

〈논 문〉

종동력을 받는 원통셸의 동적 안정성에 관한 연구

Dynamic Stability of Cylindrical Shells Subjected to Follower Forces

김 현 순* · 김 지 환**

Hyun-Soon Kim and Ji-Hwan Kim

(1997년 12월 27일 접수 ; 1998년 2월 20일 심사완료)

Key Words : Dynamic Stability(동적 안정성), Cylindrical Shell(원통셸), Constant Follower(일정한 크기의 종동력), Pulsating Follower Forces(맥동 종동력)

ABSTRACT

The dynamic instability of cylindrical shell with clamped-free boundary condition subjected to constant follower force or $P_0 + P_1 \cos \Omega t$ type pulsating follower force is analyzed. The motion of shell is modeled using the shell theory considering rotary inertia and shear deformation, and analyzed with finite element method. In case of constant follower force, the changes of eigenvalues dependent on the magnitude of applied load are investigated and the critical loads are obtained. In case of pulsating follower force, instability regions of excitation frequency are obtained by modal transform with right and left modal matrix and by multiple scales method. The effects of thickness ratio and aspect ratio on the instability of shell are studied.

1. 서 론

구조물에 일정한 크기의 하중이 작용할 때 발생할 수 있는 불안정성에는 두 가지 종류가 있다. 먼저 구조물에 보존력이 작용하는 경우 어느 한 고유치가 0이 되면서 발생하는 정적 불안정성이 있고, 비보존력이 작용하는 경우 두 고유치가 일치하게 되어 발생하는 동적 불안정성이 있다. 동적 불안정성을 생기게 하는 비보존력으로는 구조물의 변형에 따라 작용방향이 변하는 종동력이 있다. 종동력의 예로는 로켓의 추진력이나 우주구조물의 자세 제어에 사용되는 추력이 해당된다⁽¹⁾.

반면, 크기가 시간 t에 대해 조화함수 형태로 변

하는 하중이 보나 판과 같은 구조물에 면내방향으로 가해지는 경우, 일반적인 공진(primary resonance)과는 다른 형태의 파라메트릭 공진(parametric resonance)이 발생한다. 맥동력이 임계값을 넘지 않을 때는 일반적으로 횡방향 진동은 발생하지 않고, 면내 방향의 진동현상만이 발생하는데, 가진 진동수와 구조물의 횡방향 고유진동수가 어떤 관계를 갖게 되면 임계 하중보다 작은 크기의 하중이 작용하더라도 구조물의 횡방향 진폭이 커지는 불안정 현상이 나타나는데 이를 파라메트릭 공진이라고 한다. 이런 불안정성을 일으키는 가진 진동수의 영역을 구하는 것이 구조물의 안정성 해석에 있어 중요한 의미를 갖는다. 이런 맥동력은 지배방정식에서 시간에 따라 크기가 변하는 계수의 형태로 나타나게 된다⁽²⁾.

일정한 크기의 종동력이 작용하는 보나 판의 동적 안정성에 관한 연구를 살펴보면 다음과 같다. Beal⁽³⁾은 Galerkin 방법을 사용하여 미사일에 제

* 서울대학교 대학원 항공우주공학과

** 정희원, 서울대학교 공과대학 항공우주공학과

어가 가능한 일정한 크기의 중동력 또는 시간에 따라 크기가 변하는 중동력이 작용하는 경우의 동적 안정성에 대하여 살펴보았다. 여기서 임계 하중값은 보의 굽힘 모드의 가장 작은 두 고유치가 만나는 곳에서 결정됨을 보이고 있다. Park^(4,5)은 미사일을 양단 자유경계 조건을 갖는 Euler-Bernoulli 이론에 따라 모델링하여 유한요소법으로 동적 안정성 연구를 수행하였다. Willems⁽⁶⁾는 보의 접선 방향으로 작용하는 중동력에 따라 나타나는 외팔보(cantilever beam)의 동적 안정성을 실험적으로 살펴보았는데, 임계값은 보존력 형태로 작용하는 하중에 비하여 대략 8배로 증가함을 보였다. Higuchi^(6,7)는 우주 구조물을 회전관성과 전단변형을 고려하지 않은 사각자유경계판으로 모델링하여 중동력이 작용할 때의 동적 안정성에 대하여 연구하였다. 그리고 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 모달 분석을 통해 임계하중을 계산하였다.

이상은 일정한 크기의 중동력이 작용하는 경우의 연구에 대하여 살펴보았고, 구조물에 맥동력이 작용하는 경우에 대한 연구로는 다음과 같은 연구들이 있다.

Brown⁽⁸⁾은 축방향 맥동력을 받는 보의 경계조건을 변화시켜, 정적 좌굴 모드와 진동 모드가 비슷하다면 무차원화된 불안정 영역이 서로 같게 되지만, 두 모드가 다른 경계조건인 경우는 불안정 영역이 무차원화된 특성 영역과 다르게 된다는 사실을 알아내었다. Moorthy⁽⁹⁾는 1차 전단변형 판이론을 사용하여 복합재료 판을 모델링하고 크기가 조화함수 형태로 변하는 맥동력이 면내방향으로 작용하는 경우 감쇠, 두께비, 경계조건의 영향을 살펴보았다. Liao⁽¹⁰⁾는 유한요소법을 사용하여 보강 적층판, 보강 적층셀의 불안정 영역에 대해 고찰하였는데, 3차원 셀 요소를 사용하여 판과 셀을 모델링하고 3차원 구부러진 보 요소를 사용하여 보강재를 모델링하였다. 이 연구에서 제침각(skew angle)의 증가는 불안정 영역의 감소를 가져오며 주요 동적 불안정 영역은 적층각이 45° 일 때 가장 작고, 보강된 원통셀은 곡률이 커질수록 동적 불안정 영역이 좁아짐을 밝혔다.

지금까지 살펴본 바에 의하면 일정한 크기의 중동력을 받는 보와 판에 관한 동적 안정성의 연구는 여러 저자에 의해 수행되었으나 원통셀에 대한 연구는 없었던 것으로 사료되어, 본 연구에서 한쪽단이 고정되고 일정한 크기의 중동력을 받는 원통셀의 임계하중을 구하는 연구를 수행하고자 한다. 그리고 맥동 중동력을 받는 원통셀의 동적 불안정성에 대한 연구가 없었던 것으로 생각되므로 맥동 중동력을 받

는 원통셀의 파라메트릭 불안정성에 대한 연구를 수행하고자 한다.

