수중 산란의 수치적 해석기법

김 재 환*·김 관 주**
(*인하대학교 기계공학과·**홍익대학교 기계공학과)

1. 머 리 말

지난 30여년간 무한 영역에 놓인 유한한 물체에 의한 산란을 해석하기 위하여 여러 가지의 수치적 해석기법이 개발되었다. 이것은 소나, 잠수함 등의 수중 음향을 비롯해서 지진학, 초음파 비파괴검사 그리고 초음파 의료진단 등의 광범위한 영역에서 응용되고 있기 때문에 많은 연구가 있었다. 본 글에서는 먼저 무한영역에서의 산란문제에 대한 기본원리를 설명하고 지금까지 연구된 수치적 해석 기법들을 정리해서 소개하여 소음진동 분야에 종사하는 분들에게 응용할 수 있는 기회를 제공하고자 한다.

2. 무한영역의 산란문제

무한영역이라고 칭할 수 있는 수중에 그림 1과 같이 f의 크기를 갖는 소음원이 있고

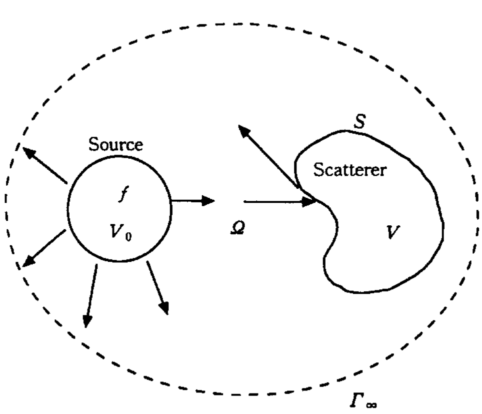

그림 1 무한 영역속의 산란체와 음원

임의의 거리에 한 물체가 있다고 하자. 이 물체는 강체일 수도 있고 탄성체일 수도 있다. 무한영역 Ω에서 속도장은 Helmholtz방정식을 만족해야 하므로

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(r) = -f(r),\quad r \in \Omega \tag{1}$$

이 된다. 경계면이 없는 자유 영역에서의 Green함수를 $g(r, r')$이라고 하면 이 함수 역시 식 (1)을 만족해야 한다. 즉, 단위 크기의 음원위치를 r', 관측점을 r이라고 하면

$$(\nabla^2 + k^2)g(r, r') = -\delta(r - r') \tag{2}$$

이 두식으로부터 다음과 같은 적분형 표현을 얻을 수 있다.

$$\int_\Omega (g\nabla^2\phi - \phi\nabla^2 g)\,d\Omega + \int_{V_0} fg\,dV = \begin{cases} \phi(r) & r \in \Omega,\ V \text{ 제외} \\ 0 & r \notin \Omega \end{cases} \tag{3}$$

여기서 첫째항은 Divergence 정리를 사용하여 다음과 같은 면적분으로 나타낼수 있다.

$$\int_S \left(g\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial g}{\partial n}\right)dS - \int_{\Gamma_\infty}\left(g\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial g}{\partial n}\right)d\Gamma + \int_{V_0} fg\,dV = \begin{cases} \phi(r) \\ 0 \end{cases}$$

여기서 둘째항은 Γ_∞가 무한대로 멀어질때 그 영향이 제로가 되므로(Sommerfeld radiation condition)

$$\int_S \left(g\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial g}{\partial n}\right)dS + \int_{V_0} fg\,dV = \begin{cases} \phi(r) & r \in \Omega \\ 0 & r \notin \Omega \end{cases} \tag{4}$$

이 식은 무한영역 문제의 Helmholtz 적분 표현으로 산란문제에서 음원이 간단한 형태라면 두번째항은 입사장 $\phi_i(r)$로 볼 수 있고 첫째항은 r위치에서 면적분에 의한 영향을 나타내는 것으로 산란장 $\phi_s(r)$로 나타낼 수 있다. 따라서 $r\in\Omega$인 점에서의 속도장은

$$\phi(r)=\phi_i(r)+\phi_s(r) \tag{5}$$

산란장은 산란체의 표면에서 유도된 음원에 의해서 생긴 것으로 따라서 방사 조건을 만족해야 한다. 식 (4)를 다시 쓰면 다음과 같은 형태를 얻을 수 있다.

