

회전 블레이드의 진동 특성

유 홍 희

(한양 대학교 기계공학부)

1. 머리말

회전 운동을 하는 블레이드는 항공기 회전익, 터빈 및 터보 엔진 등 여러 가지 공학적 예제에서 발견할 수 있다. 이러한 구조물의 신뢰성 있는 설계를 위해서는 그 진동 특성을 정확하고 효과적으로 파악하는 것이 필수적이다. 회전 운동은 블레이드의 진동 특성에 현격한 변화를 초래하므로 이에 관한 연구가 오래전부터 이루어져 오고 있다.

Southwell과 Gough는⁽¹⁾ 회전하는 보의 고유진동수를 계산할 수 있는 해석적인 모델을 최초로 제시하였다. Rayleigh 에너지 이론을 이용하여 이들이 제시한 모델은 Southwell 방정식이라 불리우며 오늘날도 많은 엔지니어들에 의해서 사용되고 있다. 그 후에 Schihansl⁽²⁾은 회전하는 보의 운동방정식을 유도하고 Ritz 방법을 적용하여 Southwell 식의 정확도를 향상시킬 수 있었다. 이러한 초기의 연구는 컴퓨터가 본격적으로 사용되기 전에 이루어진 해석적 방법들로 간명성과 사용 편의성이 뛰어나나 정확도와 모델의 다양성에서 한계를 가지고 있었다. 그런데 1970년도 이후 컴퓨터가 본격적으로 사용되기 시작되면서 회전 블레이드의 진동에 관한 연구 분야에는 많은 수치 해석적 연구결과들이 나타나기 시작 하였다. 예를들어 Putter 와 Manor⁽³⁾ 그리고 Bauer⁽⁴⁾ 등은 수치적인 근사화 방법을 사용하여 회전하는 보의 진동 특성을 해석하였으며, 많은 다양한 효과들을 고려한 연구결과들이 발표되었다. 끝단 질량

의 효과^(5,6), 고정단의 탄성변형 및 단면변화 효과⁽⁷⁾, 전단 효과⁽⁸⁾, 그리고 블레이드의 초기 비틀림각 및 장착각 효과⁽⁹⁾ 등이 진동 특성에 미치는 영향이 연구되었다. 이 분야와 관련된 대표적 문헌조사 논문으로는 참고문헌 (10)과 (11)이 있다.

본 글에서는 회전하는 블레이드의 진동 특성을 조사하기 위한 방법론에 대한 소개와 더불어 진동 특성에 영향을 주는 무차원 매개변수들을 소개하고 이들이 진동특성에 미치는 영향을 보이려 한다. 여기서 방법론이란 진동 해석을 위한 방정식의 유도과정을 의미하며 또한 소개하려 하는 무차원 매개변수들은 블레이드의 회전 각속도, 축 반경, 블레이드 초기 비틀림각, 부가 질량, 부가질량의 위치, 블레이드의 장착각, 세장비, 그리고 주축방향 굽힘강성비 등과 관련된다. 마지막으로 본 논문에서는 기존 연구에서는 거의 다루어지지 않은 인장방향 진동과 굽힘방향 진동간의 연성 효과에 대해 소개하려고 한다. 이 연성 효과는 세장비가 작은 블레이드가 고속 회전하는 경우에 그 영향이 기존 해석의 정확도에 현격한 영향을 준다. 이상의 무차원 매개변수들의 진동특성에 대한 영향은 회전 블레이드를 갖는 기계 구조물을 설계하려는 엔지니어들에게 중요한 지표와 방향을 제시할 수 있을 것으로 사료된다.

2. 본 론

2.1 해석 방법론

회전운동을 하는 블레이드 진동 해석을 위한 가장 오래된 접근 방법은 Southwell에

의한 해석적인 방법이다. Southwell 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\omega_{mi}^2 = \omega_{bi}^2 + S_i \Omega^2 \quad (1)$$

여기서 ω_{bi} 와 ω_{mi} 는 각각 회전하지 않을 경우와 회전할 경우의 블레이드의 i 번째 고유진동수를 나타내며 Ω 는 블레이드의 회전각속도를 그리고 S_i 는 Southwell 상수를 각각 나타낸다. 따라서 이 방정식은 Southwell 상수 S_i 와 무회전시 블레이드의 고유진동수들만 알면 쉽게 적용할 수 있다. 그러나 이 방법은 블레이드의 여러가지 형상에 따라 Southwell 상수 S_i 를 정확히 알고 있어야 하는 문제점을 안고 있다. 현재까지는 주로 축반경비와(축반경대 블레이드 길이비) 장착각의 변화에 따른 Southwell 상수 S_i 의 함수가 문헌상에 [참고문헌 (12~14) 참조] 알려져 있다. 그러나 이 방법은 해석 정확도와 다양한 블레이드 형상에 대한 한계성 등의 문제점을 갖는다.

컴퓨터의 발달과 더불어 가장 많이 사용되고 있는 방법은 진동 방정식의 고유치 문제에 근거한 모드 해석 방법이다. 이 방법은 Southwell 방법에 비해 정확도가 향상되며 모드 형상도 구할 수 있는 장점이 있다. 블레이드와 같은 연속체의 경우 운동 방정식은 편미분 방정식으로 주어지는데 이를 상미분 방정식으로 근사화 하기 위해서는 유한요소법과 같은 국부영역 근사화 방법과 가상 모드법과 같은 전체영역 근사화 방법들이 사용되고 있다. 그런데 회전하는 블레이드의 운동 방정식이 블레이드 특성을 올바르게 예측하려면 전통적 방법에서는 탄성학적으로 기하학적 비선형성까지가 고려되어야 하는데 이것이 이 문제를 복잡하게 한다. 기하학적 비선형성이 고려되지 않을 경우(즉 고전적 선형 탄성 모델링을 사용할 경우) 블레이드 회전시 발생될 수 있는 문제점은 참고문헌 (15)에 설명되어 있다. 따라서 회전하는 블레이드의 진동 해석을 위해 일반적으로 현재까지 나타난 거의 모든 문헌들은 상기한 비선형 모델링에 근거하여 다음에 소개될 두가지 방법 중 하나를 통상 사용하고 있다.