본 연구에서는 Soedel⁽¹¹⁾이 제안한 Timoshenko-Mindlin type의 전단변형과 회전 관성을 고려한 셀이론을 사용하여 한쪽단이 고정된 원통셀의 동적 안정성을 해석하고자 한다. 유한요소법을 이용하여 두께비, 형상비에 따른 동적 안정특성의 변화를 살펴보았다.

2. 본 론

2.1 셀 모델

본 연구에서는 Soedel이 제안한 Timoshenko-Mindlin type의 전단변형과 회전 관성을 고려한 셀이론을 사용하여 Fig. 1과 같은 모델을 해석하고자 한다.

전단 변형을 허용하는 경우에는 변형전에 중립면에 수직인 직선이 변형 후에는 더 이상 중립면에 수직이 아니어도 되며, 각 방향의 변위장은 다음과 같다.

$$u(x, \theta, z) = u_0(x, \theta) + z\beta_x(x, \theta) \quad (1a)$$

$$v(x, \theta, z) = (1 + \frac{z}{R})v_0(x, \theta) + z\beta_\theta(x, \theta) \quad (1b)$$

$$w(x, \theta, z) = w(x, \theta) \quad (1c)$$

u_0, v_0 는 중립면에서의 면내방향(축방향, 원주방향) 변위를 의미하며, β_x, β_θ 는 중립면과 수직인 선 요소의 $x-z$ 평면과 $y-z$ 평면상에서의 회전각을 나타낸다.

변위-변형률 관계는 다음과 같다.

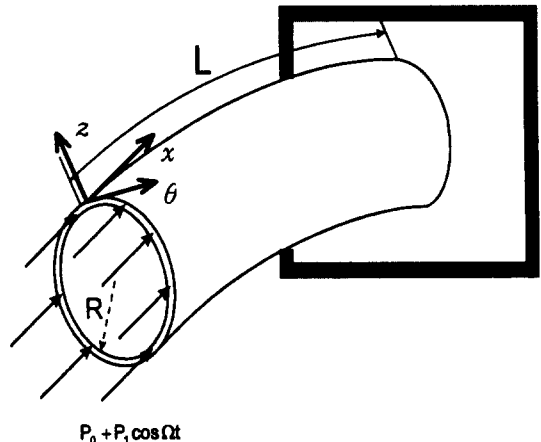


Fig. 1 Cantilever-type cylindrical shell subjected to pulsating follower forces

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (2a)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + z \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \quad (2b)$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad (2c)$$

$$\gamma_{\theta x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z \left(\frac{\partial \beta_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} \right) \quad (2d)$$

$$\gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2e)$$

$$\gamma_{\theta z} = \beta_\theta - \frac{v_0}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2f)$$

이러한 변위장에 따라 회전관성을 고려한 운동에너지와 전단 변형을 고려한 변형에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \rho h (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}^2) + \frac{\rho h^3}{12} (\dot{\beta}_x^2 + (\dot{\beta}_\theta + \frac{\dot{v}_0}{R})^2) \right\} R dx d\theta \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{vol} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (4)$$

여기서, (·)는 시간에 관한 미분을 의미한다.

2.2 일정한 크기의 종동력이 작용하는 경우

종동력의 축방향 성분에 의한 일은 다음과 같이 표현된다.

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} P_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 R d\theta dx \quad (5)$$

끝단에 작용하는 종동력에서 축에 수직인 성분에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_{nc} = - \int_0^L \int_0^{2\pi} P_0 \frac{\partial w}{\partial x} \bar{\delta}(x-a) \delta w R d\theta dx \quad (6)$$

여기서, $\bar{\delta}(x-a)$ 는 Dirac-Delta 함수이다.

동적 안정성 해석을 위해 9절점 Lagrange 요소를 사용하였고, 각 절점에서의 자유도는 $\{U\} = \{u_0 \ v_0 \ w \ \beta_x \ \beta_\theta\}^T$ 으로 다섯 개이다. Hamilton 원리에 의해 구한 운동방정식에 대입하면

$$[M]\{\dot{U}\} + ([K_e] - P_0[K_g])\{U\} = 0 \quad (7)$$

$[K_e]$ 는 변형 에너지에 의한 강성행렬, $[K_g]$ 는 종동력에 의한 강성행렬이며 모두 $N \times N$ 행렬이다. $[K_e]$ 는 대칭행렬인데 반해 $[K_g]$ 는 비보존력에 의한 비대칭행렬이다. 강성행렬 $[K_e]$ 를 계산하는데 있어서 1차 전단변형이론을 사용하는 경

우, 곡률이 있는 요소를 사용할 경우, 두 종류의 과잉강성현상- shear locking과 membrane locking-이 나타나게 되는데, 감소 적분 (reduced integration)을 사용하여 과잉강성효과를 제거하였다. 즉, 면내 방향 변형과 횡방향 전단변형에 관련된 항들은 2×2 가우스 적분(Gauss integration)으로, 굽힘 변형과 관련된 항은 3×3 적분을 사용하여 계산하였다.

2.3 맥동 종동력이 작용하는 경우

크기가 $P = P_0 + P_1 \cos \Omega t$ 로 시간에 대해 조화 함수 형태로 변하는 맥동 종동력이 가해지는 경우 Hamilton 원리와 유한요소법을 적용하여 다음과 같은 전체 셀에 대한 유한요소 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\dot{U}\} + ([K_e] - \alpha P_{cr}[K_g])\{U\} - \beta P_{cr} \cos \Omega t [K_g]\{U\} = 0 \quad (8)$$

여기서, $\alpha = \frac{P_0}{P_{cr}}$, $\beta = \frac{P_1}{P_{cr}}$ 이고 P_{cr} 은 크기가 일정한 크기의 하중만 작용했을 경우의 임계하중이며 $[K_g]$ 와 $[K_g]$ 는 각각 크기가 일정한 하중과 시간에 따라 크기가 변하는 하중의 외부일에 의한 강성행렬이며 모두 $N \times N$ 행렬이다. 본 연구와 같이 크기가 일정한 하중과 크기가 시간에 따라 변하는 하중이 가해지는 방법이 같다면 $[K_g] = [K_g] = [K_g]$ 가 된다.

