

<논 문>

멀티스팬 빔의 진동특성에 관한 연구

A Study on the Vibration Characteristics of Multi-span Beams

홍진선*

Jin Sun Hong

(1998년 5월 14일 접수 : 1998년 8월 31일 심사완료)

Key Words : Multi-Span Beam(멀티스팬 빔), Natural Mode(고유모드), Concentrated Mass(집중 질량), Concentrated Rotational Inertia(집중 회전 관성), Linear Spring(병진 스프링), Torsional Spring(비틀림 스프링)

ABSTRACT

Several reactor system components, such as heat exchange tubes, fuel fins, control rods, and various instruments are beam-like components. This study presents a simple solution method for calculating the natural frequencies and modes of beams supported by linear and torsional springs and attached concentrated mass and rotational inertia at some intermediate points. For a general multi-span beam, theoretical method is proposed to analyze the exact solution about vibrational characteristics with respect to the nondimensional parameters. And the results obtained using the numerical models are presented and discussed.

1. 서론

현재까지 보의 진동특성에 관한 연구는 많이 수행되어 왔으나 대부분 단순한 형상의 보에 국한되었으며, 오차가 크거나 계산시간이 너무 많이 소요되어 설계단계에 직접 적용하기에는 곤란한 경우가 많았다. 보의 진동에 관하여 수행된 연구의 대부분은 하나 또는 다수의 집중질량이 결합된 보의 진동해석^(1,2), 중간이 탄성적으로 지지된 보의 해석^(3,4), 그리고 이상의 두 가지가 복합된 보의 해석⁽⁵⁻⁷⁾에 관한 연구가 근간을 이루고 있으며 비교적 단순한 형상의 보에 관한 연구이거나 근사해법에 의한 연구였다.

또한 보의 진동해석에 관하여 지금까지 수행되어

온 연구의 해석방법을 구분하면 크게 세 가지로 나눌 수 있다. 첫 번째 해석방법은 경계조건을 만족하는 직교함수의 전개식을 이용하는 방법이며 그 다음의 해석방법은 레일리-리쯔(Rayleigh-Ritz)의 방법, 또는 갤러킨(Galerkin)의 방법등을 이용한 근사해석 방법이다. 그리고 세 번째의 해석방법은 중간의 탄성 지지점에서 구간을 나누어 해석하고 분할된 위치에서 힘과 변위의 연속조건을 이용하는 방법이다. 이 방법에 의하면 엄밀해를 구할 수는 있으나 분할점마다 네 개의 경계조건이 추가되어 보를 분할하는 갯수에 따라 계산량이 급격히 증가하게 된다.

복잡한 구조물의 진동특성을 해석하는 방법으로는 유한요소법이 널리 활용되고 있지만 이러한 수치해석적인 방법으로는 시스템의 설계변수와 그 영향을 조직적으로 파악하는 것이 대단히 어려우며 설계단계에 적용하기 위해서는 보다 효율적인 방법이 필요

* 정회원, 강릉대학교 공과대학 정밀기계공학과

하다고 하겠다.

이에 따라 본 연구에서는 병진 스프링과 회전 스프링으로 동시에 지지되어 있으며 다수의 집중질량과 회전관성이 결합된 멀티스팬 빔의 무차원 설계변수에 따른 진동특성의 엄밀해를 빠른 계산속도로 해석할 수 있는 이론적 진동해석 방법을 제시하였다. 그리고, 지금까지 연구되어 온 여러가지 해석모델에 적용하여 본 연구에서 이용한 해석기법의 타당성을 검증하였다.

2. 이론적 배경 및 해석

2.1 해석모델

본 연구에서는 Fig. 1과 같은 멀티스팬 빔의 굽힘진동을 해석하였다. k_i , t_i , M_i , 그리고 J_i 는 각각 i 번째 지지점에서의 병진스프링 상수, 회전스프링 상수, 집중질량, 그리고 집중회전관성을 나타내며 l_i , EI_i 와 m_i 는 각각 i 번째 스팬의 길이, 굽힘강성, 그리고 단위길이당의 질량을 나타낸다. Fig. 1의 해석모델에서 보의 길이가 단면의 크기에 비하여 매우 크다는 전제하에 본 연구에서는 보의 전단효과와 회전관성효과를 고려하지 않기로 한다.

