한국소음진동공학회지 제 8 권 제 2 호, pp. 297~305, 1998.

〈논 문〉

중간탄성지점이 있는 부분고정단 압축재의 고유치 문제에 관한 연구

A Study on the Eigenvalue Problems of Partially Fixed End Members with Intermediate Elastic Supports

김 순 철* · 문 연 준* · 이 수 곤**

Soon-Chul Kim, Youn-Joon Moon and Soo-Gon Lee

(1997년 12월 8일 접수 ; 1998년 3월 3일 심사완료)

Key Words : Elastic Critical Load(탄성 임계 하중), Natural Frequency(고유 진동수), Eigenvalue (고유치), Partial Fixity(부분 고정도), Elastic Support(탄성지점)

ABSTRACT

The finite element method is used for the study of the eigenvalue problems of partially fixed end beams with intermediate elastic supports. The elastic critical loads and natural frquencies of the beams are investigated by changing the numbers of elastic supports and their stiffness, and also by changing Kinney's fixity factor, f_a. The relationship between two eigenvalues is established by calculating the corresponding values of $(\omega/\omega_n)^2$ through changing (P/P_{cr}) values. The results of this study are as follows : (1) The elastic critical loads and natural frequencies of beams increase with increases in Kinney's fixity factor, f_a and with the increased numbers of intermediate elastic supports. (2) The relationship between elastic critical loads and the natural frequencies of partially fixed end beams with intermediate elastic supports is $P/P_{cr}+(\omega/\omega_n)^2=1$ without regard to Kinney's fixity factor, the stiffness of elastic supports, or the number of elastic supports.

1. 서 론

일반적으로 구조물의 설계에 있어 절점의 구속상태는 활절(hinge), 또는 고정단으로 가정하는 것이 보통이다. 그러나 실제 구조물의 접합부에서 완전한 활절, 또는 완전 고정의 구조는 존재하기 어렵고 대개의 경우는 활절과 고정단 사이의 고정도(부분강접합,부분고정)를 지닌채 연결되어 있다고 볼 수 있다.

한편, 지붕 트러스의 상현재는 중도리로 중간지지되어 있기 때문에, Fig. 1과 같이 중간탄성지점을 갖는 압축부재로 간략화 할 수 있다. 즉, 상현재의 면외좌굴장 길이 내에 설치되는 중도리 수 만큼의 탄성지점을 갖는 압축부재로 생각할 수가 있다.

본 논문에서는 트러스의 상현재처럼 중간 탄성지점이 있는 그리고 단부가 완전 활절도 아니며 완전 고정도 아닌 부분고정도를 갖는 압축부재의 탄성임

* 정회원, 동신대학교 공과대학 건축공학과
** 정회원, 전남대학교 공과대학 건축학과

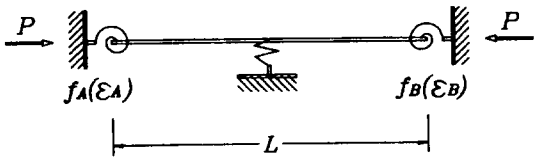

Fig. 1 Partially fixed strut with intermediate elastic supports

계하중과 고유진동수를 수치해석법중의 하나인 유한요소법을 이용하여 산정하고자 한다. 그리고 다른 구조물(단순지지보, 평판, 평면골조)에서의 탄성임계하중과 고유진동수와의 관계는 대체적으로 식 (1)과 같이 되는 것으로 확인되었는데[1~4], 중간탄성지점이 있는 부분고정단 압축재의 고유치간의 관계도 식 (1)처럼 나타낼수 있는지를 알아보고자 한다.

$$\frac{P}{P_{cr}} + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \fallingdotseq 1.0 \tag{1}$$

P_{cr} : 탄성임계하중, P : 압축하중

ω_n : 고유진동수, ω : P가 작용할때의 진동수

단부의 부분 강접합도(partial rigidity)는 여러가지 정의법 중 Kinney의 부분고정도(partial fixity) f의 정의와 Timoshenko의 단부구속도(end restraint) ε이 결합된 식 (2)를 이용하기로 한다[5].

$$\varepsilon_A = \frac{4EI}{l}\frac{f_A}{1-f_A} \quad , \quad \varepsilon_B = \frac{4EI}{l}\frac{f_B}{1-f_B} \tag{2}$$

여기서, $f_{A,B}=1$: 완전 고정단

$f_{A,B}=0$: 이상 활절(hinge)