$N \times N$ 정규화된 우측 모달행렬(normalized right modal matrix) $[\Phi]$ 를 도입하여 각 절점에서의 변위벡터 $\{U\}$ 를 $\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$ 로 변환시킨다. 식에 대입한 후 양변의 좌측에 정규화된 좌측 모달행렬(normalized left modal matrix)의 전치행렬인 $[\Psi]^T$ 를 곱하면 다음과 같은 운동방정식을 구할 수 있다.

$$[I]\{\dot{\eta}\} + [A]\{\eta\} - \beta \cos \Omega t [R]\{\eta\} = 0 \quad (9)$$

식 (8)에서, $[\Psi]^T[M][\Phi] = [I]$, $[\Psi]^T[K][\Phi] = [A]$, $[\Psi]^T[K_g][\Phi] = [R]$ 이며 $[I]$ 는 단위 행렬, $[A]$ 는 크기가 일정한 하중 P_0 만이 작용하는 원통셀의 고유진동수의 제곱항(ω_i^2)이 대각 성분을 이루는 대각 행렬이다. 이때 $[I]$, $[A]$, $[R]$ 은 각각 $N \times N$ 행렬이 된다. 식 (9)를 성분식으로 표현하면

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j + 2\epsilon \cos \Omega t \sum_{m=1}^N \tilde{R}_{jm} \eta_m = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

여기서, $\epsilon = -\frac{\beta}{2}$, $\tilde{R}_{jm} = R_{jm} P_{cr}$ 이며 R_{jm} 은 $[R]$ 의 성분을 나타낸다.

Multiple scales 방법에 의하면 식 (10)의 해는 ϵ 에 대한 급수 형태로 가정할 수 있다⁽²⁾.

$$\begin{aligned} \eta_j(t, \epsilon) = & \eta_{j0}(T_0, T_1, T_2) \\ & + \epsilon \eta_{j1}(T_0, T_1, T_2) \\ & + \epsilon^2 \eta_{j2}(T_0, T_1, T_2) + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $T_n = \epsilon^n t$ 이다.

식 (11)을 식 (10)에 대입하면 ϵ 에 대한 같은 차수의 계수들에 대한 식이 만들어진다.

$$\epsilon^0 : D_0^2 \eta_{j0} + \omega_j^2 \eta_{j0} = 0 \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^1 : D_0^2 \eta_{j1} + \omega_j^2 \eta_{j1} = & -2D_0 D_1 \eta_{j0} \\ & - \sum_r \tilde{R}_{jr} \eta_{r0} 2 \cos(\Omega T_0) \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : D_0^2 \eta_{j2} + \omega_j^2 \eta_{j2} = & -2D_0 D_2 \eta_{j0} - D_1^2 \eta_{j2} - 2D_0 D_1 \eta_{j1} \\ & - \sum_r \tilde{R}_{jr} \eta_{r1} 2 \cos(\Omega T_0) \end{aligned} \quad (12c)$$

여기서, $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ 이다.

식 (12a)의 일반해는 다음과 같다.

$$\eta_{j0} = A_j(T_1, T_2) \exp(i\omega_j T_0) + cc \quad (13)$$

여기서, cc 는 앞에 있는 항의 켈레 복소수를 나타낸다.

이제, 식 (13)을 식 (12b)에 대입하면

$$\begin{aligned} D_0^2 \eta_{j1} + \omega_j^2 \eta_{j1} = & -2i\omega_j D_1 \exp(i\omega_j t_0) \\ & - \sum_r \tilde{R}_{jr} A_r \{ \exp[i(\omega_r + \Omega) T_0] \\ & + \exp[i(\omega_r - \Omega) T_0] \} + cc \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, A_j 는 η_{j1} 항의 영년항(secular term)과 small divisor 항을 없애주는 방법을 통해 결정되

며 그 과정은 진동수들의 조합공진(combination resonance) 형태에 의해서 결정된다. 식 (14)의 두 번째 항까지의 해를 구하는 1차 근사를 통해 안정 영역과 불안정 영역의 경계 곡선을 구할 수 있다.

$\epsilon - \Omega$ 평면에서 안정 영역과 불안정 영역을 구분하는 경계곡선은 다음과 같이 정의된다.

(a) $\Omega \approx \omega_p + \omega_q$ - 합형태(summed type)의 조합공진 :

$$\Omega = \omega_p + \omega_q \pm \epsilon [\tilde{R}_{pq} \tilde{R}_{qp} / \omega_p \omega_q]^{1/2} + O(\epsilon^2) \quad (15)$$

(b) $\Omega \approx \omega_q - \omega_p$ -차형태(difference type)의 조합공진:

$$\Omega = -\omega_p + \omega_q \pm \epsilon [\tilde{R}_{pq} \tilde{R}_{qp} / -\omega_p \omega_q]^{1/2} + O(\epsilon^2) \quad (16)$$

식 (15)과 (16)을 살펴보면, $[R]$ 의 같은 요소들에 의한 합형태와 차형태의 조합공진이 동시에 일어날 수 없으며, 작용하는 하중이 일정한 방향을 유지할 경우에는 $[R]$ 의 대칭성에 의해 차형태의 조합공진은 존재하지 않는다. 그러나, 본 연구의 경우와 같이 중동력이 작용하는 경우에 있어서는, \tilde{R}_{pq} 와 \tilde{R}_{qp} 의 부호가 다르게 될 수 있어 차형태의 조합공진이 나타나게 된다.

3. 해석결과 및 고찰

3.1 코드의 타당성 및 수렴성 검토

본 연구에 사용한 코드의 타당성 검토를 위해 Table 1에서 여러 경계조건의 원통셀의 고유진동수를 구해 참고문헌(13,14)와 비교하였다. 참고문헌에서는 전단변형과 회전관성을 고려하지 않은 모델을 사용했으므로 두께가 얇은 원통셀을 모델로 하여 비교하였다.

