)$$

$$w(x, \theta, t) = C \sin(m\pi x/L) \cos n \theta e^{j\omega t} \quad (18)$$

조합구조물의 결합부에서 발생하는 주기적인 구속력에 의해 원통 쉘에 나타나는 반경방향 동적 변위를 모드 합으로 나타내면 식 (1)로부터 다음의 결과를 얻는다.

$$u_3^S(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega_c^2)} \frac{F_3^S \phi(x^*) \phi(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \times \cos n \theta e^{j\omega t} \quad (19)$$

원판 결합에 따른 동적 횡방향 구속력에 의해 발생하는 원통 쉘의 축방향 기울기는 식 (19)를 미분하여 얻는다. 즉,

$$\beta^S(x, \theta, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega_c^2)} \frac{F_3^S \phi(x^*) p_r \phi'(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \times \cos n \theta e^{j\omega t} \quad (20)$$

결합부에서 나타나는 동적 주기 모멘트에 의한 쉘의 변위를 모달 확장식을 사용하여 댐핑을 무시하고 구한 결과를 표시하면 다음의 식 (21)과 같다.

$$u_3^S(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{M_1^S}{(\omega_{imn}^2 - \omega_c^2)} \frac{-p_r \phi'(x^*) \phi(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \times \cos n \theta e^{j\omega t} \quad (21)$$

모멘트 주기 동적 가진에 의한 원통 쉘의 원판 결합점에서의 기울기는 변위식 (21)을 미분하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\beta^S = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{M_1^S}{(\omega_{imn}^2 - \omega_c^2)} \frac{-p_r^2 \phi'(x^*) \phi'(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \times \cos n \theta e^{j\omega t} \quad (22)$$

한편 원판과 원통 쉘의 결합부에서 구속 결과로부터 발생하는 동적 주기 하중 및 모멘트는 원판의 변위와 기울기도 발생하게 하며 이들은 임정식 등^(9,10)과 동일하므로 여기서는 생략한다.

2.2 진동수 방정식 및 모드형상

조합 구조물의 결합점에서 하중과 변위 관계를 이용하고 연속조건을 적용하면 다음과 같은 동적응답을 포함하는 방정식을 얻는다.

$$[a_{ij} + \beta_{ij}]\{F_{Aj}\} = 0 \quad (23)$$

식 (23)에서 $\{F_{Aj}\} \neq 0$ 이어야 하고 무용해를 갖지 않을 조건으로부터 다음과 같은 조합 구조물의 진동수 방정식을 얻는다.

$$|a_{ij} + \beta_{ij}| = 0 \quad (24)$$

구조물의 고유진동 해석에서 고차 진동 모드로 갈수록 변위는 현저히 낮아지므로 공진 방지에 관심이 있을 경우 저차 진동수와 그에 대응되는 진동모드 특성이 중요하게 된다. 원판이 결합된 원통 셀 구조물의 저차 진동 모드 및 낮은 진동수에 관심이 있을 때는 5개의 변위/하중 성분을 모두 고려하는 대신 원판은 면내(in-plane)에서 셀의 횡진동에 의해 강제운동을 한다고 가정하고, 이에 따라 원판의 진동은 원판의 중립면에 수직인 횡진동(transverse vibration)만 고려할 수 있다.

또 원통 셀에서 셀의 중립면에 수직인 횡방향 진동만을 고려하면 원판과 원통 셀 결합부에서의 연성은 원판의 횡방향 변위 및 반경방향 기울기 변화, 원통 셀의 반경방향 변위 및 축방향 기울기 변화만 남게되어 결합부에서의 변위는 2개로 줄어들게 된다. 이러한 가정에 의해 식 (23)은 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \beta_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_3 \\ M_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (25)$$

여기서 F_3 은 원판과 셀 결합부위에서 셀의 운동에 연성된 원판의 강제 평면 운동을 일으키는 힘의 크기이고, M_1 는 원판의 횡방향 운동이 셀 운동에 연성된 모멘트의 크기이다. 동적응답 β_{12} 와 β_{21} 은 셀의 반경방향 변위와 원판의 횡방향 운동의 연성이 없으므로 영이고 $a_{12} = a_{21}$ 이다. 이에 따라 하나의 원판이 원통 셀의 임의 위치에 결합되어 있는 경우에 구해야 할 동적응답은 다음과 같다.

(1) 셀의 동적응답

횡방향 동적 가진에 의한 동적응답은 변위 표현식 (19)와 기울기를 나타내는 식 (20)으로부터 구할 수 있고 이들 변위를 사용하여 셀의 동적응답을 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega_c^2)} \frac{\phi(x^*)\phi(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (26)$$

$$\alpha_{21} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega_c^2)} \frac{p_r \phi(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (27)$$

식 (26) 및 (27)의 하첨자 i 는 각 모드에 해당하는 원통 셀만의 진동수 방정식의 세 근이므로 $i=1,2,3$ 이고, m 은 축방향 반파수, n 은 원주방향 파수를 나타낸다.