$$\int_S\left(g\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial g}{\partial n}\right)dS=\phi_s(r),\quad r\in\Omega \tag{6}$$

또는

$$\int_S\left(g\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial g}{\partial n}\right)dS=-\phi_i(r),\quad r\notin\Omega \tag{7}$$

식 (6)은 호이겐의 원리를 나타내는 식으로서 산란장은 무한대로 떨어진곳에서는 방사조건을 만족해야 하고 경계면 S와 멀리 떨어진 곳에서는 non-singular해야 한다. 식 (7)은 Extinction theorem이라고 불리우며 뒤에서 자세히 설명한다.

3. 경계적분법 (Boundary Integral Equation Method)

식 (4)는 속도장과 그 미분치에 대한 값을 면적분해야 하는데 실제로 푸는 방법은 $r=r'$일때 singularity를 조심해서 처리하면 경계면 S에서의 값을 구할 수 있다[1,2]. 즉,

$$\phi_i(r)+\int_S\left(g\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial g}{\partial n}\right)dS=\begin{cases}\phi(r) & r\in\Omega\\ \frac{1}{2}\phi(r) & r\in S\\ 0 & r\notin\Omega\end{cases} \tag{8}$$

이 식을 경계적분식이라고 한다. 식 (4)와 구별되는 것은 식 (4)에서는 해의 유일성이 보장되지 않으나 식 (8)에서는 보장된다. 그러나 그해의 유일성은 산란체의 Neumann경계조건에서의 고유진동수와 파동수(wave number)가 일치하지 않을 때에만 보장된다. 이렇게 유일성이 보장 안되는 주파수를 irregular frequency라고 한다. 이에 대한 해결책으로는 Burton과 Miller[3]등에 의하여 제안된 CONDOR(Conposite Outward Normal Derivative Overlap Relation)방법과 Schenck[4]에 의해서 제안된 CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation)방법 등이 있다. 일반적으로는 CHIEF방법이 많이 사용되는데 이 방법은 구조물안에 임의의 위치에 압력이 0인 점을 선정함으로써 Helmholtz방정식의 고유해를 보장하는 방법이다. 그림 2는 반경 1m인 강체구의 산란을 경계요소법을 사용하여 해석한 결과이다. $ka=10$까지 이론해와 잘 맞는 결과를 나타내나 그 이상에서는 오차가 발생하는데 그 이유는 경계요소의 크기와 많은 고유진동수의 영향때문이다. 따라서 중주파수대를 넘어가는 영역의 산란은 경계요소법을 사용할 때 비효율적이다.

식 (8)과 같은 경계적분법을 직접법(direct approach)이라고 부른다. 이 식에서 ϕ와 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 대신에 single layer potential σ와 double layer potential μ를 도입하는 간접법(indirect approach)으로 풀 수 있다[1,2].

$$p(x)=\int_{S_1}\sigma(x')g(x,x')dS-\int_{S_2}\mu(x)\frac{\partial g(x,x')}{\partial n}dS \tag{9}$$

직접법을 사용했을때 시스템 행렬은 full, nonsymmetric의 형태가 된다. 반면에 간접법을 사용하면 시스템 행렬은 대칭형이 되어

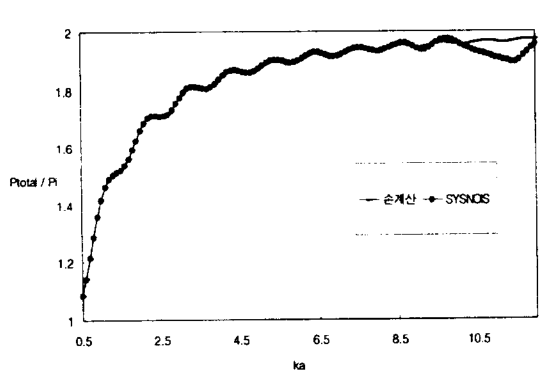

그림 2 수중 강체구의 산란(r=1m, backscattered total pressure at far-field)

유리하다. 그러나 미지수 σ와 μ를 구하고 다시 압력 p를 식 (9)를 사용하여 구해야 한다.