경계조건을 표시할 때, C는 고정단 F는 자유단을 의미한다. 그리고, n 은 원주방향의 모드수이고 m 은 축방향의 모드수이다. 결과를 보면 경계조건에 관계없이 6×12 의 요소분할로 참고문헌의 결과와

Table 1 Natural frequency of shells with various boundary conditions

B.C	n	m	L/d	d/h	ν	(Axial) × (Circumferential)			Flügge [Ref.13]	Sanders [Ref.14]	Donnell [Ref.14]
						4×4	5×8	6×12			
C-F	2	1	0.57	40	0.3	0.2800	0.3056	0.3079	0.3082	0.3081	-
F-F	1	1	2.50	40	0.3	0.3564	0.3587	0.3587	-	0.3585	0.3590
C-C	2	1	5.00	40	0.3	0.05874	0.05805	0.05797	-	0.05784	0.06757

Table 2 Convergence of critical load
($L/d = 10, h/d = 1/6$)

		Circumferential		
		4	8	12
A x i a l	4	50.8	51.9	52.0
	6	50.1	51.1	51.2
	8	49.8	50.9	51.1

1%이내의 오차를 나타내어 충분한 수렴성을 얻었다고 판단되며 사용한 코드의 타당성을 입증할 수 있었다.

Table 2에서는 일정한 크기의 하중이 작용할 때 동적 불안정성이 나타나기 시작하는 임계하중값을 축방향과 원주방향으로 요소수를 늘려가면서 구하여 임계하중값이 일정한 값으로 수렴해감을 보이고 있다. 두께비 (h/d)가 1/6 이고 형상비 (L/d)가 10 인 원통셀을 모델로 사용하였다.

3.2 크기가 일정한 종동력 P가 작용하는 경우

고유치 곡선을 통해 일정한 크기의 종동력을 받는 셀이 동적 불안정성을 일으키기 시작하는 임계하중 P_{cr} 을 구하고자 한다. 먼저, 무차원화된 진동수와 하중을 도입하면 다음과 같다.

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad \bar{P} = 2\pi PR \frac{L_0^2}{EI} \quad (17a, b)$$

여기서, A 는 원통셀의 단면적 (πR^2)이며, I 는

관성 모멘트 ($\pi R^4/4$)이다. L_0 는 20 R 인 기준 길이이다. 형상비 (L/d)가 큰 원통셀의 해석결과와 같은 형태의 원형단면보를 Timoshenko보 이론을 써서 해석한 결과와 비교하고자 한다. 보의 경우는 종동력을 끝단에 집중 하중 형태로 가하고, 원통셀의 경우는 끝단에 분포하중 형태로 나누어 가하여, 결과적으로 같은 크기의 하중이 가해지도록 하였다. 그리고, 결과를 비교하기 좋도록 무차원화된 진동수와 하중을 사용하였다. Fig. 2는 형상비가 10인 원형단면 외팔보의 고유치 곡선이고 Fig. 3, Fig. 4는 두께비 (h/d)가 1/6, 1/10 인 보형태의 원통셀의 고유치 곡선을 보여 주고 있다.

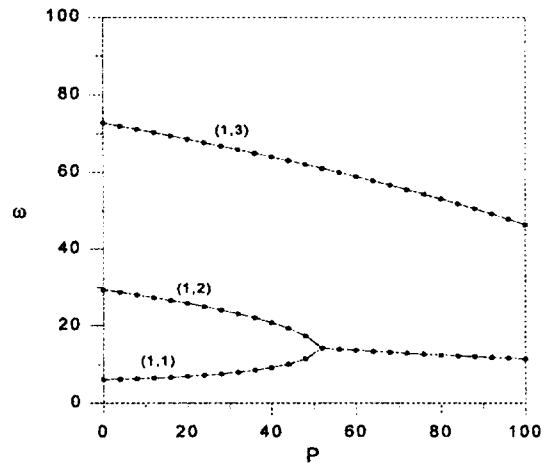


Fig. 3 Eigenvalue curves of cylindrical shell
($L/d = 10, h/d = 1/6$)

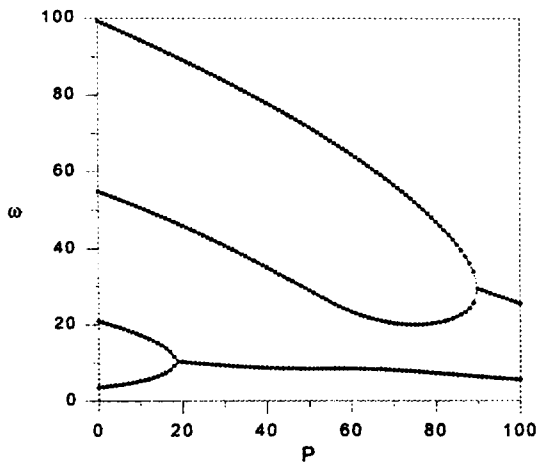


Fig. 2 Eigenvalue curves of circular beam
($L/d = 10$)

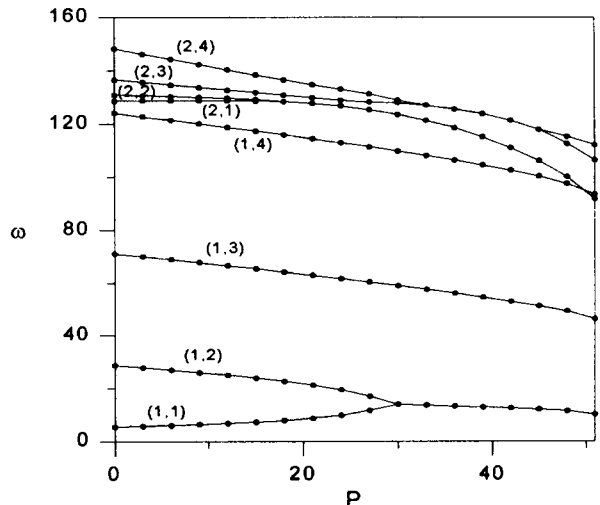
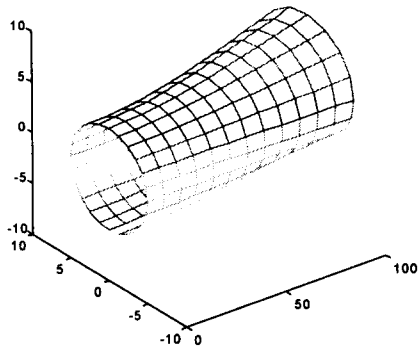
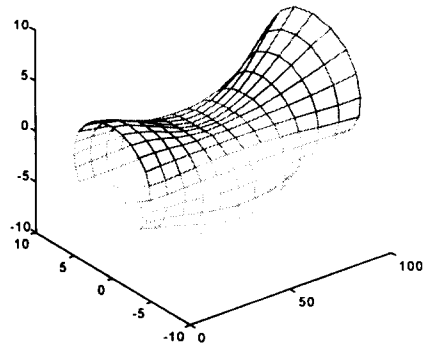