또 동적 모멘트에 의한 셀의 동적응답은 $x=x^*$ 에서 식 (21), 식 (22)를 이용하여 다음의 식 (28), 식 (29)와 같이 구해진다.

$$\alpha_{22} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega_c^2)} \frac{-p_r^2 \phi'(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (28)$$

$$\alpha_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega_c^2)} \frac{-p_r \phi(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (29)$$

(2) 원판의 동적응답

구해야 할 원판의 응답은 셀과 원판의 연성이 없어 영이 되는 두 개를 제외한 β_{11} 과 β_{22} 으로서 그 결과를 보이면 다음과 같다⁽⁹⁾.

$$\beta_{11} = \begin{cases} -\frac{1}{a \rho_p h_p \omega_c^2} & \text{for } \hat{n} = 1 \\ 0 & \text{for } \hat{n} \neq 1 \end{cases} \quad (30)$$

$$\beta_{22} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi \lambda^2 a}{\rho_p h_p} \frac{[J_{n+1}(\lambda a) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda a)]^2}{N_{mn}[(\omega_p)_{mn}^2 - \omega_c^2]} \quad (31)$$

(3) 진동수 방정식 및 모드 형상

식 (25)에서 무용해를 얻지 않기 위한 조건으로

부터 다음의 진동수 방정식(Frequency Response Equation : FRE)을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

전개하면 조합 원통 셀의 고유진동수인 ω_c 에 대한 함수로서 다음 식과 같다.

$$f(\omega_c) = (\alpha_{11} + \beta_{11})(\alpha_{22} + \beta_{22}) - \alpha_{12} * \alpha_{21} = 0 \quad (33)$$

식 (33)은 특이점(singular point)을 갖는 비선형 방정식으로서 수치적인 방법으로 해를 구해야 하며 이로부터 구한 조합 원통 셀의 진동수를 이용하여 식 (25)으로부터 모멘트/하중 비를 구하고, 식 (19)와 식 (21)을 이용하여 셀의 모드 형상을 구하면 고정-자유, 고정-단순지지, 고정-고정의 경계조건을 갖는 조합구조물의 셀 모드형상을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u_3^S(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^3 \frac{F_3^S}{\omega_{imn}^2 - \omega_c^2} \phi(x) * \left\{ \frac{\phi(x^*) - (M_1^S/F_3^S) \rho_r \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2(x) dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2(x) dx + \int_0^L \phi^2(x) dx]} \right\} * \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (34)$$

또 양단 단순지지 경계조건의 조합구조물의 원통 셀의 모드형상은 다음과 같다.

$$u_3^S(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi a}{\rho h N_k} \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega_c^2} * \left[\sin \frac{m\pi x^*}{L} - \left(\frac{M_1^S}{F_3^S} \right)_{mn} \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi x^*}{L} \right] * \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (35)$$

한편 원판의 모드 형상은 다음 식과 같다.

$$u_3^P(r, \theta, t) = -F_3^S \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(M_1^S/F_3^S) \pi \lambda a}{[(\omega_p)_{mn}^2 - \omega_c^2]} * \frac{\left[J_n(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda r) \right]}{\rho_p h_p N_{mn}} * \left[J_{n+1}(\lambda a) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda a) \right] * \cos n\theta \quad (36)$$

3. 결과 및 고찰

지금까지 기술한 수식전개를 이용하여 고정-자유 경계조건을 갖는 외팔형 원통 셀, 고정-단순 및 고정-고정 경계조건의 원통 셀의 축방향 중간 위치에 하나의 원판이 결합되어 있을 경우의 수치해를 얻을 수 있는 FORTRAN 프로그램을 작성하여 수치해를 얻은 후 그 결과의 타당성을 먼저 검토하였다. 외팔 원통 셀에 원판이 결합된 경우의 결과에 대한 타당성은 ANSYS 및 고유진동 시험결과와 비교를 통해 이미 보고되었다^(9,10).

계산에 있어 원통 셀 및 원판의 변위는 식 (19), (21)에서 보는 것과 같이 모드 합으로 표현되어 있으므로 사용하는 모드 합 의 개수에 따라 결과에 영향을 줄 수 있다. 여기서는 모드 합 의 개수에 따라 얻어지는 결과의 수렴성을 검토하여 원판과 원통 셀의 변위를 나타낼 때 40 모드까지 합하여 계산하였다. ANSYS를 사용한 유한요소 모델은 셀의 반경에 대한 두께비가 34.8(=104.5/3)로서 비교적 얇은 셀로 볼 수 있으므로 고체요소(solid element) 대신 셀 요소를 사용하고 모달해석 계산에 대한 선택사항은 부분공간 반복법(Subspace iteration)을 사용하여 대칭 모드에 대해서도 정확히 계산을 하도록 하였다. ANSYS 계산의 결과도 사용되는 요소 크기에 따라 영향을 받을 수 있으므로 사용되는 요소의 크기는 해석결과 수렴성과 해석시간 및 컴퓨터 용량을 고려하여 셀의 축방향 길이의 1/40 크기 요소를 사용하였다. 계산에 사용된 원통 셀의 제원은 길이가 500 mm, 반경 104.5 mm, 두께 3 mm이며 물성으로는 영률 $20.6 * 10^4$ N/mm², Poisson 비 0.3, 밀도 $7.85 * 10^{-9}$ N · S² / mm⁴이다. 결합되는 원판의 두께는 3 mm이고 기타의 물성은 원통 셀과 동일하다.

외팔 원통 셀만의 고유진동수는 보 함수를 사용하고 Rayleigh-Ritz법을 적용하여 유도된 3차의 진동수 방정식에서 근의 공식을 이용하여 구할 수 있으며 얻어진 진동수를 이용하여 고유진동 모드를 구할 수 있다. 이러한 해석결과 타당성은 임정식^(11,12) 등에 의해 Sharma⁽¹³⁾가 사용한 3가지 경우의 외팔 원통 셀과 같은 제원 및 물성을 사용하여 고유진동수를 얻고 기존의 결과와 비교를 통해 입증되기도 하였다.