2.2 운동방정식

Fig. 1에서 i 번째 스팬의 굽힘진동에 대한 식은

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + m_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x_i \leq l_i \quad (1)$$

로 되며 이 식의 해를 구하기 위하여

$$w_i(x_i, t) = W_i(x_i) \sin \omega t \quad (2)$$

로 가정하면 변위함수 $W_i(x_i)$ 는

$$W_i(x_i) = c_1 \cos p_i x_i + c_2 \sin p_i x_i + c_3 \cosh p_i x_i + c_4 \sinh p_i x_i \quad (3)$$

$$p_i^4 = \frac{m_i}{EI_i} \omega^2 \quad (4)$$

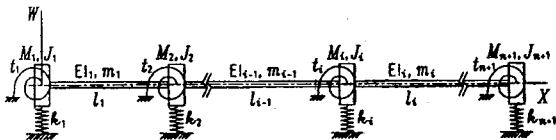


Fig. 1 Multispan beams with concentrated mass and rotational inertia

으로 구해진다.

i 번째 스팬의 양단을 각각 스테이션(station) i 와 스테이션 $(i+1)$ 로 나타내고 i 번째 스팬에서 가장 오른쪽과 가장 왼쪽 점에서의 변위 및 그의 미분계수를 각각

$$W_{(i+1)L}^{(n)} = \lim_{x_i \rightarrow l_i} \frac{d^{(n)} W_i}{d x_i^{(n)}}, \quad (5-a)$$

$$W_{iR}^{(n)} = \lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{d^{(n)} W_i}{d x_i^{(n)}}, \quad n=0,1,2,3 \quad (5-b)$$

으로 정의하기로 한다. 여기에서 $W_{(i+1)L}^{(n)}$ 은 스테이션 $(i+1)$ 의 바로 왼쪽에서 변위의 n 차 미분계수를 의미한다. 그리고 무차원화 된 식을 유도하기 위하여 무차원 고유진동수 계수와 무차원 변위 및 그의 미분계수를 각각

$$\Omega_i = p_i l_i, \quad (6)$$

$$y_{(i+1)L}^{(n)} = \frac{1}{p_i^n} W_{(i+1)L}^{(n)}, \quad (7-a)$$

$$y_{iR}^{(n)} = \frac{1}{p_i^n} W_{iR}^{(n)}, \quad n=0,1,2,3 \quad (7-b)$$

으로 정의하기로 한다.

이제 식 (3)을 식 (5-a)와 식 (5-b)에 대입하여 8개의 식을 유도하고 여기에서 c_1, c_2, c_3 , 그리고 c_4 를 소거하면 $W_{(i+1)L}^{(n)}$ ($n=0,1,2,3$)을 $W_{iR}^{(n)}$ 의 함수로 나타낼 수 있으며 다시 식 (6), (7-a), 그리고 (7-b)를 적용하면 4개의 무차원 식을 유도할 수 있다. $y_{iR}, y_{iR}', y_{iR}'',$ 그리고 y_{iR}''' 을 각각 스테이션 i 의 바로 오른쪽에서 무차원 변위 및 그의 1차, 2차, 3차 미분계수라고 하고 스테이션 벡터를

$$Y_{iR}^T = [y_{iR} \ y_{iR}' \ y_{iR}'' \ y_{iR}''']^T \quad (8)$$

로 정의하면 앞에서 언급한 4개의 무차원 식을 다음과 같은 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$Y_{(i+1)L} = F_i Y_{iR} \quad (9)$$

여기에서 행렬 F_i 는

$$2F_i = \begin{bmatrix} \text{co} + \text{ch} & \text{si} + \text{sh} & -\text{co} + \text{ch} & -\text{si} + \text{sh} \\ -\text{si} + \text{sh} & \text{co} + \text{ch} & \text{si} + \text{sh} & -\text{co} + \text{ch} \\ -\text{co} + \text{ch} & -\text{si} + \text{sh} & \text{co} + \text{ch} & \text{si} + \text{sh} \\ -\text{si} + \text{sh} & -\text{co} + \text{ch} & -\text{si} + \text{sh} & \text{co} + \text{ch} \end{bmatrix} \quad (10)$$

관성이 알려져 있으면 식 (18)에 의하여 Ω_1 을 계산해 낼 수 있다. 그리고 EI_1 과 m_1 , 그리고 보의 전체 길이 l 을 기준으로 한 무차원 고유진동수 계수 Ω 를

$$\Omega = \frac{l}{l_1} \Omega_1 \quad (19)$$

으로 정의하면 고유진동수는 다음의 식에 의하여 구할 수 있다.

$$\omega = \left(\frac{\Omega}{l} \right)^2 \left(\frac{EI_1}{m_1} \right)^{1/2} \quad (20)$$

단순경계조건을 갖는 보에 대해서는 병진스프링, 회전스프링, 집중질량, 그리고 회전관성에 영 또는 무한대의 수치를 적절히 대입하면 된다.