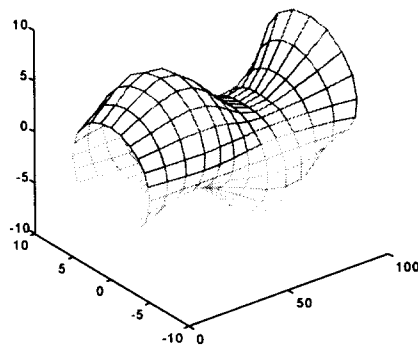
Fig. 4 Eigenvalue curves of cylindrical shell
($L/d = 10, h/d = 1/10$)



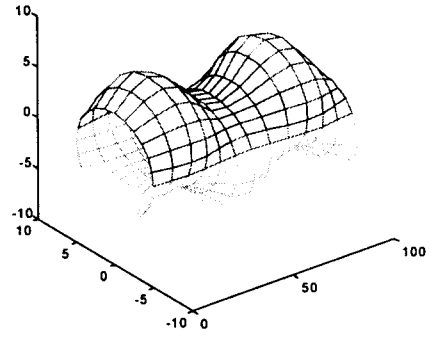
$n = 1, m = 1$



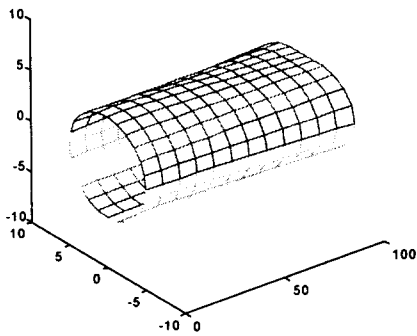
$n = 1, m = 2$



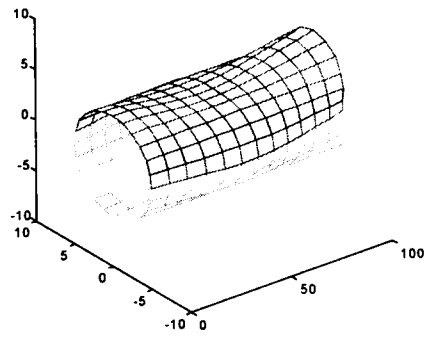
$n = 1, m = 3$



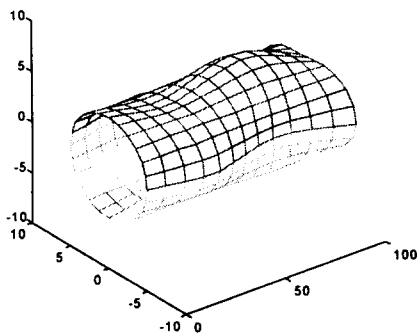
$n = 1, m = 4$



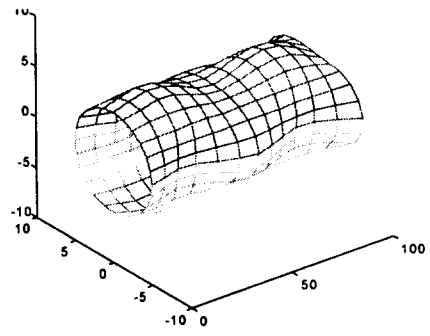
$n = 2, m = 1$



$n = 2, m = 2$



$n = 2, m = 3$



$n = 2, m = 4$

Fig. 5 Mode shape

원형단면보의 고유치 곡선 Fig. 2를 살펴보면, 첫 번째, 두 번째 모드가 서로 만나서 첫 번째 동적 불안정성을 나타내고 있고, 세 번째, 네 번째 모드가 만나서 두 번째 동적 불안정성을 보이고 있다. 임계하중은 각각 $P_{cr1} = 19$, $P_{cr2} = 90$ 이고, 임계하중 이후의 영역에서는 불안정성을 일으키는 모드의 고유치가 복소수가 되며, 허수부의 크기가 점점 커지는데 이를 강한 불안정성(strong instability)이라고 한다. 고유치의 허수부가 0이 아니게 되면 진동의 진폭이 지수함수 형태로 커지는 flutter 현상이 발생하게 된다. 셀의 고유치 곡선을 살펴보면 Fig. 3에서 보이고 있는 두께비가 1/6인 상당히 두꺼운 셀의 고유치 곡선에서는 첫 번째, 두 번째 모드가 만나서 강한 동적 불안정성을 일으키고 있고 임계하중은 $P_{cr1} = 51.1$ 로써 상당히 큰 하중까지 견딜 수 있음을 알 수 있다. 두께비가 1/10인 셀의 고유치 곡선인 Fig. 4는 다섯 번째, 여섯 번째 모드가 먼저 18.3에서 만나 고유치들이 복소수가 되었다가 다시 실수로 돌아오면서 불안정성이 사라지게 되고, 첫 번째 두 번째 모드는 $P_{cr1} = 28.0$ 에서 만나 강한 불안정성을 일으키고 있는 모습을 보여주고 있다. 다섯 번째, 여섯 번째 모드가 일으키는 불안정성은 고유치 복소수값이 작고 또한 일시적으로 나타나는 현상인데 이런 현상을 약한 불안정성(weak instability)이라고하며 감쇠를 고려하면 없어지는 경우가 많다⁽⁶⁾. 강한 불안정성을 일으키는 모드들은 단면을 원형으로 유지하면서(단면의 rigid body motion) 축방향으로 보의 1차, 2차 모드를 나타내고 있다. 즉, 원주방향 모드수(n)는 1, 축방향 모드수(m)는 1, 2 인 모드이다. 약한 불안정성을 일으키는 모드들은 단면이 타원형으로 찌그러진 모양의 n 이 2이면서 축방향으로 보의 1차, 2차, 3차 및 4차 모드를 나타내는 모드들이다. Fig. 5에서 단면유지모드와 단면변형모드의 mode shape을 보여주고 있다.