외팔 경계조건의 원통 셀, 고정-단순지지, 고정-고정의 경우 및 양단 단순지지 경계조건의 셀에 원판이 중간에 결합된 조합 원통 셀에 대한 진동수 해석

Table 1 Natural frequencies of a C-F shell with a plate at middle (Hz)

N	M=1		M=2		M=3		M=4	
	해석	ANSYS	해석	ANSYS	해석	ANSYS	해석	ANSYS
0	586	646	2102	2361	2512	2698	3341	-
1	708	645	1372	1347	2410	2162	3996	3924
2	599	598	2275	2209	2486	2297	2760	2760
3	615	618	1791	1689	1895	1969	3285	3223
4	1018	1026	1567	1541	1706	1758	2966	2899
5	1614	1621	1889	1889	1975	2046	2829	2833
6	2355	2360	2535	2536	2581	2669	3169	3205

Table 2 Natural frequencies of a C-S shell with a plate at middle (Hz)

N	M=1		M=2		M=3		M=4	
	해석	ANSYS	해석	ANSYS	해석	ANSYS	해석	ANSYS
0	585	643	2510	2690	4459	-	5706	-
1	1371	1332	1937	1346	3978	3800	4048	-
2	2001	1862	2280	2312	2654	-	4260	3728
3	1400	1409	1867	1732	3164	3144	3321	3214
4	1359	1391	1659	1606	2633	2746	2996	2911
5	1780	1816	1945	1923	2592	2723	2882	2867
6	2465	2499	2564	2550	2999	3126	3215	3234

Table 3 Natural frequencies of a C-C shell with a plate at middle (Hz)

N	M=1		M=2		M=3		M=4	
	해석	ANSYS	해석	ANSYS	해석	ANSYS	해석	ANSYS
0	585	643	2509	2492	5258	-	5706	-
1	1371	1339	2355	1861	3999	3976	4609	-
2	2274	2287	2546	2357	2759	-	4614	-
3	1793	1607	1919	1793	3285	3391	3578	3526
4	1567	1489	1719	1654	2966	2875	3022	2935
5	1890	1858	1984	1948	2829	2792	2922	2896
6	2536	2517	2587	2562	3169	3166	3250	3256

Table 4 Natural frequencies of a S-S shell with a plate at middle (Hz)

N	M=1		M=2		M=3		M=4	
	해석	ANSYS	해석	ANSYS	해석	ANSYS	해석	ANSYS
0	598	643	2556	2492	3498	-	5126	-
1	1329	1339	1368	1861	3630	3976	3740	-
2	1810	2287	1971	2357	2341	-	3983	-
3	1260	1607	1444	1793	3080	3391	3145	3526
4	1288	1489	1422	1654	2566	2875	2643	2935
5	1763	1858	1824	1948	2548	2792	2654	2896
6	2470	2517	2499	2562	3004	3166	3081	3256