2. 수치 해석법

2.1 요소의 강성행렬

Fig. 2는 축방향력 P와 절점력 $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$을 받는 beam-column 요소다. 절점변형은 각각의 절점에서 수직변위 w와 회전각 $\theta(=dw/dx)$만 있는 것으로 생각할 때 전 위치 에너지(total potential energy)는 다음과 같다.

$$\pi^e = \frac{1}{2}\int_l \left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + P\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]dx \tag{3}$$

처짐함수 w를 형상함수(shape function)를 이용하여 나타내면

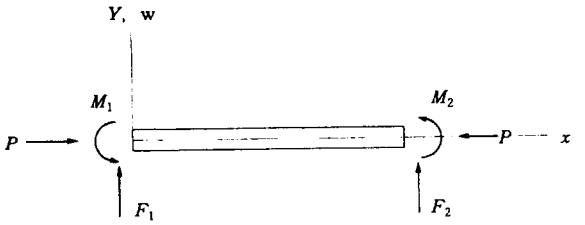

Fig. 2 Local coordinatates and nodal displacement components

$$w = [N_1, N_2, N_3, N_4]\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N]\{\alpha\} \tag{4}$$

식 (4)를 이용하여 식 (3)을 다시 쓰면 식 (5)와 같이 된다.

$$\pi^e = \frac{1}{2}\{\alpha\}^T\left(\int_l EI\{N''\}[N'']dx\right)\{\alpha\} + \frac{1}{2}\{\alpha\}^T\left(P\int_l\{N'\}[N']dx\right)\{\alpha\} \tag{5}$$

$$[K_b]^e = \int_l EI\{N''\}[N'']dx \tag{6}$$

$$[K_g]^e = \int_l EI\{N'\}[N']dx \tag{7}$$

윗식에서 $[K_b]^e$, $[K_g]^e$ 는 각각 요소의 휨강성행렬(flexural stiffness matrix) 및 기하학적 강성행렬(geometric stiffness matrix)로 다음과 같다[6].

$$[K_b]^e = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 6l & (4l^2)^* & \cdot & (symm.) \\ -12 & -6l & 12 & \cdot \\ 6l & 2l^2 & -6l & (4l^2)^* \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$[K_g]^e = \frac{1}{30l}\begin{bmatrix} 36 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3l & 4l^2 & \cdot & (symm.) \\ -36 & -3l & 36 & \cdot \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

단부의 부분고정도는 휨강성행렬인 식 (8)의 $(4l^2)^*$ 대신 부분고정도 정의식 (2)로 대치시켜 고정도를 처리하였다.

2.2 요소의 질량행렬

질량행렬은 lumped mass matrix와 consistent mass matrix중 본 논문에서는 consistent mass matrix를 이용하기로 하는데 다음과 같다[7].

$$[M]^e = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 156 & . & . & . \\ 22l & 4l^2 & . & (symm.) \\ 54 & 13l & 156 & . \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.3 유한요소 해석

축방향력이 작용하지 않는 계에서 감쇠를 무시한 자유진동방정식은 다음과 같다.

$$[\,[K_b] - \omega^2 [M]\,]\{D\} = 0 \quad (11)$$

압축하중의 영향을 고려하기 위하여 기하학적 강성행렬 $[K_g]$ 를 식 (11)의 $[K_b]$ 항과 더하면 다음 식으로 된다.

$$[\,[K_b] + P[K_g] - \omega^2 [M]\,]\{D\} = 0 \quad (12)$$

윗식에서 먼저 ω를 0으로 놓고 고유치를 구하면 탄성임계하중 P_{cr}이 구해지고, $[K_g]$ 의 전치항 P 를 0으로 놓고 고유치를 구하면 고유진동수 ω_n 이 구해진다. 본 논문에서는 양단의 부분고정도, 탄성지점의 갯수와 강성에 변화를 주어 탄성임계하중과 고유진동수를 별도로 먼저 구한 다음, 기하학적 강성행렬 $[K_g]$ 의 전치항 P를 $P = R \cdot P_{cr}$(R: 임계하중비)로 놓고 $R=0.0$에서 $R=1.0$까지 0.2씩 증가시켜 ω가 어떻게 변화하는지를 조사하였다. 이 과정을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$[\,[K_t] - \omega^2 [M]\,]\{D\} = 0 \quad (13)$$

여기서 $[K_t] = [K_b] + R \cdot P_{cr}[K_g]$

식 (13)은 전형적인 고유치 문제로 컴퓨터를 이용하여 반복계산을 행함으로써 고유치 및 고유벡터를 계산할 수 있다. 그러나 반복법(iteration method)에 의하여 식 (14)의 고유치를 구하면 최대 고유치가 구하여지므로, 필요로 하는 최소 고유치(임계치)를 구하기 위해서는 식 (13)을 다음처럼 변형시키면 된다.