두께가 두꺼운 셀은, 단면이 변형을 하지 않는 $n=1$ 이고 $m=1, 2, 3, 4, \dots$ 인 모드들이 저차모드가 되고, 단면이 변형을 하는 n 이 2,3, ... 인 모드들은 고차모드가 되면서 불안정성을 일으키지 않지만, 두께가 얇아지면서 단면변형 모드들이 저차모드로 내려오고, $n=1$ 인 첫째 및 둘째 모드가 불안정성을 일으키기 전에 약한 불안정성을 먼저 발생시킨다. $Dym^{(15)}$ 은 원통셀의 낮은 모드의 진동수는 두

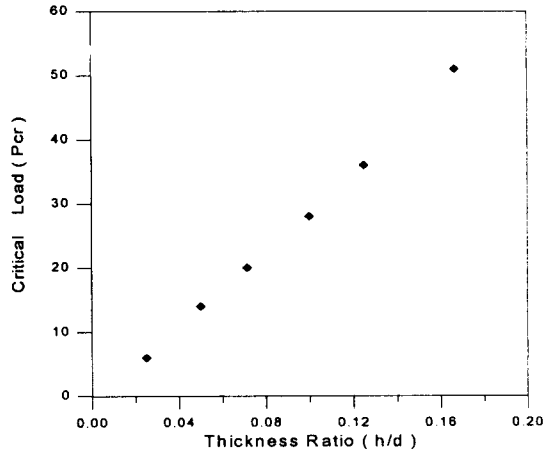


Fig. 6 Thickness ratio (h/d) vs. critical load ($L/d = 10$)

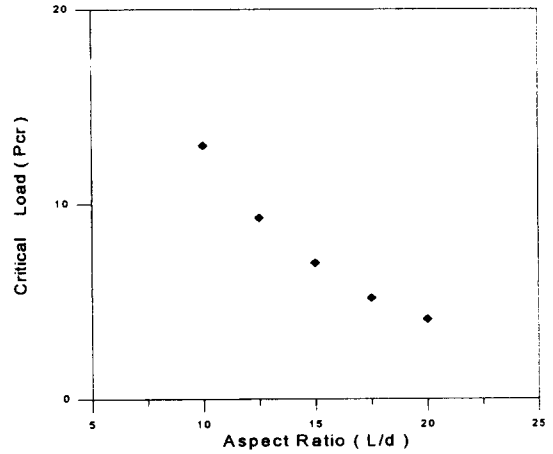


Fig. 7 Aspect ratio (L/d) vs. critical load ($h/d = 1/20$)

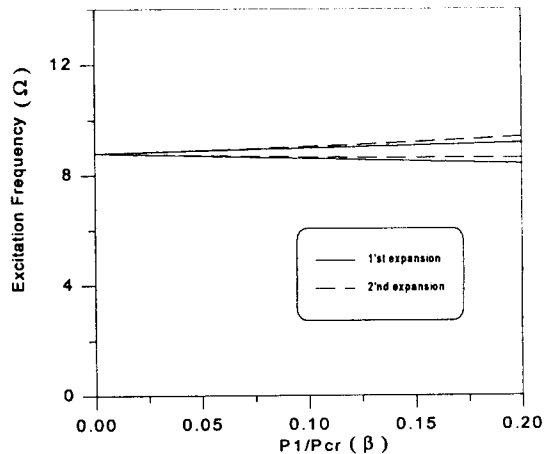


Fig. 8 The comparison of 1st expansion and 2nd expansion ($a = 0.1, L/d = 10, h/d = 1/10$)

계비에 상당히 민감하게 변함을 지적하였으며, 가장 중요한 동적 불안정성은 낮은 모드에서 발생하는 강한 불안정성이므로 두께비에 따른 임계하중값을 구해보았다. Fig. 6은 두께비에 따른 임계하중을 나타낸 것으로, 두께비(h/d)가 1/40, 1/20, 1/14, 1/10, 1/8, 1/6 인 경우에 대하여 구한 것이다. 두께비가 작을수록 작은 크기의 중동력에 의해 동적 불안정성이 생기는 것을 알 수 있다. 두께에 따른 진동수의 미묘한 변화가 임계하중에 대해서는 상당히 큰 차이를 만들어 내고 있다.

형상비(L/d)가 동적 불안정성을 일으키는 임계하중에 미치는 영향을 살펴보고자 한다. Fig. 7은 형상비의 임계하중에 대한 영향을 알아본 것이다. 단면유지모드($n=1$)의 첫 번째, 두 번째, 세 번째($m=1, 2, 3$)모드의 고유치는 원통셀이 가늘고 길어지면서 작아지고, 임계하중도 작아지는 경향을 보이고 있다.

3.3 맥동중동력 $P_0 + P_1 \cos \Omega t$ 가 작용하는 경우

동적 불안정성이 나타나는 영역을 살펴보기 위해 사용하는 Multiple scales 법은 변수의 계수(ϵ)가 작다라는 가정에 기초해 있다(2). Fig. 8에서는 ϵ 의 1차항까지 고려한 해의 타당성을 검토하기 위해 ϵ 의 2차항까지 전개한 해의 결과와 비교하였다.

그림을 보면, 1차 전개를 통해 구한 동적 불안정성을 나타내는 영역과, 2차 전개를 통해 구한 결과와는 큰 차이를 보이지 않고 있음을 알 수 있다. 또한, 영역이 상대적으로 작은 곳에서는 두 결과의 차이가 없으며 β 값이 0.1에 이르기까지 두 결과가 거의 일치하고 있음을 알 수 있다. 따라서 이후의 결과에는 1차 전개를 통해 β 값이 0.1에 이르는 범위까지의 불안정 영역을 살펴보았다.