* Notes) C : Clamped, S : Simply supported, F : Free

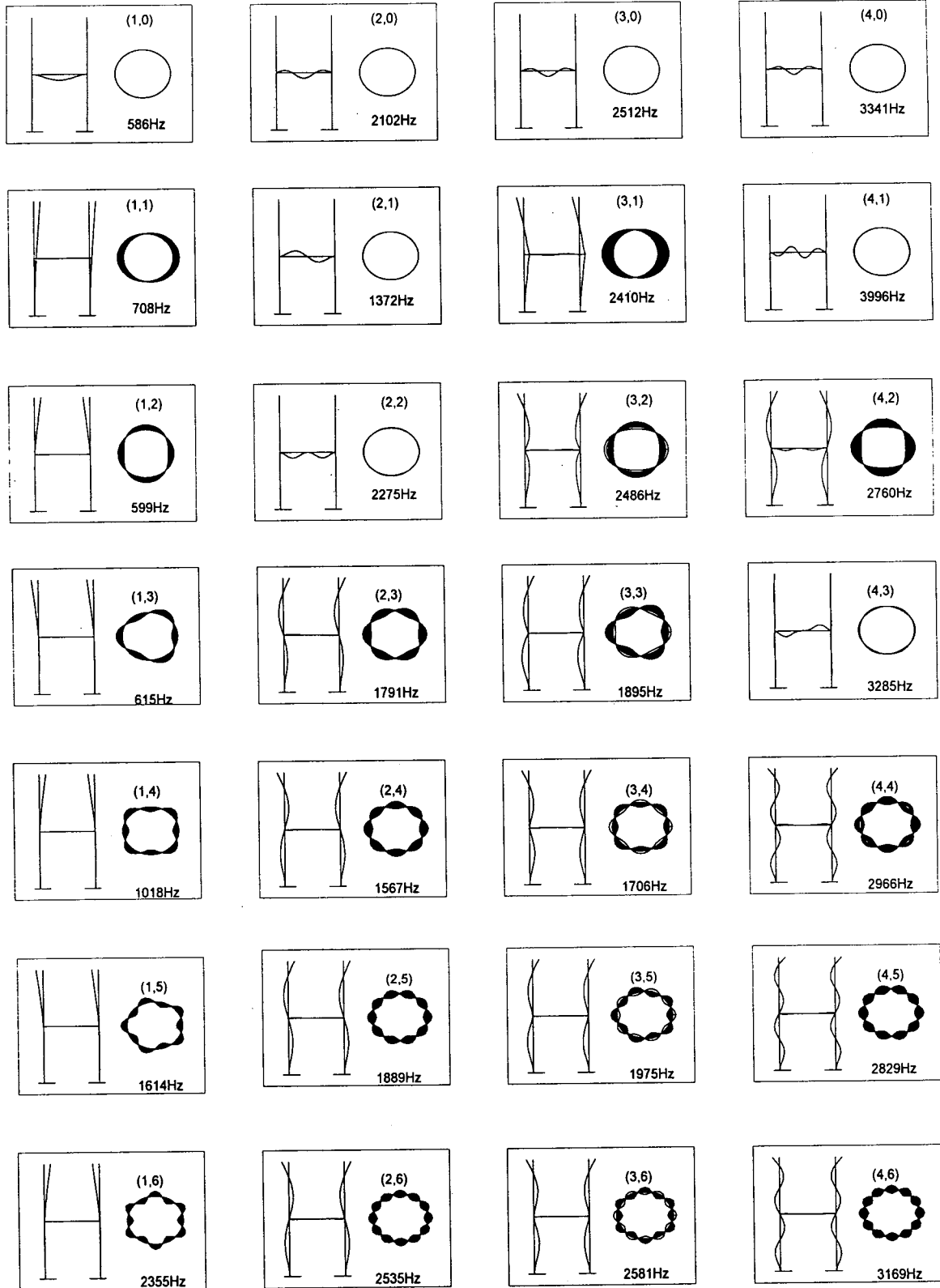


Fig. 1 Mode shapes of C-F shell with a plate at middle

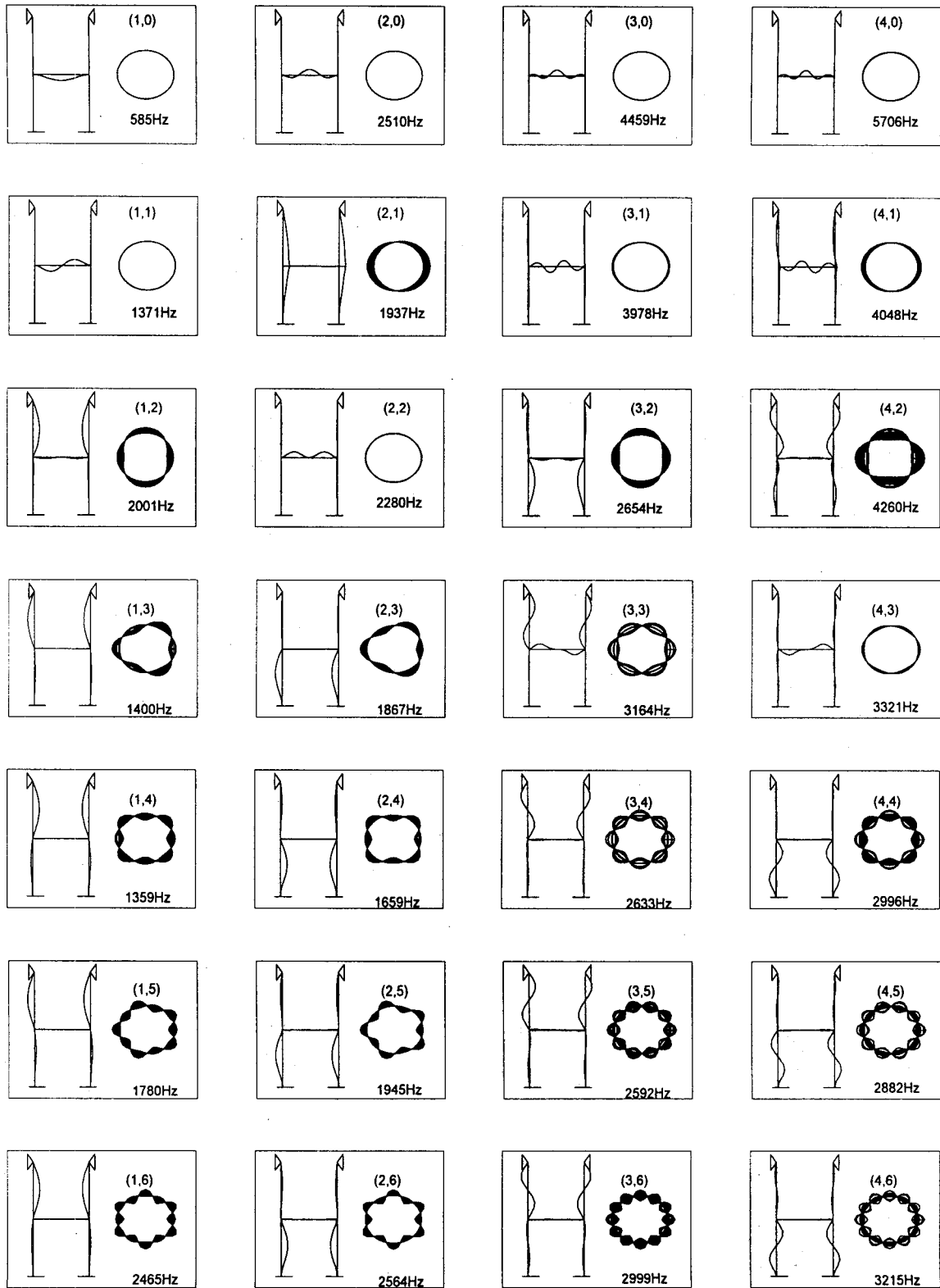


Fig. 2 Mode shapes of C-S shell with a plate at middle

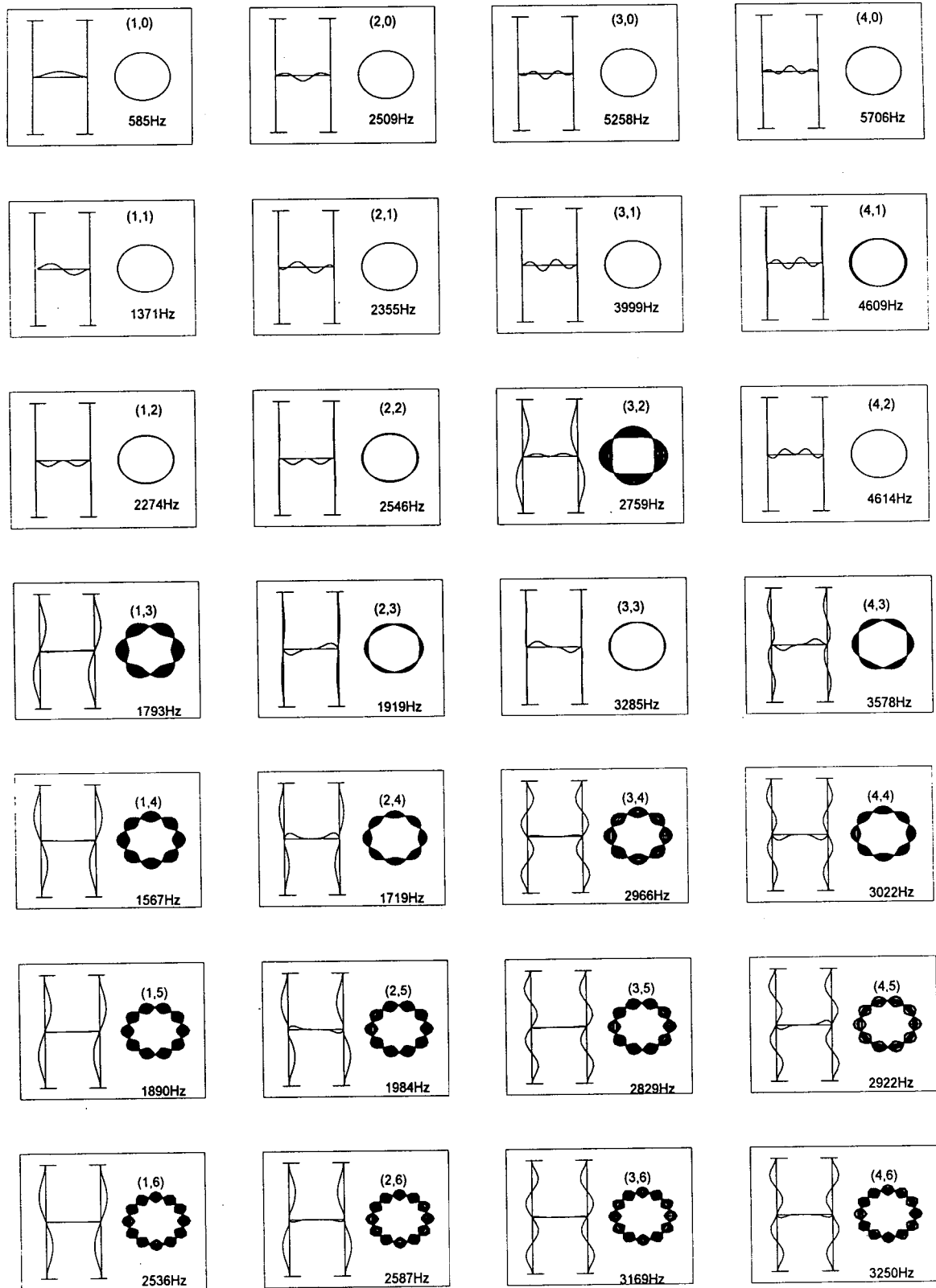


Fig. 3 Mode shapes of C-C shell with a plate at middle

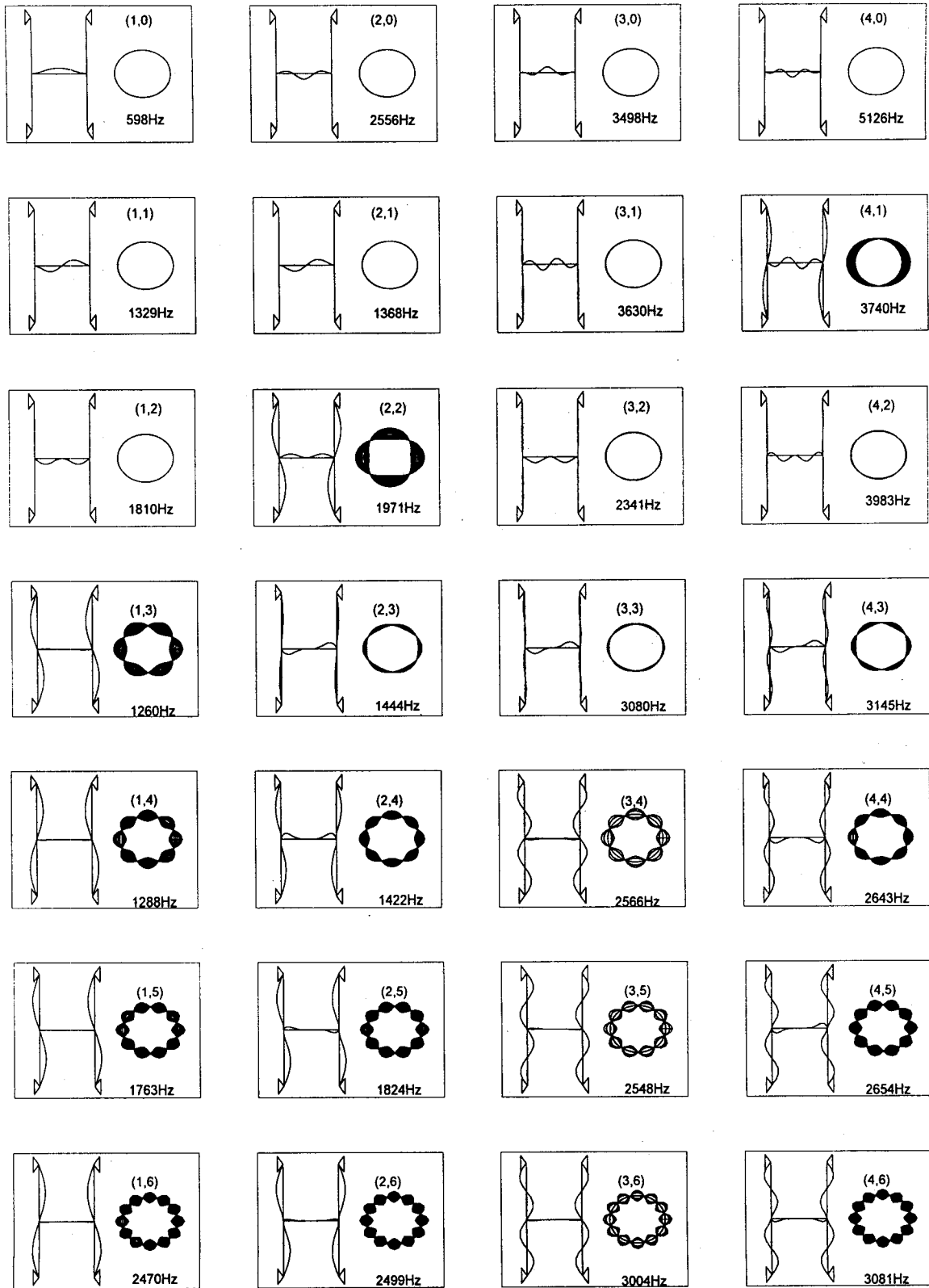


Fig. 4 Mode shapes of S-S shell with a plate at middle