비선형 모델링에 근거한 전통적 방법중 첫째 방법은 블레이드의 회전시 발생하는 일정 크기의 응력을(혹은 변위율을) 블레이드의 탄성에너지 표현에 대입해 사용하는 방법이다. 이 방법은 대부분의 문헌에서 사용하고 있고 유한요소법과 같은 근사법을 사용할 때 적절한데 먼저 Steady-state 상태에서 그 일정 응력을 구한 후 이 값을 다시 사용하면 된다. 두 번째 방법은 실상 첫 번째 방법과 본질적으로는 동일한 방법으로 비선형 편미분 운동 방정식을 인장 방향과 굽힘방향으로 모두 유도한 후 인장 방향 방정식에서 인장 방향 변위율과 원심력간의 관계를 구한 후 이를 굽힘방향 운동 방정식에 대입해 선형 방정식을 구한 후 해석을 수행하는 방법이다. 이에 대한 내용은 참고문헌 (16)에 잘 설명되어 있다.

최근 상기한 전통적 방법들과 다른 블레이드 진동 해석을 위한 동적 모델링 방법이 제시되어졌다. 이 방법은 전통적 방법과 달리 탄성 변형을 나타내는 변수로 직교 변수가 아닌 변수를 섞어 사용한다는 점에서 그 특징이 있으며 그 결과 모든 운동 방정식이 선형으로 주어지나 그럼에도 불구하고 상기한 비선형 모델링과 동일한 해석 결과를 제공하는 것이 증명되었다[참고문헌 (17) 참조]. 따라서 이 방법은 진동 해석을 위해 전통적 방법에서 이루어지는 Steady-state에 대한 응력값을 구하고 이를 대입하는 과정이 불필요하며, 또한 시간에 따른 블레이드의 동적 변형을 조사하는 과도 해석도 쉽게 수행할 수 있게 하였다. 특히 이 방법은 진동해석시 전통적 방법에서는 불가능하던 인장 방향 방정식과 굽힘방향 방정식 간의 연성효과도 고려할 수 있게 되었다[참고문헌 (18) 참조].

2.2 운동 방정식

설명된 편의상 본 절에서는 참고문헌 (17)과 (18)에 소개된 방법에 근거하고, 초기 비틀림각, 임의의 위치에 부착된 부가질량, 축반경, 블레이드 장착각, 주축 방향 굽힘강성비 등을 고려하여 블레이드의 진동 해석을 위한 방정식을 다루려고 한다. 이를 얻기 위한 자세한 진동 방정식의 유도 과정은 참고문헌 (19)를 참조할 수 있다.

그림 1은 초기 비틀림각을 갖는 블레이드의 모습을 보여준다. 여기서 θ_0 는 자유단의 고정단에 대한 초기 비틀림각을 의미한다. 또한 그림 2는 블레이드의 탄성축이 반경 r 인 축에 대해 장착되어 있는 모습을 보여준다. 블레이드의 장착각은 3 오일러 각으로 정의될 수 있는데 첫 번째 각은 Taper각 θ_1 으로 (\hat{s}_2 에 대한 회전) 나타내며, 두 번째 각은 Setting 각 θ_2 로 (\hat{s}_3 에 대한 회전) 나타낸다. 본 글에서 Stagger각은 사용치 않았다. 그 이유는 유도시 블레이드 단면과 관련된 면적 모멘트 값을 조정하여 Stagger각을 주는 것과 동일한 효과를 낼 수 있기 때문이다. 이들 오일러 각들을 이용해 정의된 방향 코사인 값들을 이용하면 그림 2의 두 좌표계는 다음 관계식으로 연관되어진다.