$$[K_t]^{-1}[M] - \frac{1}{\omega^2}[I] = 0 \quad (14)$$

3. 해석결과 및 고찰

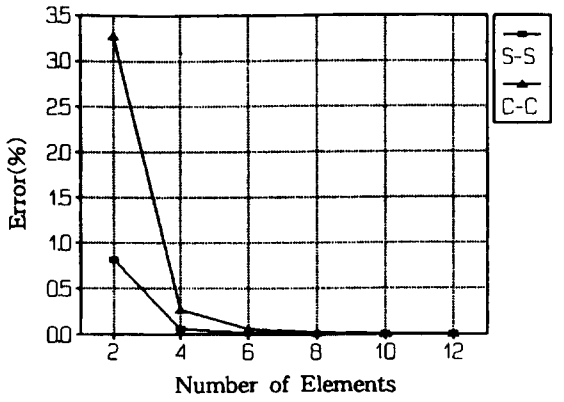

Fig. 3 Errors of elastic critical load

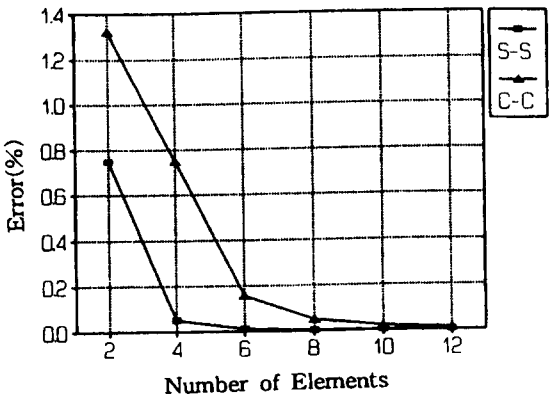

Fig. 4 Errors of natural frequency

Table 1 Comparison of results with other studies (struts with partially fixed ends)

예제 \ 계수	탄성임계하중 계수 k_1		고유진동수 계수 k_2	
	F.D.M.	본 해석치	F.D.M.	본 해석치
f_A=0.5 — f_B=0.5	20.88	20.96	211.52	211.51

Table 2 Comparison of results with other studies (struts with intermediate elastic supports)

예제 \ 계수	탄성임계하중 계수 k_1		고유진동수 계수 k_2	
	TIMOSHENKO	본 해석치	THOMSON	본 해석치
f_A=0.0 — K — K, — f_B=0.0, K=799.44	88.83	88.97	·	·
f_A=0.0 — K=100 — f_B=0.0	·	·	786.15	786.15