결과는 FORTRAN 프로그램을 통해 개인용 컴퓨터로 얻었으며 이를 ANSYS의 결과와 비교하면 Table 1~4와 같다. ANSYS의 해석결과는 고유진동수의 오름차순으로 출력이 되고 해당하는 모드에서의 진동수를 식별하는 것은 모드형상 추출에 의한 후처리 결과를 얻어야만 가능하다. 그러나 이것도 높은 진동수의 경우 모드형상을 분명히 식별하는 것은 곤란하므로 Table에서 고차 모드의 진동수는 명백한 모드형상이 확인된 것을 제외하고 빈칸으로 두었다. 진동수 방정식에서 얻은 고유진동수에 해당하는 모드형상을 구별하기 위하여 구한 각 경계조건에 따른 조합 구조물의 모드형상을 나타내면 Figs. 1~4와 같다. 모드 형상을 보이는 이들 그림에서 원판과 원통 셀의 변위는 각각의 축방향 및 원주방향 파수에서 최대가 되는 변위를 반경 및 셀 길이의 15%에 정규화 시켜 나타낸 것이므로 원판과 셀의 변위가 정확히 1:1로 나타나지는 않았으며 어느 모드가 지배적인지를 보이기 위해 변위를 과장하여 나타낸 것이다.