$$\hat{s}_1 = c_{11} \hat{a}_1 + c_{12} \hat{a}_2 + c_{13} \hat{a}_3$$

$$\hat{s}_2 = c_{21} \hat{a}_1 + c_{22} \hat{a}_2 + c_{23} \hat{a}_3$$

$$\hat{s}_3 = c_{31} \hat{a}_1 + c_{32} \hat{a}_2 + c_{33} \hat{a}_3$$

이 시스템의 운동 방정식을 유도하면 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} (K_{ij}^S - (c_{32}^2 + c_{33}^2)) \\ & \times \Omega^2 M_{ij}^{11} q_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} (c_{32} c_{31} \Omega^2 M_{ij}^{12} q_{2j} \\ & - 2c_{33} \Omega M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j}) + \sum_{j=1}^{\mu_3} (c_{33} c_{31} \Omega^2 M_{ij}^{13} q_{3j} \\ & + 2c_{32} \Omega M_{ij}^{13} \dot{q}_{3j}) = r(c_{33} c_{22} - c_{32} c_{23}) \\ & \times \Omega^2 P_{1i} + (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 Q_{1i} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + 2c_{33} \Omega \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} (K_{ij}^{E23} + c_{33} c_{32} \Omega^2 M_{ij}^{23}) q_{3j} \\ & - 2c_{31} \Omega \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{23} \dot{q}_{3j} + c_{31} c_{32} \Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{21} q_{1j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \{ (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 K_{ij}^{GE2} \\ & - r(c_{32} c_{23} - c_{33} c_{22}) \Omega^2 K_{ij}^{GA2} + K_{ij}^{E2} \\ & - (c_{33}^2 + c_{31}^2) \Omega^2 M_{ij}^{22} \} q_{2j} \\ & = r(c_{31} c_{23} - c_{33} c_{21}) \Omega^2 P_{2i} - c_{31} c_{32} \Omega^2 Q_{2i} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_3} M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + 2c_{31} \Omega \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{32} \dot{q}_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} (K_{ij}^{E32} + c_{32} c_{33} \Omega^2 M_{ij}^{32}) q_{2j} \\ & - 2c_{32} \Omega \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{31} \dot{q}_{1j} + c_{31} c_{33} \Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{31} q_{1j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \{ (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 K_{ij}^{GE3} - r(c_{32} c_{23} \\ & - c_{33} c_{22}) \Omega^2 K_{ij}^{GA3} + K_{ij}^{E3} \\ & - (c_{31}^2 + c_{32}^2) \Omega^2 M_{ij}^{33} \} q_{3j} \\ & = r(c_{32} c_{21} - c_{31} c_{22}) \Omega^2 P_{3i} - c_{31} c_{33} \Omega^2 Q_{3i} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, ϕ_{1i} 와 q_{1i} 는 인장방향 변형 관련 모드함수와 모드좌표이고, ϕ_{2i} 와 q_{2i} , 그리고 ϕ_{3i} 와 q_{3i} 는 각각 두 굽힘방향 변형 관련 모드함수들과 모드좌표들이다. 또한 μ_1 , μ_2 , 그리고 μ_3 는 인장 및 두 굽힘방향 모드함수들의 수를 나타낸다.

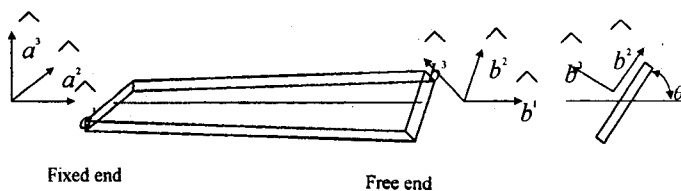


그림 1 Configuration of a pre-twisted blade

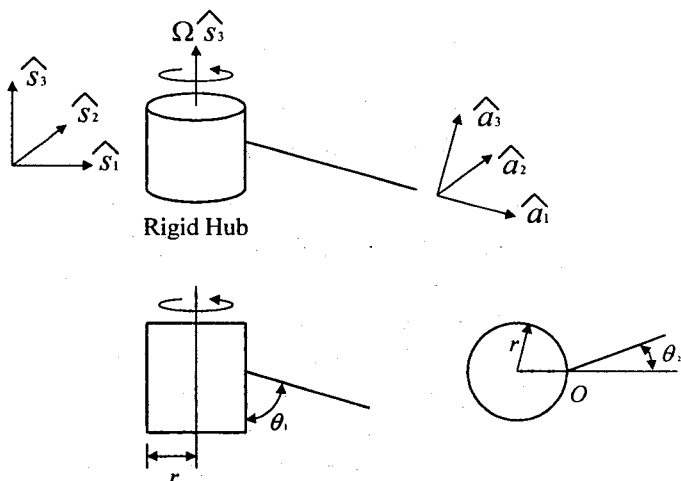


그림 2 Orientation of the undeformed neutral axis of the blade

$$\begin{aligned}
 M_{ij}^{ab} &\equiv \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx \\
 K_{ij}^{GAa} &\equiv \int_0^L \rho(L-x) \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \\
 K_{ij}^{GBa} &\equiv \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \\
 P_{ai} &\equiv \int_0^L \rho \phi_{ai} dx \\
 Q_{ai} &\equiv \int_0^L \rho x \phi_{ai} dx \\
 K_{ij}^S &\equiv \int_0^L EA \phi_{1i}' \phi_{1j}' dx \\
 K_{ij}^{I_2} &\equiv \int_0^L EI_3 \phi_{2i}'' \phi_{2j}'' dx \\
 K_{ij}^{I_3} &\equiv \int_0^L EI_2 \phi_{3i}'' \phi_{3j}'' dx \\
 K_{ij}^{Bab} &\equiv \int_0^L EI_{23} \phi_{ai}'' \phi_{bj}'' dx \quad (6)
 \end{aligned}$$

여기에서 ρ 는 블레이드의 단위길이당 질량, L 은 길이, E 는 영률, A 는 단면적, I_2 와 I_3 는 면적 관성모멘트, 그리고 I_{23} 는 면적 관성적을 각각 의미한다.

만일 블레이드의 탄성축상 $x=d$ 의 위치에 m 의 크기를 갖는 부가질량이 있다면, 운동 방정식중 다섯 가지 변수들이 다음과 같이 변화한다.

$$\begin{aligned}
 \widehat{M}_{ij}^{ab} &\equiv M_{ij}^{ab} + m \phi_{ai}(d) \phi_{bj}(d) \\
 \widehat{K}_{ij}^{GAa} &\equiv K_{ij}^{GAa} + m \int_0^d \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \\
 \widehat{K}_{ij}^{GBa} &\equiv K_{ij}^{GBa} + md \int_0^d \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \\
 \widehat{P}_{ai} &\equiv P_{ai} + m \phi_{ai}(d) \\
 \widehat{Q}_{ai} &\equiv Q_{ai} + md \phi_{ai}(d) \quad (7)
 \end{aligned}$$