4. T-matrix법 (Extended Boundary Conditon)

Extinction theorem을 나타내는 식 (7)의 의미는 산란체에 의해서 점유된 공간내에서 입사장은 산란장을 생성하는 산란체 표면의 같은 음원들에 의해서 정확하게 소거된다는 것이다. 즉, 산란체가 점유한 공간내에서는 입사장이 없다는 것을 나타낸다. 이 정리는 Waterman[5]에 의해서 그 장점이 재조명되었으며 Extended Boundary Condition (EBC)이라고 불리어졌다. 첫번째는 이 방법은 산란체 표면에서 속도장과 그 미분치에 irregular frequency에 의해서 오차가 발생하는 것을 막아주는 것이고 다음으로는 EBC는 singular인 적분식들을 nonsigular인 무한개의 식들로 변형시키게 된다는 것이다. 이러한 잇점이 산란문제를 해석하는 한 기법을 이루었는데 일명 Waterman기법, T-matrix법[6,7], Null-field법 또는 EBC method이라고 불리운다.

이렇게 T-matrix법은 irregular frequency의 영향을 소거할 수 있는 장점이 있는 반면에 불규칙한 산란체에 대해서는 해석을 할수가 없다. 따라서 비정규적 형상의 산란체 주위는 유한요소법(FEM)을 사용하고 그 외부는 T-matrix법을 이용하는 hybrid[8]기법이 개발되기도 하였다. 그리고 탄성체 산란체의 경우에는 유한요소법을 구조해석에 사용하여 T-matrix법과 연결시킬 수 있다.

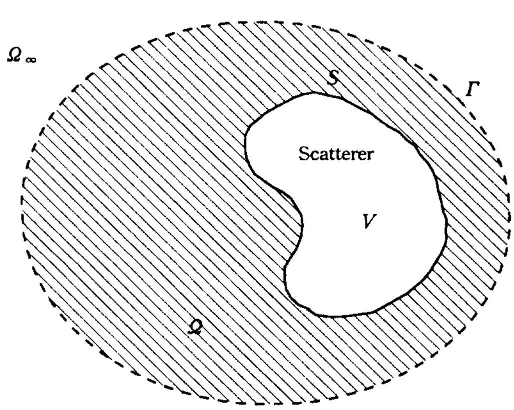

그림 3 무한영역의 인위적 경계를 통한 유한 영역화

5. 유한요소법 (Finite Element Method)[9,10]

무한영역에 산란체가 있을때 산란을 해석하기 위해서는 그림 3과 같이 유한한 해석영역을 인위적 경계, Γ를 설정함으로서 취할수 있다. 그리고 유한한 해석영역은 유한요소법을 사용하여 모델링하고 산란을 해석할수 있다. 유한요소법은 산란체가 비등방성이거나 감쇄성이 있는 재질이더라도 처리가 가능한 장점이 있다. 그러나 무한 영역을 유한 영역으로 나눈 인위적 경계, Γ에서 산란파가 반사되어 유한요소의 해에 오류를 주는 인위적 반사(artificial reflection)가 발생하게 된다. 따라서 경계면 Γ에서는 인위적 반사가 생기지 않는 비반사 경계조건(non-reflecting boundary condition)을 만족시켜야 한다. 비반사 경계조건에는 현재까지 여러가지의 시도들이 있었으며 다음 절에 소개한다.

인위적 경계면 Γ을 설정하는 대신에 유한요소법을 사용할때 Γ외부의 영역을 Super element를 사용하여 모델링 할 수도 있다. 그리고 Γ_∞에서는 산란파가 소멸되는 조건을 적용시킬 수 있다. 그러나 유한요소를 나누어서 super element를 구성해야 하는 번거로움과 irregular frequency영향이 남아있는 단점이 있다.

Super element 대신에 인위적 경계면 외부를 infinite element[11,12]를 사용하여 산란파의 소멸을 모델링할 수 있다. Infinite element는 산란파 또는 방사파의 far-field 특성을 나타내는 형상함수를 사용한 semi-infinite 격자이다(그림 4). Infinite element를 사용하여 방사문제 및 산란문제를 해석한 예가 많이 있었으며 그림 5는 강체구의 수중 산란을 해석한 결과이다. 비교적 높은 주파수까지 이론해와 잘 맞음을 볼 수 있다. 그러나 모든 infinite element는 무한대에서 산란장의 특성을 바르게 나타내지 못한다. 다시 말하면 요소의 차수에 따라 sommerfeld의 방사조건을 만족하는 것이 달라진다. 따라서 개략적인 경향은 문제가 없으나 높은 주파수까지 산란 문제를 정확하게 푸는데는 한계가 있다.