Fig. 5와 Fig. 6은 저차의 모드인 축방향 반파 수 $M=1$ 과 $M=2$ 에서 원주방향 파수 N 에 따라 변화하는 경계조건 별 고유진동수 변화를 보여주고 있다. 원판이 없는 원통 셀의 고유진동수의 변화는 Fig. 5, Fig. 6에서 보는 것과 같이 포물선 변화를 하며 진동수의 크기는 고정-고정, 고정-단순, 단순-단순, 고정-자유의 순으로 낮아짐을 보인다. 그러나 원판이 원통 셀의 축방향 중간에 부착될 경우는 각각의 조합모드 형상에 따라 진동수의 변화가 서로 다를 수 있다.

$M=1$ 이고 $N=0$ 모드에서 원판의 진동수는 원통

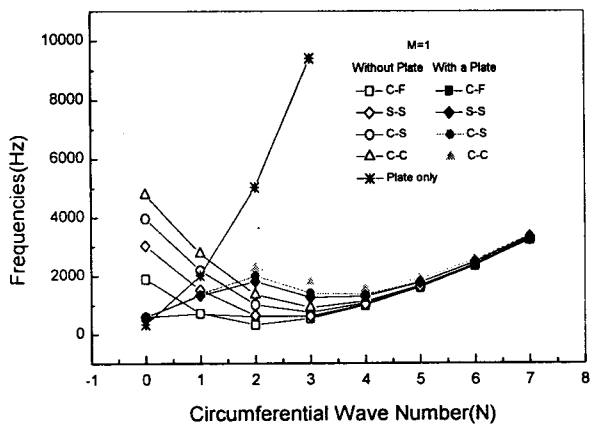


Fig. 5 Natural frequencies as functions of circumferential wave numbers and boundary conditions for $M=1$