식 (3)~(5)의 운동 방정식중 식 (3)은 블레이드의 인장방향 운동 방정식으로 굽힘방향 운동방정식인 식 (4) 및 (5)와 연성되어 있는 것을 알 수 있다. 따라서 이들 방정식들을 모두 사용하면 연성효과에 대한 해석을 수행할 수 있다. 이에 대한 자세한 결과는 참고문헌 (15)를 참조할 수 있다. 통상 블레이드의 인장방향 변형 관련 고유진동수는 굽힘방향 변형 관련 고유진동수에 비해서 높을 값을 갖는다. 따라서 연성 효과는 블레이드

의 회전 각속도가 매우 높은 경우를 제외하고는 무시할 수 있다. 부가 질량 효과를 고려하고 인장방향 운동과의 연성효과를 무시하면 운동 방정식은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\mu_2} \widehat{M}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} - 2c_{31} \Omega \sum_{j=1}^{\mu_3} \widehat{M}_{ij}^{23} \dot{q}_{3j} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\mu_3} (K_{ij}^{B23} + c_{33} c_{32} \Omega^2 \widehat{M}_{ij}^{23}) q_{3j} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\mu_3} \{ (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 \widehat{K}_{ij}^{GB2} \\
 &\quad - \kappa (c_{32} c_{23} - c_{33} c_{22}) \Omega^2 \widehat{K}_{ij}^{GA2} + K_{ij}^{B2} \\
 &\quad - (c_{33}^2 + c_{31}^2) \Omega^2 \widehat{M}_{ij}^{22} \} q_{2j} \\
 &= \kappa (c_{31} c_{23} - c_{33} c_{21}) \Omega^2 \widehat{P}_{2i} - c_{31} c_{32} \Omega^2 \widehat{Q}_{2i} \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\mu_3} \widehat{M}_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + 2c_{31} \Omega \sum_{j=1}^{\mu_2} \widehat{M}_{ij}^{32} \dot{q}_{2j} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\mu_2} (K_{ij}^{B32} + c_{32} c_{33} \Omega^2 \widehat{M}_{ij}^{32}) q_{2j} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\mu_2} \{ (c_{32}^2 + c_{33}^2) \Omega^2 \widehat{K}_{ij}^{GB3} \\
 &\quad - \kappa (c_{32} c_{23} - c_{33} c_{22}) \Omega^2 \widehat{K}_{ij}^{GA3} + K_{ij}^{B3} \\
 &\quad - (c_{31}^2 + c_{32}^2) \Omega^2 \widehat{M}_{ij}^{33} \} q_{3j} \\
 &= \kappa (c_{32} c_{21} - c_{31} c_{22}) \Omega^2 \widehat{P}_{3i} - c_{31} c_{33} \Omega^2 \widehat{Q}_{3i} \quad (9)
 \end{aligned}$$

2.3 무차원 매개변수

회전 블레이드의 진동 특성에 영향을 주는 관련 무차원 매개변수들을 알아내기 위해서는 진동 방정식을 무차원화된 형태로 변환하여야 한다. 이를 위해 방정식에 나타나는 기본 변수들을 다음과 같이 무차원화 한다.

$$\begin{aligned}
 \tau &\equiv \frac{t}{T} \\
 \xi &\equiv \frac{x}{L} \\
 \vartheta_{ai} &\equiv \frac{q_{ai}}{L} \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서

$$T \equiv \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI_3}} \quad (11)$$

여기서 I_3^* 는 단면의 굽힘방향 2개의 주면적

모멘트중 하나를 나타내며 두 개중 어느 것을 사용하여도 상관이 없다. 이들을 이용하여 방정식을 무차원화 하면 다음과 같은 무차원 매개변수들을 진동 방정식상에서 추출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{m}{\rho L} \\ \beta &\equiv \frac{d}{L} \\ \gamma &\equiv \Omega T \\ \delta &\equiv \frac{r}{L} \\ \kappa &\equiv \frac{I_2}{I_3} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 α 는 부가 집중질량대 블레이드의 질량비, β 는 0에서 1사이의 값으로 부가 집중질량의 블레이드상의 위치 (0은 블레이드 고정단, 1은 자유단을 의미한다), γ 는 블레이드의 무차원 회전각속도, δ 는 회전축 반경대 블레이드 길이비, 그리고 κ 는 블레이드 단면의 두 주축방향 굽힘강성비를 나타낸다. 이상에서 설명한 무차원 매개변수 외에 블레이드의 비틀림각 θ_0 와 Taper각 θ_1 , 그리고 Setting 각 θ_2 들이 무차원화된 매개변수들로 운동 방정식 상에 나타나게 된다. 본 글에 소개된 방정식에는 나타나지 않으나 이들 무차원 매개변수 이외에 인장방향 운동방정식과 굽힘방향 운동 방정식의 연성 효과, 전단 및 단면관성 효과, 그리고 집중질량 관성 모멘트 효과 등을 고려하는 경우는 블레이드의 세장비와 무차원화된 관성 모멘트비가 또 다른 무차원 매개변수로 나타나게 되는데 이 매개변수들은 통상 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon = \sqrt{\frac{AL^2}{I_3}} \quad (13)$$

$$\eta = \frac{k_G}{L} \quad (14)$$

여기서 ϵ 는 블레이드의 세장비를 나타내며, η 는 집중질량의 관성 반경(radius of gyration) k_G 대 블레이드의 길이비를 나타낸다.