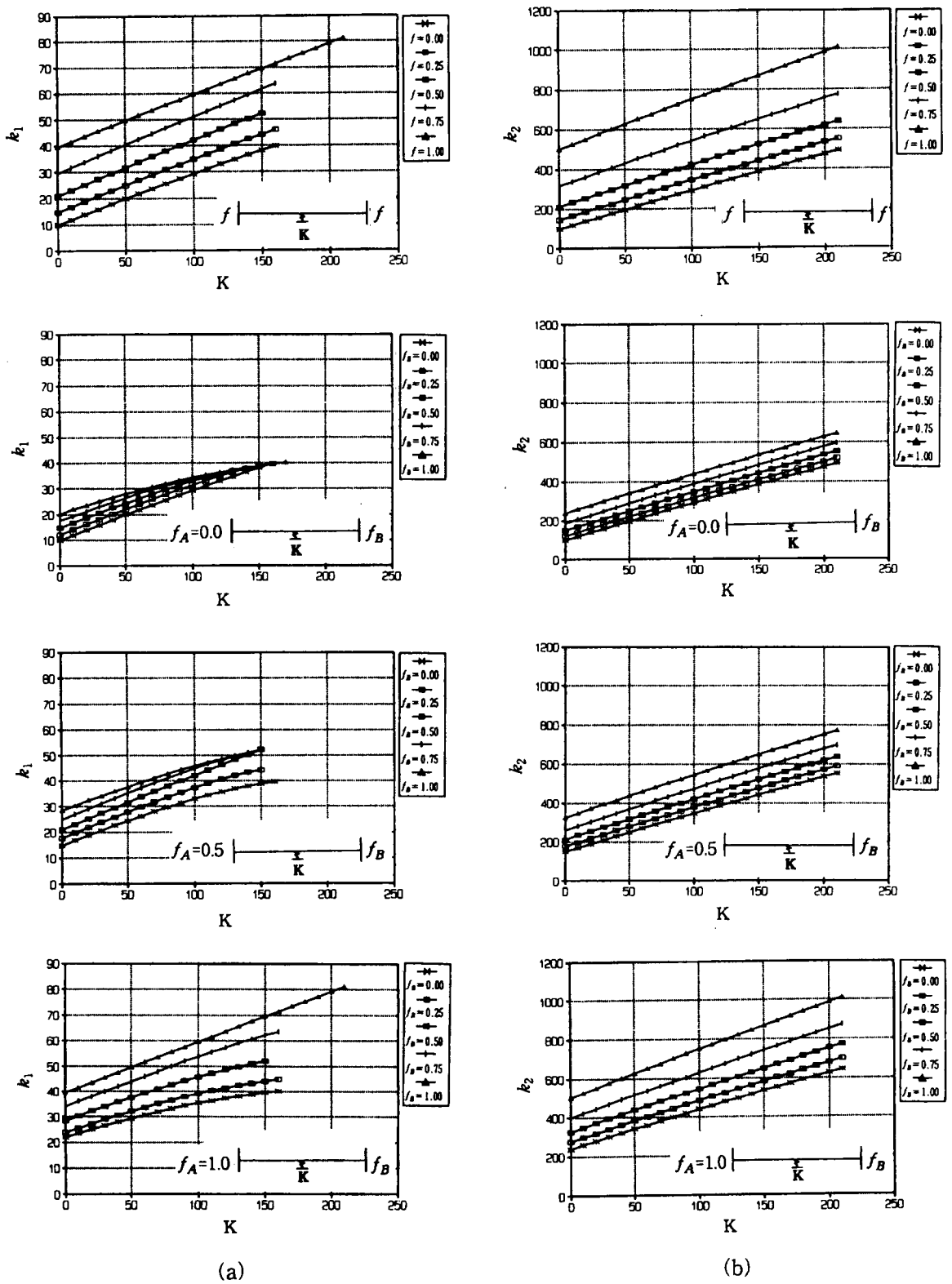

Fig. 5 Elastic critical loads and natural frequencies

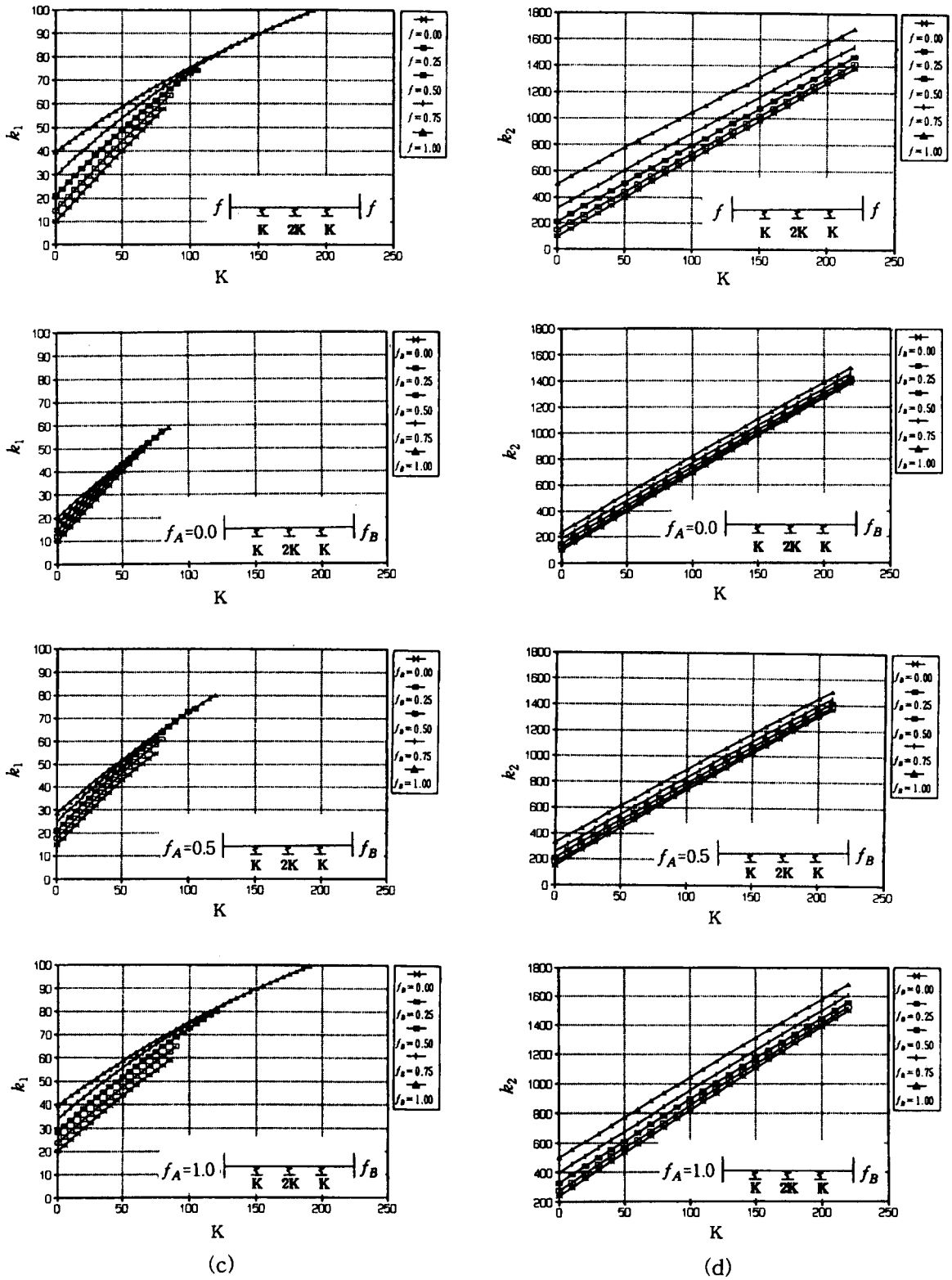

Fig. 5 Elastic critical loads and natural frequencies (Continuation 2)