셀의 높은 진동수의 영향을 받아 다소 높아지지만 이 진동모드는 원판의 지배진동이므로 진동수는 원판의 진동수에 가까운 진동수를 보인다. $M=1$ 이고 $N=1$ 에서는 높은 원판의 진동수가 셀의 영향으로 낮아지지만 고정-자유 경계조건에서의 원통 셀의 진동모드는 원통 셀의 흔들림(swaying) 모드에 의해 원통 셀의 진동수에 종속되며 기타의 경계조건에서는 원판의 지배진동 모드에 기인하여 거의 동일한 진동수를 보인다.

$N=2$ 에서는 원판의 높은 진동수는 원통 셀의 진동에 연성되어 원통 셀의 진동수에 가깝게 감소되는 반면 역으로 원통 셀의 진동수는 원판의 높은 진동수의 영향으로 인해 큰 진동수의 증가를 나타내고, 고정-자유 경계조건에서는 원통 셀 자체의 흔들림 모드에 기인하여 다른 경계조건에 비해 상대적으로 진동수의 증가가 크지 않음을 보인다. 원주방향 파수 N 이 증가할수록 모드 형상에서 보는 것과 같이 원통 셀의 진동모드가 지배적이 되어 조합 구조물의 진동수는 원판의 진동수에 영향을 받지 않는 원통 셀만의 진동수에 접근함을 보인다. 여기서 사용된 제원과 물성에 의한 해석 결과는 저차 모드일수록 원판의 고유진동모드가 지배적이고 고차 모드가 될수록 원통 셀의 고유진동모드가 지배적임을 알 수 있다. 이러한 진동수의 변화는 축방향 반파 수 $M=2$ 에서도 같은 경향을 보인다.

따라서 지금까지 원판의 결합에 의해 나타나는 조합 원통 셀의 고유진동수의 변화를 통하여 원판의 결합에 의한 조합구조물의 고유진동수는 어느 부품의 모드가 지배적인가에 따라 다르게 나타나므로 구조설계자의 관심이 되는 저차 진동에서 공진을 피하

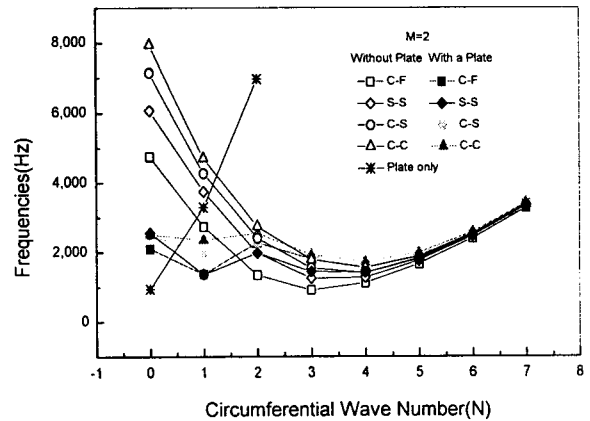


Fig. 6 Natural frequencies as functions of circumferential wave numbers and boundary conditions for $M=2$

기 위해 원판과 셀의 경계조건 및 제원을 사전에 검토하여 설계에 반영할 수 있을 것으로 보인다.

4. 결 론

외팔 경계조건을 갖는 원통 셀뿐만 아니라 산업현장에서 접할 수 있는 몇 가지 비대칭 경계조건을 갖는 원통 셀의 축 방향 임의 위치에 원판이 결합되어 있을 경우의 고유진동 해석을 동적응답법을 사용하여 해석할 수 있도록 이론적인 수식전개를 거쳐 수치해를 얻을 수 있는 프로그램을 작성하여 수치해를 얻었다.

유한요소 범용 해석 코드인 ANSYS를 이용하여 해석할 경우 유한요소 분할을 비롯한 입력을 준비하는 시간이 많이 소요되는 반면 해석적 방법을 이용할 경우 해석 대상물의 제원과 물성을 입력하므로써 간단히 해석할 수 있는 장점이 있고 또 해석 후의 고유진동수와 모드형상의 일치를 위한 후처리 출력 결과의 분석에도 ANSYS에서는 하나 하나의 모드형상을 출력하여 일일이 구분해야 하는 불편함이 있으나 해석적 방법에서는 요구되는 모드의 진동수 및 모드형상을 직접 구분하여 구할 수 있는 장점을 갖는다.

계산의 예로서 중간에 원판이 결합된 경우의 진동수 및 고유진동 모드형상을 얻고 이론해로부터 얻은 수치결과를 범용의 유한요소 코드인 ANSYS 코드 해석의 결과와 비교하여 이론적 수치해의 타당성을 검토한 후 각 각의 경계조건에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다. 이들 결과에 대한 검토 고찰을 통하여 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 이론해석으로 얻은 고유진동수와 모드 형상은 유한요소 해석결과와 상응하므로써 수식의 타당성을 입증하고 있다.
- (2) 조합 구조물의 진동수는 원판이나 원통 셀의 지배진동 모드에 종속됨을 보인다. 여기서 사용된 제원을 갖는 원판이나 원통 셀의 계산결과 $N=0, 1$ 모드는 원판의 지배진동 모드이므로 경계조건에 관계없이 조합원통 셀의 고유진동수는 원판의 진동수에 크게 의존함을 보인다.
- (3) 원주방향 파수가 증가할수록 원통 셀의 진동이 지배적이 되어 원판 결합이 진동수에 주는 영향은 감소한다.
- (4) 여기서 개발된 프로그램을 이용하여 원판이 결합된 조합 원통 셀의 고유진동수 및 모드형상을 원판 또는 원통 셀의 제원이나 경계조건을 조합하여