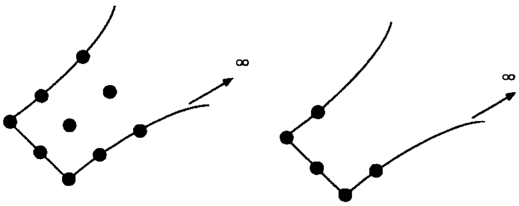

그림 4 Infinite elements

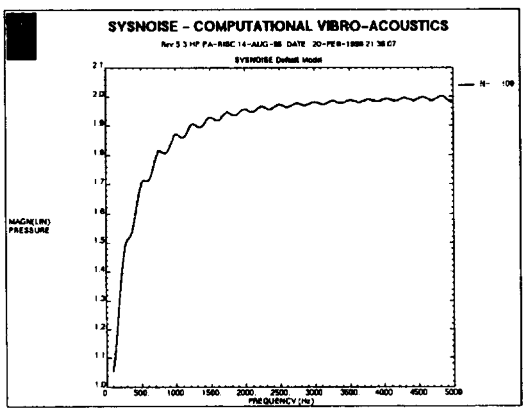

그림 5 Infinite element를 사용한 강체구의 산란해석

6. 비반사 경계조건 (Non-Reflecting Boundary Conditions)

무한영역을 유한한 해석 영역으로 나누는 인위적 경계(artificial boundary)에서 비반사 경계조건을 이루기 위한 연구가 지난 20년간 있어왔다. 첫째로는 흡수경계조건(absorbing boundary condition)으로서 이 방법은 sommerfeld 방사조건을 원음장에서 근음장으로 매핑시키되 truncation 오차와 반사가 적게한 것이다. ABC의 대표적인 예로서 Engquist와 Majda[13]는 pseudo-differential operator이론을 사용하여 완전한 ABC를 유도하였다. 그리고 이 완전한 비국부적인 경계조건을 국부적인 ABC로 근사화하는 방법을 개발하였다. 여기서 국부적(local) ABC란 모두 근사화된 것으로서 소거된 영역을 근사적으로 다룬다. 비국부적(nonlocal)이란 경계면의 모든점에서 해가 연성되어 있는 것을 말하며 따라서 형태가 복잡해지지만 대개 정확하고 해석영역이 작더라도 좋은 결과를 둔다. 또다른 예로서 bayliss와 turkel[14]은 BGT operator라고 명명하는 국부적 differential operator의 시리즈를 유도하였다. 일반적으로 이러한 국부적 differential operator들은 산란체가 작을 때는 잘 맞지만 클때는 그렇지 못하다.

최근에 DtN(Dirichlet-to-Nuemann)[15~17]이라는 일종의 완전한 비국부적 NRBC가 발표되었다. 무한영역의 해로부터 인위적 경계면에서 속도장과 그 미분치의 관계를 한 것을 DtN map이라고 칭하며 이것을 유한요소의 경계조건으로 사용한다. 이론적으로 이 경계조건은 무한개의 항으로 표시되며 유일해를 주지만, 그러나 DtN 조건이 실제 수행과정을 위해 truncate되면 특성주파수(characteristic frequency)에서 유일성이 깨지게 된다. DtN NRBC는 앞으로 산란문제에 대해서 자세히 연구되어질 필요가 있다[18].

그외에도 인위적 경계면에 좁은 영역을 주위로 두고 이곳에서 반사장을 소산시키는 filtering scheme이나 viscous 경계조건등을 사용한 방법이라든가[19] 속도장의 미분치를 penalty method를 이용하여 추가적으로 만족시키는 방법[20]등이 무한 영역의 산란을 다루기 위한 방법으로 연구되었다.