4. 수치해석 결과 및 검토

4.1 단순경계조건을 갖는 보

앞에서 유도한 식들을 이용하여 단순경계조건(자유, 단순지지, 완전고정, 그리고 슬라이딩의 조합으로 이루어진 열 가지 종류)을 갖는 보에 적용한 결과 이미 알려진 해와 정확히 일치하는 것을 확인할 수 있었다.

4.2 Kovats의 모델

Fig. 2는 Kovats⁽⁵⁾가 수직축류펌프 상부구조물의 진동해석에 적용했던 모델로서 외팔보의 중간이 탄성적으로 지지되어 있고 자유단에 집중질량이 결합된 형태이며 $l_2/l_1=1$, $EI_2/EI_1=1$, $m_2/m_1=1$, $M/m_1l_1=1$, 그리고 $kl_1^3/EI_1=80$ 이다. Kovats는 l_2/l_1 의 크기에 따른 1차 고유진동수만을 구하여 그래프로 나타내었으며 $l_2/l_1=1$ 인 경우의 1차 고유진동수 계수는 대략 1.4로 판독된다. Pak⁽⁷⁾은 이 모델을 두 개의 보로 나누어 각각의 운동방식에 여덟 개의 경계조건을 적용하여 고유진동수를 계산한 바 있다. Table 1은 본 해석방법을 이용하여 구한 고유진동수 계수 Ω 를 Pak의 결과와 비교하여 보여주고 있으며 서로 일치하고 있다는 것을 확인할 수 있다.

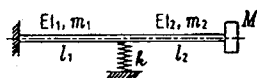


Fig. 2 Kovats' model for vertical pump

Table 1 Nondimensional natural frequency coefficient Ω of Kovats' Model

	Analysis	Pak ⁽⁷⁾
Mode 1	1.58712	1.5871
Mode 2	4.54441	4.5444
Mode 3	7.15020	7.1502
Mode 4	10.28874	10.289
Mode 5	13.38999	-----

4.3 집중질량을 갖는 탄성지지보

Fig. 3은 집중질량과 집중회전관성이 결합된 외팔보에서 지지부의 강성을 병진스프링과 회전스프링으로 모델링한 경우를 보여주고 있다. 이 모델의 고유모드를 해석하기 위한 무차원 변수로는 $kl^3/EI=1$, $tl/EI=1$, 그리고 $J/ml^3=1$ 이며 M/ml 의 변화에 따른 고유진동수를 계산한 결과는 Table 2와 같다. 이 표에서 M/ml 의 값이 0, 0.01, 0.1, 그리고 1.0인 경우에 대한 첫 번째 고유진동수 계수는 이미 알려진 결과⁽⁸⁾가 있으며 서로 비교하여 본 결과 일치함을 확인할 수 있었다.

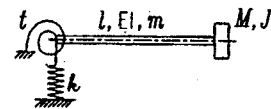


Fig. 3 Elastically supported beam carrying a mass at its free end

Table 2 Frequency coefficient Ω of an elastically supported cantilever beam carrying a mass at its free end

M/ml	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
0.00	0.79571	1.02607	2.70148	5.66512	8.74388
0.01	0.79423	1.02483	2.69226	5.62839	8.70275
0.10	0.78116	1.01574	2.62303	5.44897	8.45886
0.50	0.73029	0.99055	2.46621	5.15337	8.16105
1.00	0.68200	0.97759	2.38788	5.04657	8.07766

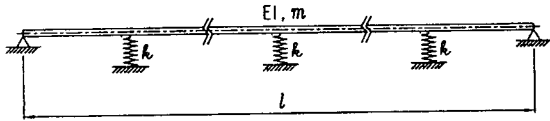


Fig. 4 Simply supported beam with spring at intermediate points

Table 3 Frequency coefficient Ω of a simply supported beam with springs at intermediate points

Span	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
1	3.14159	6.28319	9.42478	12.56637	15.70796
2	4.13154	6.28319	9.48512	12.56637	15.72092
3	4.45929	6.56216	9.42478	12.60443	15.72733
4	4.72019	6.65119	9.54110	12.56637	15.73388
5	4.94262	6.73516	9.57031	12.62857	15.70796