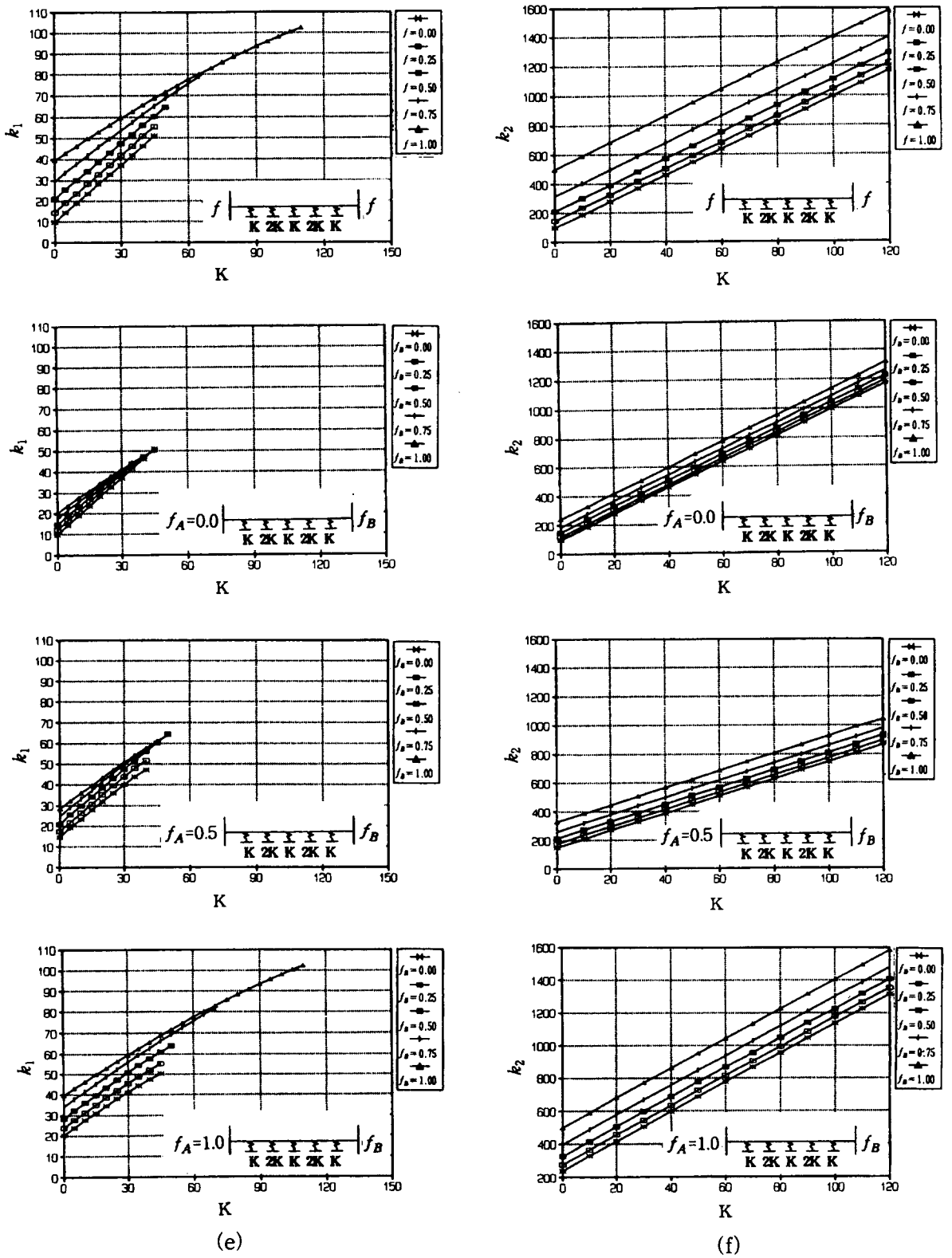

Fig. 5 Elastic critical loads and natural frequencies (Continuation 3)