7. 맺 음 말

지금까지 수중산란의 수치적 해석 기법에 대해서 살펴보았으며 각 기법에 따라 장단점이 있는 것을 알 수 있다. 경계 요소법이나 infinite element는 무한영역의 처리에 많이 사용되어 왔으나 DtN과 같은 NRBC는 유한요소법과 아울러서 산란문제를 푸는데 있어서 가능성은 입증은 되었으나 실제적인 응용사례는 많지않다. 특히 높은 주파수까지 해석하기 위해서는 방법 자체가 근사화를 적게한 것이어야 하며 격자의 구성도 매우 중요하다. 산란체가 탄성체 구조물이면서 임의의 형태를 갖는 실제적인 문제를 해석하기 위해서는 유한요소 해석과 결부된 hybrid방법이 유용할 것이다.

참 고 문 헌

(1) P.K. Banerjee and R. Butter field, 1981, Bundary Methods in Engineering

Science, McGraw-Hill, London.
(2) C.A. Brebbia, J.C.F. Telles and L.C. Wrobel, 1984, Boundary Element Techniques, Springer Verlag, Berlin.
(3) A.J. Burton and G.F. Miller, 1971, "The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary Value Problems," Proc. R. Soc. London, Series A323, 201~210.
(4) H.A. Schenck, 1968, "Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems," J. Acoust. Soc. Am. 44(1), 41~58.
(5) P.C. Waterman, 1969, "New Formulation of Acoustic Scattering," J. Acoust. Soc. Am. 45, 1417~1429.
(6) V.K. Varadan and V.V. Varadan Eds., 1980, Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering-Focused on T-matrix Approach, Pergamon Press, New York.
(7) V.K. Varadan, V.V. Varadan, L.R. Dragonette and L. Flax, 1982, "Computation of Rigid Body Scattering by Prolate Spheroids using the T-matrix Approach," J. Acoust. Soc. Am. 71(1), 22~25.
(8) V.V. Varadan, K. Eswaran and V.K. Varadan, 1986, "A Hybrid FEM T-matrix Technique for the Analysis of Acoustic Wave Scattering by Elastic Shells of Revolution," J. Wave Material Interaction, Vol 1. 237~250.
(9) O.C. Zienkiewicz and P. Bettess, 1978, "Fluid-Structure Dynamic Inter-Action and Wave Force : An Introduction to Numerical Treatment," Int. J. Num. Meth. in Eng., 13, 1~16.
(10) E.L. Wilson and M. Khalvati, 1983, "Finite Elements for the Dynamic Analysis of Fluid-Solid Systems," Int. J. Num. Meth. in Eng., 19, 1657~1668.
(11) P. Bettess, 1977, "Infinite Elements," Int. J. Num. Meth. in Eng., 11, 53~64.
(12) L.G. Olson and K.-J. Bathe, 1985, "An Infinite Element for Analysis of Transient Fluid-Structure Interactions," Engineering Comput., 2, 319~329.
(13) B. Engquist and A. Majda, 1977, "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves," Math. Comput., 31(139), 625~651.
(14) A. Bayliss, M. Gunzburger and Eli Turkel, 1982, "Boundary Conditions for the Numerical Solution of Elliptic Equations in Exterior Regions," SIAM J. Appl. Math., 42(2), 430~451.
(15) D. Givoli and J.B. Keller, 1990, "Non-reflecting Boundary Conditions for Elastic Waves," Wave Motion, 12, 261~279.
(16) D. Givoli and J.B. Keller, 1989, "A Finite Element Method for Large Domains," Comp. Methods in Appl. Mech. Eng., 76, 41~66.
(17) D. Givoli, 1992, Numerical Methods for Problems in Infinite Domains, Elsevier, New York.
(18) I. Harari and T.J. Hughes, "Analysis of Continuous Formulations Underlying the Computation of Timeharmonic Acoustics in Exterior Domains," Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 97, 103~124, 1992.
(19) J. Lysmer and R.L. Kuhlemeyer, "Finite Dynamic Model for Infinite Media," J. of Eng. Mech. Div., ASCE, 95, 859~877, 1969.
(20) J. Kim, V.V. Varadan and V.K. Varadan, 1996, "Finite Element Modeling of Scattering Problems Involving Infinite Domains using Drilling Degrees of Freedom," Computer Meth. Appl. Mech. Eng. 134(1~2), 57~70.
(21) L. Jiang and R.J. Rogers, 1990, "Effects of Spatial Discretization on Dispersion and Spurious Oscillations in Elastic Wave Propagation," Int. J. Num. Meth. Eng. 29, 1205~1218.