2.4 매개변수들의 영향

그림 3은 가장 단순한 ($\alpha=0$, $\beta=1$,

$\delta=1$, $\kappa=1$, $\theta_0=0$, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$) 블레이드의 회전에 따른 가장 낮은 첫번째 고유진동수 변화를 보여준다. 이 그림은 블레이드의 회전 각속도와 관련된 무차원 매개변수 γ 의 변화에 따라 고유진동수들이 모두 증가하고 있음을 보여준다. 또한 회전축 반경비 δ 의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 보여주는데 축반경비 δ 의 증가에 따라 고유진동수의 증가율이 커지는 것을 보여주고 있다.

그림 4는 γ 의 변화에 따른 첫 번째 고유진동수의 변화를 몇 개의 집중질량비 α 값에 대해서 보여주고 있다. 이 결과를 위해 사용된 다른 매개변수들의 값은 다음과 같다. $\beta=1$, $\delta=1$, $\kappa=1$, $\theta_0=0$, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$. 그림은 집중질량비의 증가가 무회전시 고유진동수를 낮추는 역할을 하는 것을 보여준다. 그러나 회전에 따른 고유진동수의 증가율은 큰 변화가 없는 것을 알 수 있다.

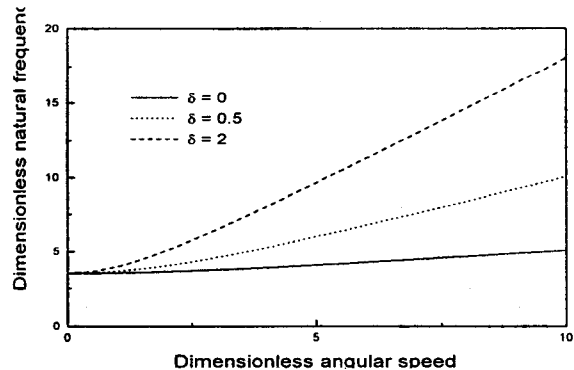


그림 3 First natural frequency variation vs. angular speed

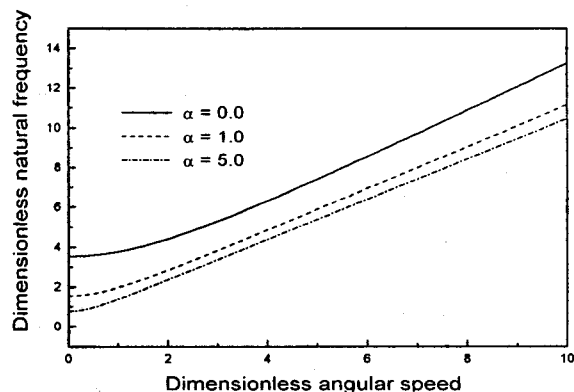


그림 4 Concentrated mass effect on the first natural frequency

소특집 : 회전체 구조물의 진동

그림 5는 집중질량의 위치를 나타내는 매개변수인 β 의 변화에 따른 첫 번째 고유진동수의 궤적을 몇 개의 α 값에 대해 나타내고 있다. 이를 위해 사용된 다른 매개변수들의 값은 다음과 같다. $\gamma=10$, $\delta=1$, $\kappa=1$, $\theta_0=0$, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$. 고유진동수의 값은 집중질량이 고정단에서 자유단으로 이동함에 따라 증가하였다가 다시 감소하는 것을 알 수 있으며 그 증감의 폭은 α 값이 증가함에 따라 더 커지는 것을 보여주고 있다.

그림 6~8은 각각 κ 값이 1, 2, 0.5일 때의 가장 낮은 두 개의 고유진동수의 회전각속도의 증가에 따른 궤적을 보여주고 있다. 이 결과를 얻기 위해 사용된 다른 매개변수들의 값은 다음과 같다. $\alpha=0$, $\beta=1$, $\delta=1$, $\theta_0=0$, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$. 그런데 κ 값이 1일 때는 두 굽힘방향 강성이 동일하므로 블레이드 회전이 없을 때 두 고유진동수가 같다. 그러나 회전 각속도가 증가함에 따라 면외굽힘 방향(flapwise bending) 고유진동

수가 면내굽힘 방향(chordwise bending) 고유진동수보다 빨리 증가하므로 두 고유진동수의 궤적은 벌어지게 된다. κ 값이 2일 때는 면외굽힘강성이 면내굽힘강성의 2배인 경우이므로 면외굽힘 고유진동수가 면내굽힘 고유진동수보다 무회전시 더 높은 값을 가지며 또한 면외굽힘 고유진동수의 증가속도가 더 빠르므로 두 궤적은 서로 접근하지 않게 된다. 이와 반면에 κ 값이 0.5일 때는 면외굽힘강성이 면내굽힘강성의 0.5배인 경우이므로 면외굽힘 고유진동수가 면내굽힘 고유진동수보다 무회전시 더 낮은 값을 갖는다. 그런데 면외굽힘 고유진동수의 증가속도가 더 빠르므로 두 궤적은 서로 접근하여 만나게 된다.