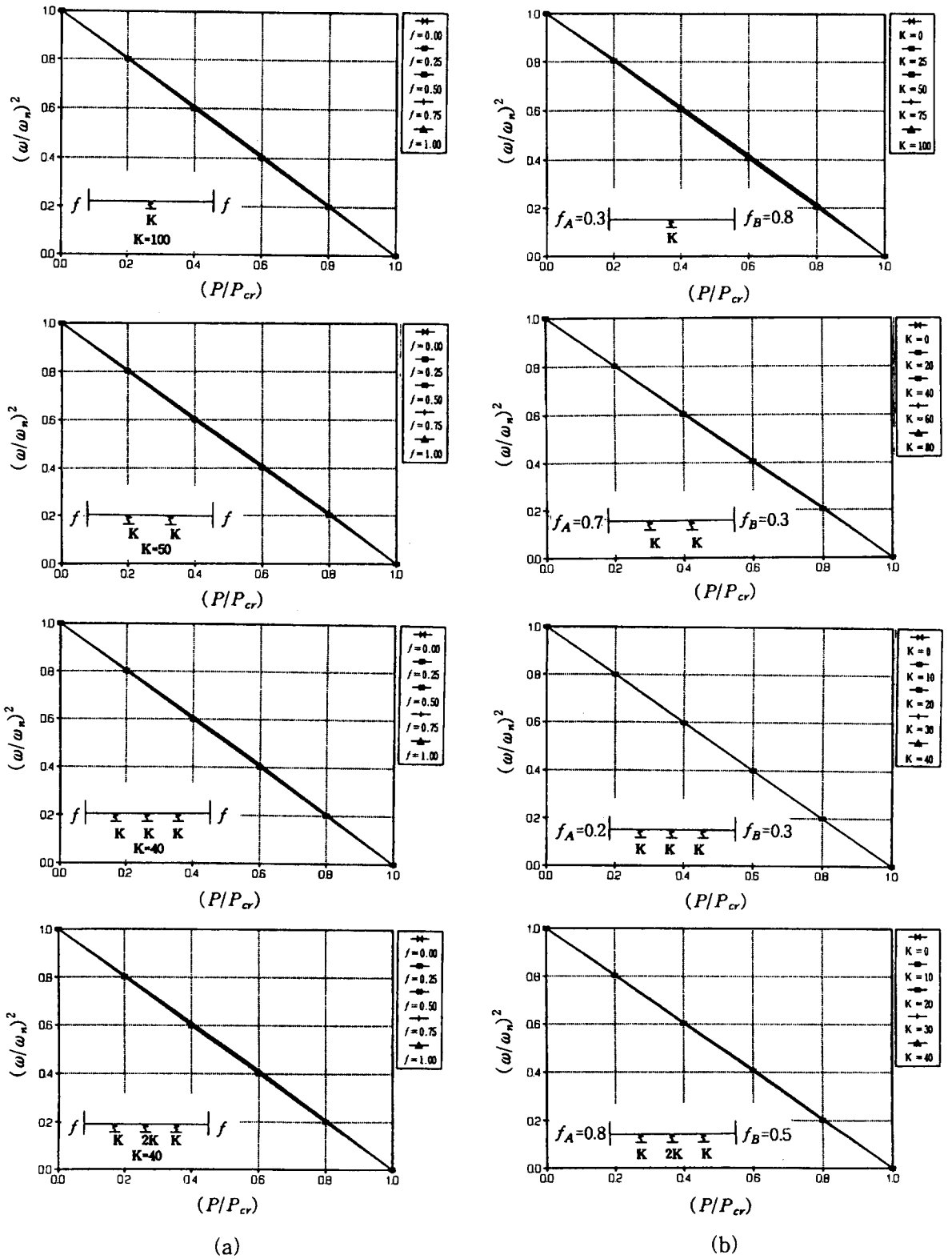

Fig. 6 The relationship between elastic critical load and natural frequency

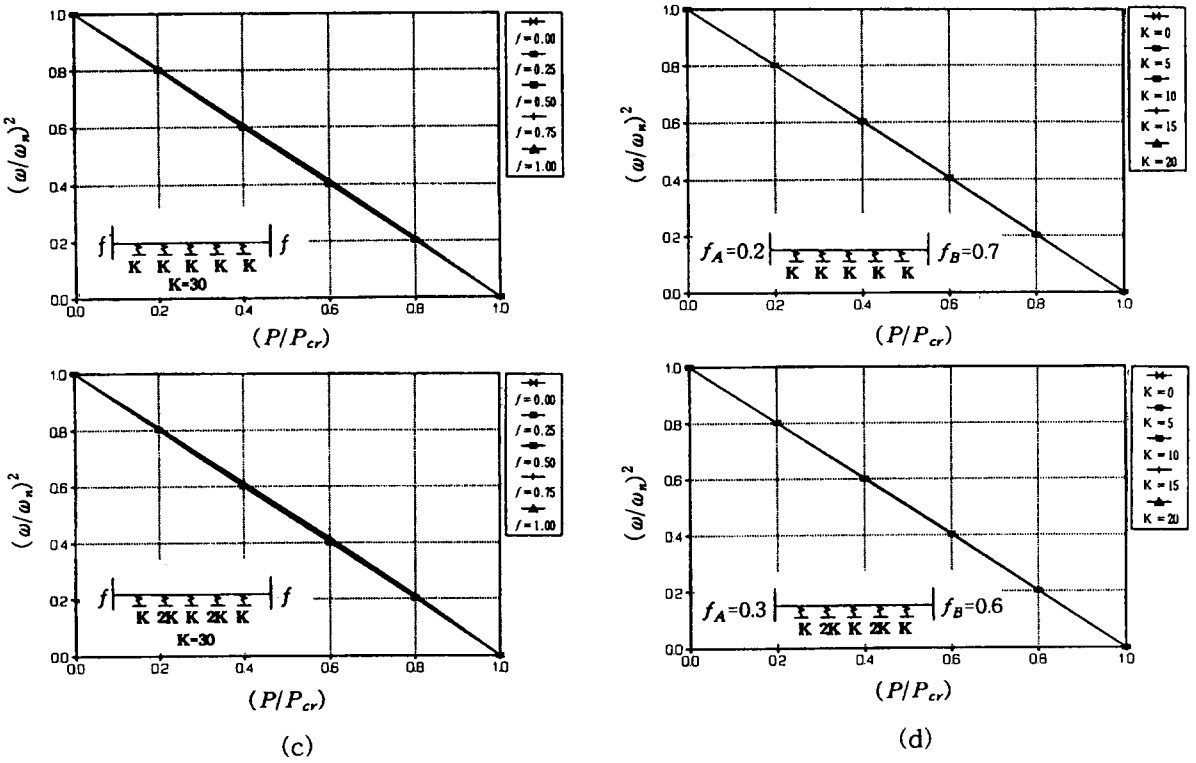

Fig. 6 The relationship between elastic critical load and natural frequency (Continuation 1)

먼저 개발된 프로그램의 검증을 위하여 양단이 완전 고정(C-C), 완전 활절(S-S)인 경우의 탄성임계하중치와 고유진동수를 부재 등분수 및 경계조건별로 구하여 정해치와의 오차율를 표시한 것이 그림 3, 4이다. 부재를 6등분만 하여도 정해치와의 오차율은 0.2% 이내로 수렴하고 있어 유한요소법에 의한 고유치 해석은 매우 높은 정도(精度)를 보이나 본 연구에서는 좀 더 정도를 높이기 위하여 부재를 12등분하여 수행하였다.

중간탄성지점이 있는 부분고정단보의 고유치에 대한 비교 문헌을 찾을 수 없어 부분고정단만이 있는 경우와 중간탄성지점만이 있는 경우로 나누어 개발된 program검증을 시도하였다. 먼저 부분고정단을 갖는 경우에 대한 탄성임계하중치와 고유진동수의 검증을 위하여 부분고정단 보의 고유치를 차분법으로 산정한 참고문헌(5)과 비교해서 Table 1에 나타냈고, 중간탄성지점이 있는 경우는 Timoshenko[8]와 Thomson[9]의 결과치를 비교해서 Table 2에 나타냈다. (탄성임계하중 : $P_{cr}=k_1\frac{EI}{L^2}$, 고유진동수 : $w_n^2=k_2\frac{EI}{\rho AL^4}$, 중간탄성지점의 강성 $K_o(KL^3/EI)$)

Table 1,2에서 보면 최대 오차율이 0.3%정도로 나타나 유한요소법에 의한 부분고정단보와 중간탄성지점이 있는 경우의 고유치 해석 또한 매우 높은 정도를 보이고 있다.