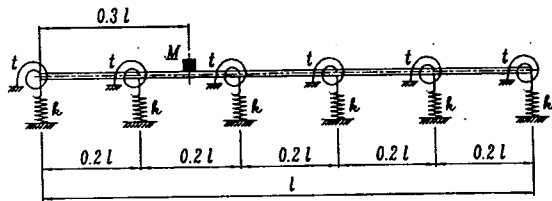


Fig. 5 A beam supported by linear and rotational springs and carrying a concentrated mass at $x = 0.3l$

4.4 중간이 스프링으로 지지된 단순지지보

Fig. 4는 단순지지된 균일보의 중간에 설치된 지지부의 탄성을 스프링으로 고려한 모델을 보여주고 있다. 스프링의 간격이 동일한 경우에 이 모델의 고유진동수는 오직 스프링의 갯수와 무차원 변수 kl^3/EI 에 따라서만 결정되며 $kl^3/EI=100$ 인 경우에 스패의 갯수에 따라 구한 고유진동수 계수 Ω 는 Table 3과 같다. 이 표에서 스패의 갯수가 1인 경우는 단순지지보의 고유진동수 계수와 일치함을 알 수 있다.

4.5 병진스프링과 회전스프링으로 지지된 보

Fig. 5는 $x=0.3l$ 되는 위치에 집중질량 M 을 갖는 균일보로서 등간격으로 된 여섯 개의 지지부를 병진스프링과 회전스프링으로 모델링한 경우이다.

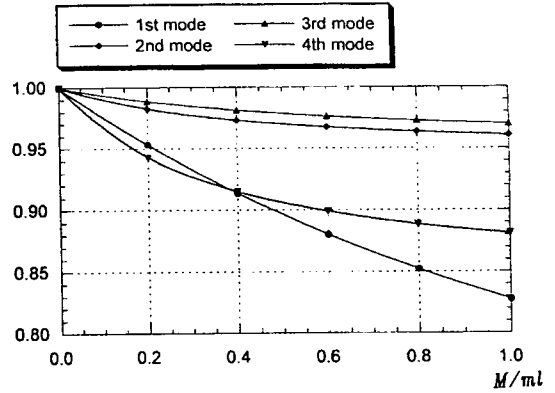
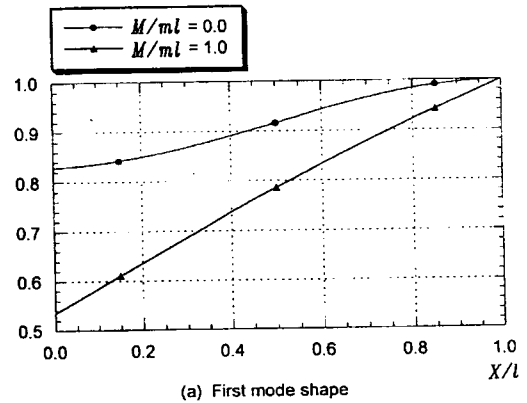
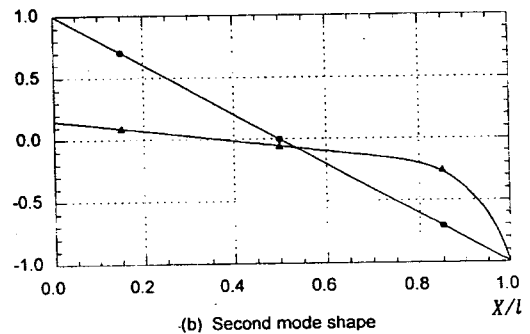


Fig. 6 Frequency ratio of model of Fig. 5



(a) First mode shape



(b) Second mode shape

Fig. 7 Mode shape of the model of Fig. 5 (I)

이 모델의 고유진동수는 오직 무차원 변수 M/ml , kl^3/EI , 그리고 t/EI 의 크기에 따라 결정된다. $M/ml=0$, $kl^3/EI=1$, 그리고 $t/EI=0.1$ 인 경우의 고유진동수 계수는 1.5644, 1.9838, 4.8292, 7.8989, 11.0234 등으로 구해졌다. 이 경우의 각 모드의 고유진동수 계수를 1.0으로 두고 M/ml 의 크기에 따른 각 모드의 고유진동수 계수의 변화를 나