그림 9는 블레이드의 초기 비틀림각 θ_0 의 변화에 따른 가장 낮은 두 개의 고유진동수 변화를 보여준다. 초기 비틀림각은 횡방향 강성의 보 길이에 따른 변화율을 의미하므로 무회전시 κ 값이 클수록 그 변화는 커지게 된다. 그러나 γ 값이 증가하면 원심 관성력

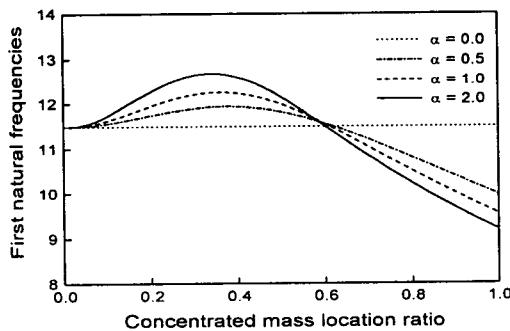


그림 5 Concentrated mass location effect on the first natural frequency

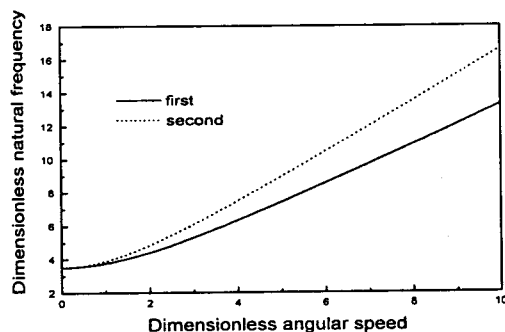


그림 6 Loci of lowest two natural frequencies ($\kappa = 1$)

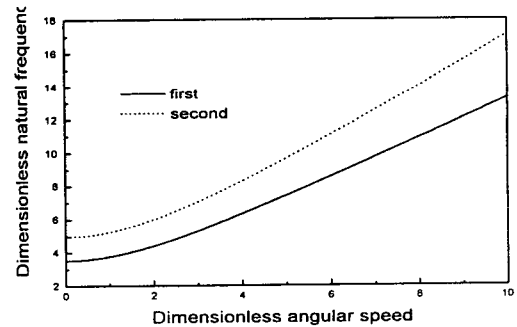


그림 7 Loci of lowest two natural frequencies ($\kappa = 2$)

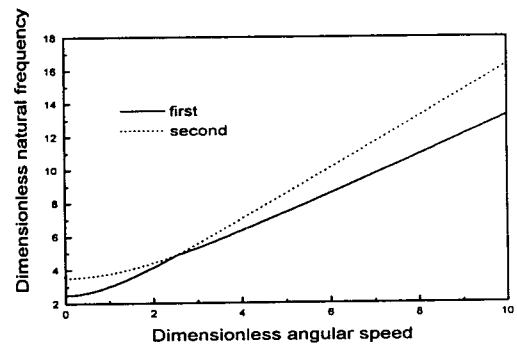


그림 8 Loci of lowest two natural frequencies ($\kappa = 0.5$)

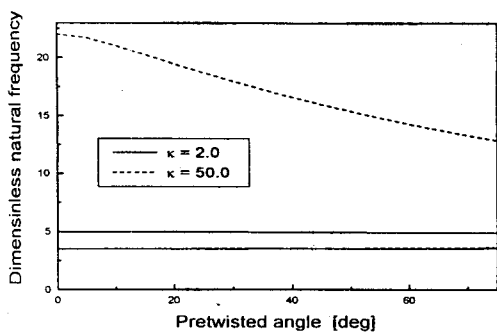


그림 9 Lowest two natural frequency variations due to pretwisted angle variation

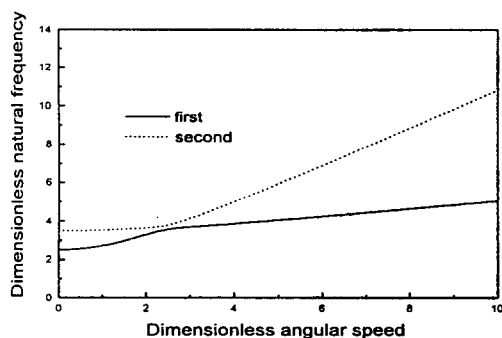


그림 10 Loci veering phenomena due to pre-twist angle ($\theta_0 = 45^\circ$)

에 의한 영향이 증가해 초기 비틀림각의 영향은 미미한 것이 된다. 초기 비틀림각은 그러나 고유진동수 궤적간 횡현상의 발생을 초래하며 그림 10은 그러한 한 예를 보여준다.

그림 11은 $\alpha=1, \beta=1, \delta=1, \theta_0=0, \theta_2=0$ 이고 κ 값이 0.5일 때 Taper각 θ_1 의 변화에 따른 첫 번째와 두 번째 고유진동수 궤적의 변화를 보여주는데 Taper각이 0일 때는 두 궤적이 서로 교차하나 0이 아닌 적절한 크기의 값을 가지면 두 궤적간에 횡 (loci veering) 현상이 발생하는 것을 알 수 있으며 Taper각 증가에 따라 두 궤적간 접근 거리가 점점 증가하는 것을 보여준다.

Taper각을 갖게 되면 블레이드는 회전시 원심력에 의해 좌굴 하중을 받게 되어 좌굴 하중을 받게 된다. 그림 12는 몇 개의 Taper각에 대해 회전각속도 증가에 따른 첫 번째 고유진동수 궤적의 모습들을 보여주고 있는데 Taper각이 어느 이상을 갖게 되면 회전각속도의 증가에 따라 좌굴이 발생할 수 있음을 보여준다. 여기서 사용된 다른 매개변