사전에 알 수 있고 이를 통하여 조합구조물의 공진 회피를 위한 해석에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- (1) Shkarov I.E., 1962, "Use of the Method of Dynamic Rigidities for Calculating the Frequencies of Natural Vibration of Built-up Shells," NASA Technical Translation F-341, pp. 797~805.
- (2) Faulkner, L., 1969, Ph. D., Thesis, *Purdue University*, "Vibration Analysis of Shell Structures Using Receptances".
- (3) Soedel, W., 1993, "Vibration of Shells and Plates," *Marcel Dekker Inc.*, New York, 2nd edition.
- (4) Huang, D. T. and Soedel, W., 1991, "Natural Frequencies and Modes of a Circular Plate Welded to a Circular Cylindrical Shell at Arbitrary Axial Positions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, No. 3, pp. 403~427.
- (5) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "On the Free Vibration of Multiple Plates Welded to a Cylindrical Shell with Special Attention to Mode Pairs," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, No. 2, pp. 315~339.
- (6) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "Study of the Forced Vibration of Shell-Plate Combinations Using the Receptance Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, No. 2, pp. 341~369.
- (7) Azimi, S., Soedel, W. and Hamilton, J. F., 1986, "Natural Frequencies and Modes of Cylindrical Polygonal Ducts Using Receptance Methods," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, No. 1, pp. 78~88.
- (8) Mead, D. J. and Lee, S. M., 1984, "Receptance Methods and the Dynamics of Disordered One-Dimensional Lattices," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 92, No. 3, pp. 427~445.
- (9) 임정식, 이영신, 손동성, 1997, "원판이 결합된 외팔 원통 셀의 고유진동 특성," *한국소음진동공학회지*, 제 7 권, 제 2 호, pp. 331~346
- (10) Yim J. S, Sohn D. S and Lee Y. S., 1998.

"Free Vibration of Clamped-Free Circular Cylindrical Shell with a Plate Attached at an Arbitrary Axial Position," *Journal of Sound and Vibration*, Vol 213; No.1, pp. 75~88.

- (11) Yim, J. S., Lee, Y. S. and Sohn, D. S., 1996, "Free Vibration Analysis of Clamped-Free and Clamped-Free with Ring Stiffened Circular Cylindrical Shells", *Advanced in Computational Method for Simulation, Civil Comp. Press*,

Edinburgh, pp. 247~262.

- (12) 임정식, 1996, "일단고정-일단자유 원통 쉘의 고유진동 해석", *한국소음진동공학회지*, 제 6 권, 제 1 호, pp. 45~56.
 (13) Sharma, C. B., 1974, "Calculation of Natural Frequencies of Fixed-Free Circular Cylindrical Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 35, No. 1, pp. 55~76.

기 호 설 명

a : 원통 쉘의 반경
 A, B, C : 축방향, 원주방향, 반경방향 변위에 대한 미지 상수
 E, E_p : 쉘과 원판의 영률(Young's modulus)
 $f_i, i=1,2,3$: 쉘/원판 결합부의 동적 구속력
 f_i^* : 축방향 좌표 x^* 에서 작용하는 동적 구속력
 F_3 : 원판 결합부에 작용하는 동적 구속력의 크기
 h_p, h_s : 원통 쉘과 원판의 두께
 I_n, I_{n+1} : 수정 1차 Bessel 함수
 J_n, J_{n+1} : 1차 Bessel 함수
 k : 모드 수
 L : 쉘의 길이
 M_1 : 원판이 결합된 부위에 작용하는 모멘트 크기
 M_p : 원판의 질량
 n, \hat{n} : 원주방향 모드 수
 r : 반경방향 원판의 좌표
 t : 시간
 U_3^P : 원판의 횡방향 변위
 $u_i, i=1,2,3$: 쉘의 변위
 $U_{ik}, i=1,2,3$: k 모드의 i 방향으로의 쉘 변위

u_3^P : 원판의 횡방향 변위
 u_3^P, u_3^S : 원판 및 쉘의 횡방향 변위
 U_{3mn}^P : 원판의 m, n 모드에서의 횡방향 변위
 v, V : 쉘의 접선방향 변위
 w, W : 쉘의 표면에 수직인 방향으로의 변위
 x, x^* : 쉘의 축방향 좌표
 z : 쉘의 표면에 수직인 방향의 좌표
 α_1, α_2 : 쉘의 일반화 좌표
 α_{ij} : 쉘의 동적 응답
 β_{ij} : 원판의 동적 응답
 β^S : 원판이 결합된 부위의 쉘의 기울기
 λ : 원판의 고유치
 $\phi, \phi(x), \phi', \phi'(x)$: 보 함수, 보 함수의 적분
 ρ, ρ_p : 쉘과 원판의 질량
 θ : 원판과 쉘의 각 좌표
 ω_c : 입력 주기함수의 각 진동수
 ω_{imn} : 쉘의 n, m 모드에서의 i 번째 고유진동수
 ω_k : k 번째 모드의 고유진동수
 ω_p : 원판의 고유진동수