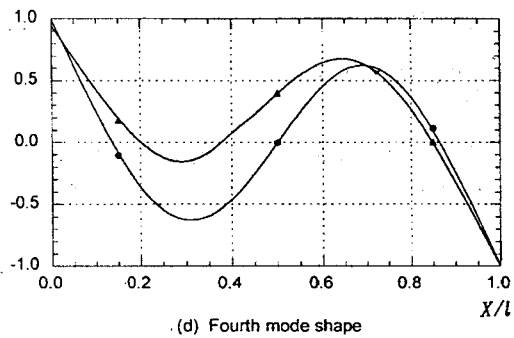
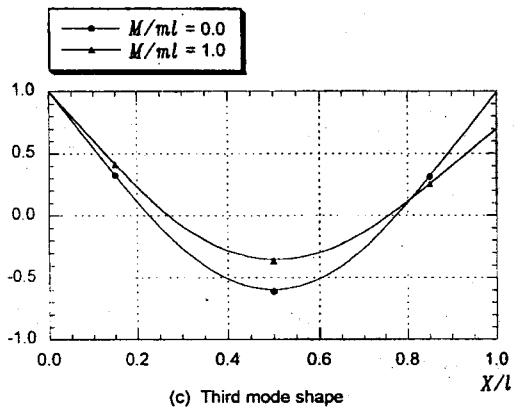


Fig. 7 Mode shape of the model of Fig. 5 (II)

타내면 Fig. 6과 같다. 그리고 진폭의 최대치를 1.0으로 설정하고 정규화하여 계산한 고유모드를 도시한 결과는 Fig. 7과 같다.

5. 결 론

본 연구에서는 중간에 다수의 지지점과 집중질량, 그리고 집중 회전관성을 갖는 보의 굽힘진동에 관한 이론적인 해석을 하였다. 중간또는 양단의 지지점을 병진스프링과 회전스프링으로 모델링하였으며 각 스패의 길이, 굽힘강성, 단위길이당의 질량과 집중질량, 그리고 집중회전관성의 크기에 따른 이론해를 무차원 변수로 나타내었다. 병진스프링, 회전스프링, 집중질량, 그리고 집중회전관성을 나타내는 무차원 변수의 크기만 조정하면 자유, 단순지지, 완전고정, 슬라이딩등 일반적인 지지조건 및 경계조건을 갖는 보에 대해서도 쉽게 적용할 수 있다.

본 연구의 해석방법에 의하면 굽힘강성 및 단위길이당의 질량이 변하며 복잡한 지지조건을 갖는 보의 고유진동수와 고유모드를 매우 적은 계산량과 빠른

시간내에 무차원 변수의 크기에 따라 정확히 계산해 낼 수 있으므로 본 연구의 결과는 무수한 반복계산이 요구되는 보의 설계단계에 널리 활용될 수 있을 것이다.

후 기

이 연구는 1996학년도 강릉대학교 학술연구비의 지원에 의하여 수행되었음.

참 고 문 헌

- (1) Wu, J. S. and Lin, T. L., 1990, "Free Vibration Analysis of Uniform Cantilever Beam with Point Masses by an Analytical-and-Numerical-Combined Method", J. of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 2, pp. 201~213.
- (2) Hussaini, M. Y., 1975, "On Free Vibrations of Finite Beams with Partially Fixed End conditions Carrying Masses", ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 42, No. 3, pp. 735~746.
- (3) Chung, H., 1981, "Analysis Method for Calculating Vibration Characteristics of a Beam with Intermediate Supports", Nuclear Engineering and Design, Vol. 63, pp. 55~80.
- (4) Rao, C. K., 1989, "Frequency Analysis of Clamped-Clamped Uniform Beams with Intermediate Elastic Support", J. of Sound and Vibration, Vol. 133, No. 3, pp. 502~509.
- (5) Kovats, A., 1962, "Vibration of Vertical Pump", ASME J. of Engineering for Power, Vol. 84, pp. 195~203.
- (6) Lee, J. M., Pak, C. G., and Hong, J. S., 1986, "Coupled Bending Vibrational Characteristics of an Idealized Vertical Pump Model", Proceedings of the 4-th International Modal Analysis Conference, Vol. 2, pp. 877~883.
- (7) Pak, C. G., 1982, "Free Lateral Vibration Analysis of Double-Span Beam", Master Thesis, S.N.U.
- (8) Magrab, E. B., 1979, Vibration of Elastic Structural Members, Sijthhoff & Noordhoff Inc., Maryland.