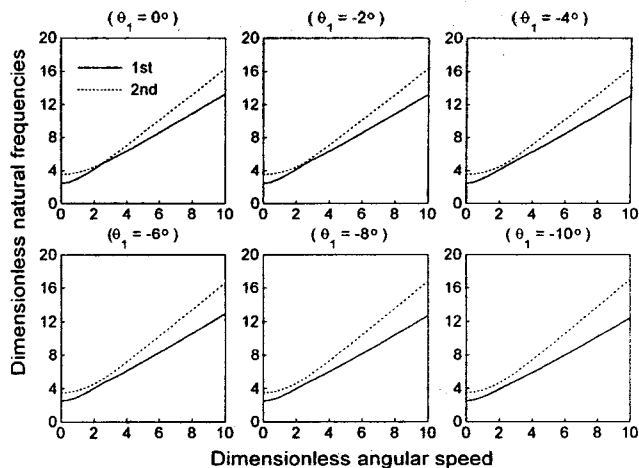


그림 11 Gap increasing between two loci due to taper angle variation

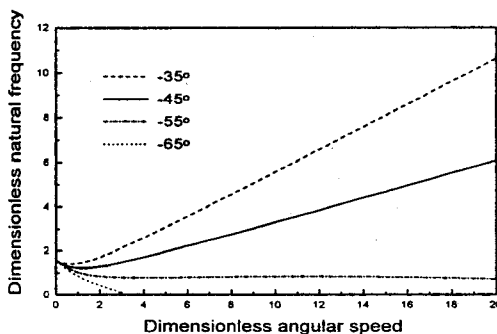


그림 12 First natural frequency loci obtained with four different taper angles

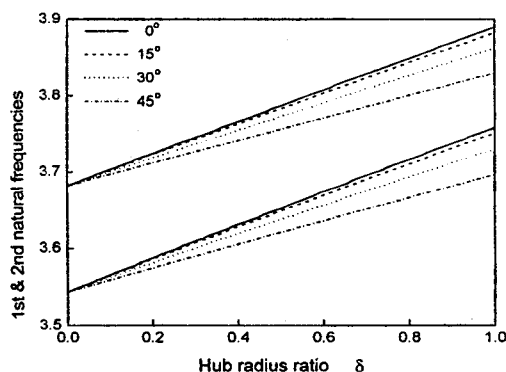


그림 13 The effect of hub radius ratio and setting angle on lowest two natural frequencies

수들의 값은 $\alpha=0, \beta=1, \delta=1, \kappa=1, \theta_0=0, \theta_2=0$ 이며 이들의 값이 변화함에 따라 좌굴이 발생할 수 있는 Taper각의 한계값은 변화하게 된다.

소특집 : 회전체 구조물의 진동

축반경이 0인 경우 Setting각 θ_2 의 변화는 그림 2에서 보여주듯이 전체 형상에 아무런 영향을 줄 수 없으므로 고유진동수에 영향을 미칠 수 없다. 따라서 Setting 각의 변화는 축반경비 δ 의 값이 0이 아닐 때만 의미가 있다. 그림 13은 몇 개의 Setting각에 대해서 축반경비의 변화에 따른 가장 낮은 두 개의 고유진동수의 궤적을 보여주고 있

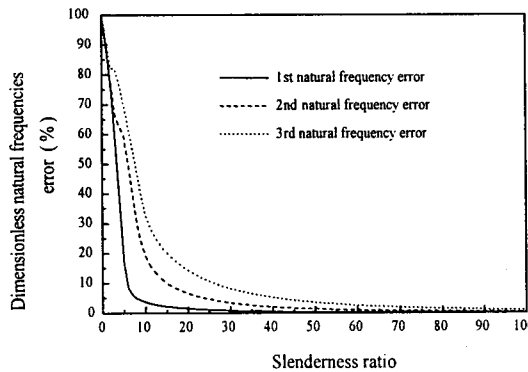


그림 14 Discrepancy between the two results by Euler and Timoshenko beam theories

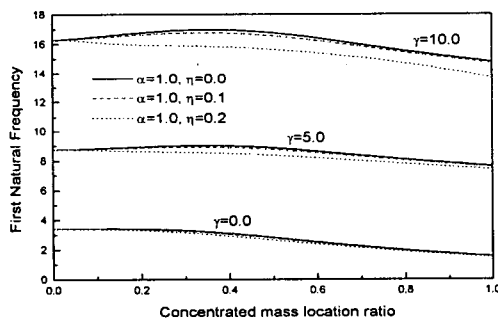


그림 15 Mass moment of inertia effect on the first natural frequencies

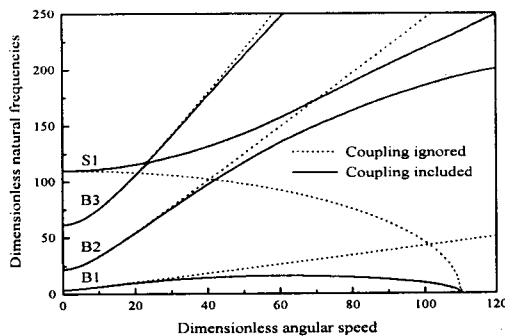


그림 16 Coupling effect on the natural frequency variations

다. 여기서 사용된 다른 매개변수들의 값은 다음과 같다. $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $\kappa=1$, $\theta_0=0$, $\theta_1=0$. 이 그림은 축반경비의 증가가 원심 관성력에 의한 강성 증가 현상을 초래하여 고유진동수를 증가시키는 것을 보여준다. 그리고 축반경비 δ 값이 0이 아닐 때 Setting각의 증가는 (동일한 축반경비 값에 대해서) 원심력 성분중 좌굴하중의 비중을 증가시켜 고유진동수의 값을 감소시키는 것을 보여준다.

블레이드의 세장비가 어느 이상의 값을 가지면(앞에서 사용한 정의를 사용할 때 통상 70 이상) 오일러의 보이론을 사용하고 그 이하에서는 전단 및 단면관성 효과를 고려하기 위해서 티모셴코의 보이론을 통상 사용한다. 그림 14는 두 이론에 의해 구한 가장 낮은 세 개의 고유진동수를 비교하여 세장비에 따른 오차의 정도를 나타낸 대표적인 그림이다. 여기서 보듯이 세장비의 크기에 따라 오차는 반비례하고 있으며 높은 고유진동수에서 더 큰 오차가 전단 및 단면관성 효과에 의해 발생함을 보여주고 있다.