Fig. 9 와 Fig. 10 은 형상비(L/d)가 10이고 두께비(h/d)가 각각 1/10, 1/20인 경우의 동적 불안정 영역을 보여주고 있다. 중요한 의미를 갖는 낮은 진동수들에 의해 나타나는 조합공진 영역을 살펴 보면 두께비가 1/10인 경우는 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 모드가 서로 합 또는 차형태의 조합공진을 일으키고 있다. 이들은 모두 단면이 변형하지 않는 축방향으로 1차, 2차, 3차 및 4차 모드들이다. 두께비가 1/20인 경우는 $\omega_2 - \omega_1$ 근처에서만 불안정 영역이 나타난다. 첫 번째, 두 번째 모드들은 세 번째, 네 번째 모드와는 조합공진을 일으키지 않고 있다. 두께가 얇아지면서 단면 변형 모드인 $n=2$ 모드들이 저차로 내려와 세 번째 네

번째 모드가 되면서 단면유지모드와 조합공진을 일으키지 못하는 것이다. 따라서, 원주 방향 모드수가 같은 모드끼리만 조합공진을 일으킬 수 있다는 사실을 확인할 수 있었다. 결과적으로 두께가 두꺼운 셀에서는 낮은 진동수의 모드들이 모두 단면유지모드인 관계로 여러 가지 조합공진이 존재하나, 얇은 셀에서는 낮은 진동수에 단면유지모드와 단면변형모드가 섞여 있으면서 같은 모드사이에서만 조합공진이 존재하게 되어 조합공진이 거의 발생하지 않는다.

구조물이 가장 위험한 곳은 제일 밑에 있는 $2\omega_1$ 근처에서 발생하는 불안정 영역(primary parametric instability region)이므로 이 영역에 대한 여러 요소의 효과를 알아보는 것이 중요한 의미를 갖는다. Fig. 11 은 두께비의 영향을 알아본 것이다. 두께가 얇아질수록 불안정 영역의 넓이가 넓어지고, 낮

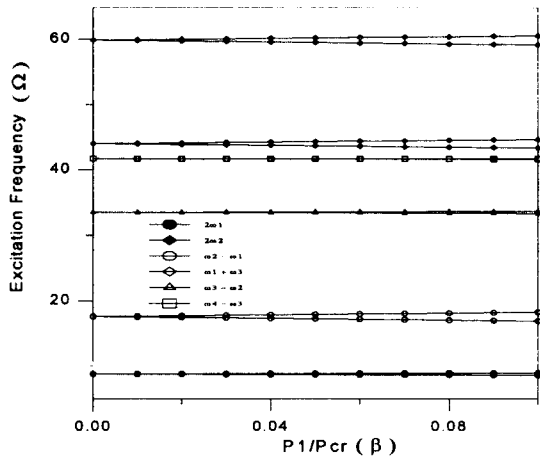


Fig. 9 Parametric instability region ($\alpha = 0.1, L/d=10, h/d=1/10$)

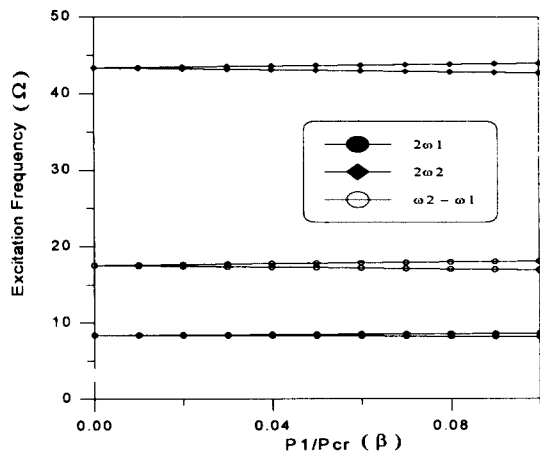


Fig. 10 Parametric instability region ($\alpha=0.1, L/d=10, h/d=1/20$)

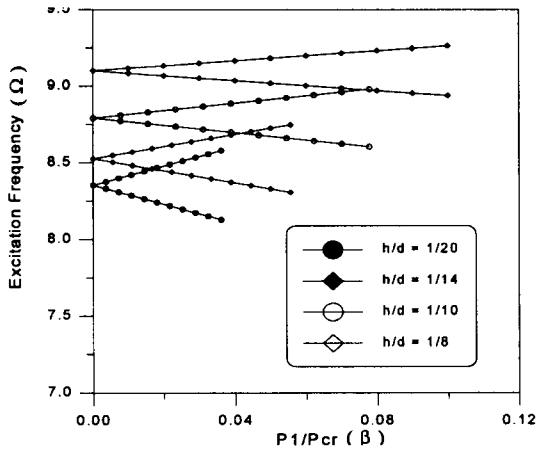


Fig. 11 Primary parametric instability region with various thickness ratio ($\alpha = 0.1, L/d = 10$)

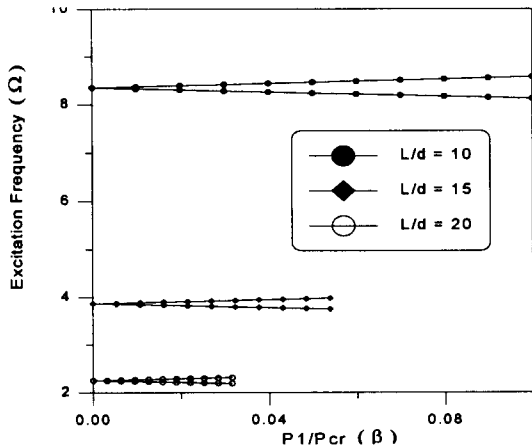


Fig. 12 Primary parametric instability region with various aspect ratio ($\alpha = 0.1, h/d = 1/20$)

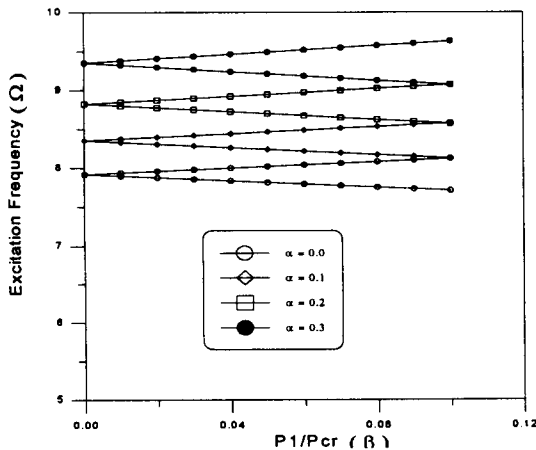


Fig. 13 Primary parametric instability region with various α ($L/d = 10, h/d = 1/20$)

은 쪽에 위치함을 알 수 있다. 따라서 두꺼운 원통셀의 경우 일정한 크기의 하중이 작용하는 경우뿐만 아니라 맥동력이 작용하는 경우에도 파라메트릭 불안정성이 일어날 확률이 작게된다. 얇은 셀일수록 임계하중 P_{cr} 의 크기가 작기 때문에 1차 전개의 타당성을 보증할 수 있는 β 의 영역이 두꺼운 셀에 비해 작게된다. 여기의 β 값은 $h/d = 1/8$ 인 경우를 기준으로 한 것이다.