Fig. 5는 양단의 고정도, 중간탄성지점의 강성과 지점의 갯수를 다르게 변화시켰을때의 탄성임계하중계수 k_1과 (Fig. 5(a),(c),(e)) 고유진동수계수 k_2 (Fig. 5(b),(d),(f))를 나타낸 그림이다. 각 그림에서 제일 상단은 양단의 지점 고정도를 활절 ($f_A=f_B=0$)에서 고정 ($f_A=f_B=1$)으로 변화시켰을 때의 탄성임계하중계수 k_1과 고유진동수계수 k_2를 나타낸 그림이고, 이하 그림은 양단부의 고정도를 서로 달리 변화시켰을때에 대한 탄성임계하중과 고유진동수를 나타낸 그림이다. 탄성임계하중은 중간탄성지점의 강성을 증가시키면 어느 시점에서 좌굴모드가 2차로 바뀌는데, 여기서는 중간탄성지점의 강성을 1차모드에서 2차모드로 바뀌는 직전까지만 강성을 증가시켜 그에 대한 탄성임계하중을 나타냈다. 일단이 활절인($f_A=0.0$) 경우 타단의 고정도에 관계없이 중간탄성지점의 강성이 증가함에 따라 탄성임계하중계수 k_1이 어느 한 점에서 만나는 반

면, 고유진동수계수 k_2는 양단의 고정도에 관계없이 중간탄성지점의 강성의 증가에 따라 일정한 간격으로 증가하는 경향을 보여주고 있다.

Fig. 6은 탄성임계하중과 고유진동수와의 관계를 도시한 것이다. 그림에서 보듯 단부의 고정도, 중간탄성지점의 강성과 갯수에 관계없이 (P/P_{cr})와 $(\omega/\omega_n)^2$은 선형적인 관계, 즉 식 (1)과 같은 관계를 나타내고 있음을 알수 있다.

4. 결 론

압축부재의 양단부 고정도를 변화시키고 중간탄성지점의 강성 및 갯수를 변화시켰을 때의 탄성임계하중 및 고유진동수를 유한요소법을 이용하여 산정하고 또 이들간의 관계를 고찰한 결과는 다음과 같다.

(1) 일단이 활절일때($f_A=0.0$)는 타단의 고정도에 관계없이 중간탄성지점의 강성이 증가함에 따라 탄성임계하중계수 k_1은 어느 한점에서 만나는 경향이 있음을 알 수 있었다.

(2) 고유진동수는 단부의 고정도와 중간탄성지점의 강성 증가에 따라 선형적인 증가를 나타냈다.

(3) 중간탄성지점이 있는 부분고정단보의 탄성임계하중과 고유진동수와의 관계는 단부의 고정도나 중간탄성지점의 강성에 관계없이 $(P/P_{cr})+(\omega/\omega_n)^2 \fallingdotseq 1$로 나타낼 수 있었다.

참 고 문 헌

(1) W. F. Chen, 1976, Theory of Beam-Columns, McGraw-Hill, pp. 110~115.

(2) 김순철, 이수곤, 김선채, 1991, 탄성지점을 갖는 등단면 부재의 탄성임계하중과 고유진동수와의 관계, 대한건축학회논문집, 제 7 권, 제 5 호, pp. 227~237.

(3) Kim,S. C. and Lee,S. G., 1990, Lateral Vibration and Elastic Stability of Rectangular Plates, Proceeding of The International Conference on Structural Engineering and Computation,Peking Univ. Press, pp. 398~407.

(4) 김순철, 이수곤, 1990, 평면골조의 탄성좌굴과 고유진동수와의관계,대한건축학회논문집,제 6 권, 제 5 호, pp. 223~230.

(5) 이수곤, 1979, Eigenvalue Problems of the Tapered Bars with Partially Fixed Ends, 서울대학교 대학원 공학박사학위논문.

(6) Irving H. S. and Clive L. D., 1985, Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics,Prentice-Hall, pp. 628~632.

(7) Dawe D. J., 1984, Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures, Clarendon Press, pp. 472~480.

(8) Timoshenko and Gere, 1961, Theory of Elastic Stability,McGraw-Hill, pp. 70~76.

(9) William T. Thomson, 1990, Theory of Vibration with Applicaions, Prentice Hall, pp. 280~282.

(10) Yang T. Y, 1986, Finite Element Structural Analysis, McGRAW-Hill.