그림 15는 부가 집중 질량의 관성 모멘트를 고려할 때, 관성 반경비 η 의 첫 번째 고유진동수에의 영향을 보여주는 그림이다. 관성 반경비는 블레이드의 길이에 대해 무차원화 되어 있으므로 실제적으로 매우 작은 값을 가지므로 고유진동수에 별로 큰 영향을 미치지 않는다 할 수 있으나 저차 모드보다 고차 모드에서 더 큰 영향이 나타나며 회전 각속도가 증가할수록 그 영향이 증대함을 알 수 있다.

이상에서 소개한 무차원 매개변수들의 영향은 그들의 가지수가 매우 많으므로 그들을 동시에 변화시키며 그 특성 변화를 조사할 경우 본 논문에서 소개한 내용보다 훨씬 많은 내용들을 발견할 수 있을 것이다. 이러한 내용들에 대한 내용을 더 자세히 파악하려면 본 논문에 주어진 방정식에 의한 수치해석을 수행하면 가능할 것이다.

마지막으로 본 글에서는 블레이드의 인장 방향 운동방정식과 굽힘방향 운동 방정식 간 연성효과의 영향에 대해서 언급하려 한다. 그림 16은 κ 값이 클 경우 (면외굽힘 고유진동수가 높은 값을 가질 때) 세 개의 면내굽

힘 고유진동수와 한 개의 인장방향 고유진동수의 궤적을 나타낸 것인데 점선은 연성효과를 무시했을 때의 결과이고 실선은 연성효과를 고려했을 때의 결과이다. 이 그림에서 보여주듯이 회전각속도가 낮은 범위에서는 두 결과는 큰 차이를 보이지 않으나 회전 각속도가 어느 이상이 되면 연성의 효과가 크게 나타날 수 있음을 보여준다. 또한 좌굴응력을 발생시키는 Taper각이나 Setting각 등을 갖지 않았다 하더라도 블레이드의 고유진동수가 계속 증가만 하는 것이 아니고 어느 이상의 회전각속도 이상이 되면 다시 감소하여 0가 되는 것을 알 수 있다. 이에 관한 자세한 내용은 참고문헌 (18)을 참조할 수 있다.

3. 결 론

본 글에서는 회전하는 블레이드의 진동특성 파악을 위해 사용되고 있는 해석 방법론을 비교 분석하였으며, 진동특성에 영향을 미치는 무차원 매개변수들을 소개하고 그 영향을 해석결과들을 통해 보여주었다. 본 글은 회전운동을 하는 블레이드의 진동 특성 관련 내용을 소개한 내용이므로 엄격한 수식 전개과정들을 생략하였으며, 필요하다면 이와 관련된 참고문헌들을 참조할 수 있게 하였다. 이러한 내용들은 앞으로 관련된 산업 기계들의 설계에 엔지니어들이 참조하여 유용하게 사용할 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda, No. 766.
 (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 25, pp. 28~30.
 (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," J. Sound and Vibration, 56, pp. 175~185.
 (4) Bauer, H. F., 1980, "Vibration of a

Rotating Uniform Beam", J. Sound and Vibration, 72(2), pp. 177~189.
 (5) Hoa, S., 1979, "Vibration of a rotating beam with Tip Mass," J. Sound and Vibration, 67, pp. 369~381.
 (6) Wright, A., Smith, C., Thresher, R. and Wang, J., 1982, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," J. Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 197~202.
 (7) Kuo, Y. H., Wu, T. H., Lee, S. Y., 1994, "Bending Vibration of a Rotating Non-uniform Beam with Tip Mass and an Elastically Restrained Root," Computer & Structure, Vol. 22, No. 2, pp. 229~236.
 (8) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," Int. J. of Mech. Sci., Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
 (9) Subrahmanyam, K. B., Kaza, K. R. V., Brown, G. V., and Lawrence, C., 1987, "Nonlinear Vibration and Stability of Rotating Pretwisted, Preconed Blades Including Coriolis Effects," J. Aircraft, Vol. 24, No. 5, pp. 342~352.
 (10) Leissa, A., 1981, "Vibration Aspects of Rotating Turbomachinery Blades," Applied Mechanics Reviews, Vol.34, No.5, pp. 629~635.
 (11) Rao, J. S., 1987, "Turbomachine Blade Vibration," Shock Vib. Dig., 19, pp. 3~10.
 (12) Carnegie, W., 1959, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," J. Mech. Engng Sci., 1, pp. 235~240.
 (13) Yntema, R. T., 1955, "Simplified Procedures and Charts for the Rapid Estimation of Bending Frequencies of Rotating Beams," National Adv. Comm. Aeronaut., 3459.
 (14) Bogdanoff, J. L., 1955, "Influence of Secondary Inertia Terms on Natural Frequencies of Rotating Beams," J.

- Appl. Mech., Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., pp. 587~591.
- (15) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (16) Simo, J. C., and Vu-Quoc, L., 1987, "The Role of Non-linear Theories in Transient Dynamic Analysis of Flexible Structures," *J. of Sound and Vibration*, 119(3), pp. 487~508.
- (17) Yoo, H. H., Ryan, R., and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (18) Yoo, H. H., and Shin, S. H., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, 212(5), pp. 807~828.
- (19) Yoo, H. H., and Kwak, J. Y., 1997, "A New Approach for the Vibration Analysis of Rotating Blades," *Asia Pacific Vibration Conference Proceedings*, pp. 230~235.