Fig. 12에서는 형상비가 동적 불안정성에 미치는 영향을 살펴보기 위해 L/d 가 10, 15, 20인 경우 $2\omega_1$ 근처에서 발생하는 불안정 영역을 구해 보았다. 형상비가 증가할수록 불안정성을 나타내는 가진 진동수의 영역이 낮은 쪽으로 이동함을 알 수 있다. 하지만 불안정 영역의 폭에는 별다른 영향을 끼치지 않고 있다.

가해지는 하중 $P_0 + P_1 \cos \Omega t$ 에서 일정한 크기의 하중 P_0 의 크기가 가진 진동수 Ω 의 불안정 영역에 미치는 영향을 알아보기 위해 $\alpha (= P_0/P_{cr})$ 이 0.0 0.1 0.2 0.3 일 때의 불안정 영역을 Fig. 13에서 구해보았다. $\alpha = 0.0$ 인 경우는 순수 맥동력 $P_1 \cos \Omega t$ 만이 작용하는 경우이다. α 값이 커지면서 불안정 영역의 폭은 넓어지지만 영역 위치는 높은 쪽으로 이동하는 경향을 보여주고 있다.

4. 결 론

지금까지의 연구결과를 토대로 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

먼저, 일정한 크기의 총동력 P 가 가해지는 경우 발생하는 동적 불안정성에 관한 결론은 다음과 같다.

첫째, 두 모드가 만나서 동적 불안정성을 일으킬 때, 원주 방향 모드수가 같은 모드끼리만 불안정성을 일으킬 수 있다. 즉, 단면의 모양이 변형되지 않는 모드끼리, 또는 단면의 모양이 같은 모양으로 변형하는 모드들끼리 불안정성을 일으킨다.

둘째, 두께가 두꺼운 셀의 경우 단면이 변형하지 않는 모드의 1차, 2차 모드가 먼저 강한 동적 불안정성을 일으키나 얇은 셀의 경우는 단면변형모드가 작은 크기의 하중에서 먼저 약한 동적 불안정성을 일으킨다.

셋째, 두께가 얇고 긴 원통셀의 임계하중이 작다. 맥동 총동력 $P_0 + P_1 \cos \Omega t$ 가 작용하는 경우 가진 진동수의 불안정 영역에 관한 결론은 다음과 같다.

첫째, 원주 방향 모드수가 같은 모드끼리만 조합

공진을 일으킬 수 있다. 두께가 두꺼운 셀에서는 낮은 진동수의 모드들이 모두 단면유지모드인 관계로 여러 가지 조합공진이 존재하나 얇은 셀에서는 낮은 진동수에 단면유지모드와 단면변형모드가 섞여 있으면서 같은 모드사이에서만 조합공진이 존재하게 되어 조합공진이 거의 발생하지 않는다.

둘째, 두께가 얇은 셀은 가진진동수의 불안정 영역이 넓고 낮은 영역에 존재한다.

셋째, 형상비는 가진진동수의 불안정 영역에 별다른 영향을 끼치지 못한다.

넷째, $P_0 + P_1 \cos \Omega t$ 에서 일정한 크기의 하중 P_0 가 커지면 불안정 영역이 넓어진다.

후 기

본 연구는 1997년도 교육부 학술 연구 조성비 (기계공학 : ME 97-G-03)에 의하여 연구되었음을 밝히며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) H. Ziegler, 1968, *Principles of Structural Stability*, Blaisedll Pub. Co..
- (2) A. H. Nayfeh, D. T. Mook, 1979, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, Inc..
- (3) T. R. Beal, 1965, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts", AIAA Journal, Vol. 3, No. 3, pp. 486~494.
- (4) Y. P. Park, 1987, "Dynamic Stability of a Free Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force", J.of Sound and Vibration, Vol. 113, No. 3, pp. 407~415.
- (5) N. Willems, 1966, "Experimental Verification of the Dynamic Stability of a Tangentially Loaded Cantilever Column", Trans. ASME, J. App. Mech., pp. 460~461.
- (6) K. Higuchi, E. H. Dowell, 1990, "Dynamic Stability of a Rectangular Plates with Four Free Edges Subjected to a Follower Force", AIAA Journal, Vol. 28, No. 7, pp. 1300~1305.
- (7) K. Higuchi, E. H. Dowell, 1989, "Effects of the Poisson Ratio and Negative Thrust of the Dynamic Stability of a Free Plates Subjected to a Follower Force", J. of Sound and Vibration, Vol. 129, No. 2, pp. 255~269.
- (8) J. E. Brown, J. M. Hutt, A. E. Salama, 1968, "Finite Element Solution to Dynamic Stability of Bars", AIAA J., Vol. 6, No. 7, pp. 1423~1425.
- (9) J. Moorthy, J. N. Reddy, and R. H. Plaut, 1990, "Parametric Instability of Laminated Composite Plates with Transverse Shear Deformation", Int. J. Solids Structures, Vol. 26, No. 7, pp. 801~811.
- (10) C. L. Liao, C. R. Cheng, 1994, "Dynamic Stability of Stiffened Laminated Composite Plates and Shells Subjected to In-Plane Pulsating Forces", J. of Sound and Vibration, Vol. 174, No. 3, pp. 335~351.
- (11) W. Soedel, 1982, "On the Vibration of Shells with Timoshenko-Mindlin type Shear Deflections and Rotatory Inertia", J. of Sound and Vibration, Vol. 83, No. 1, pp. 67~79.
- (12) H. Stolarski, T. Belytschko, 1983, "Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Element", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 41, No. 3, pp. 279~296.
- (13) G. B. Warburton, 1970, "Natural Frequency of Thin Cantilever Cylindrical Shells", J. of Sound and Vibration, Vol. 11, No. 3, pp. 335~338.
- (14) H. Chung, 1981, "Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells", J. of Sound and Vibration, Vol. 74, No. 3, pp. 331~350.
- (15) C. L. Dym, 1973, "Some New Results for the Vibrations of Circular Cylinders", J. of Sound and Vibration, Vol. 29, No. 2, pp. 189~205.