

# 초기 처짐을 갖는 Spherical Shell의 동적 특성에 관한 연구(I)

- 기하학적 형상에 따른 동적 특성 -

## Dynamic Characteristics Analysis of Spherical Shell with Initial Deflection(I)

- Effect of Geometry on the Dynamic Characteristic -

조           진           구\*  
Cho,         Jin         Goo

### Summary

The widespread use of thin shell structures has created a need for a systematic method of analysis which can adequately account for arbitrary geometric form. Therefore, the stress analysis of thin shell has been one of the more challenging areas of structural mechanics.

The analysis of axisymmetric spherical shell is almost an every day occurrence in many industrial applications. A reliable and accurate finite element analysis procedure for such structures was needed.

In general, the shell structures designed according to quasi-static analysis may fail under conditions of dynamic loading. For a more realistic prediction on the load carrying capacity of these shell, in addition to the dynamic effect, consideration should also include other factors such as nonlinearities in both material and geometry since these factors, in different manner, may also affect the magnitude of this capacity.

The objective of this paper is to demonstrate the dynamic characteristics of spherical shell. For these purpose, the spherical shell subjected to uniformly distributed step load was analyzed for its large displacements elasto-viscoplastic dynamic response.

The results for the dynamic characteristics of spherical shell in the cases under various conditions of base-radius/central height( $a/H$ ) and thickness/shell radius( $t/R$ ) were summarized as follows:

1. The dynamic characteristics with  $a/H$ ,
  - 1) As the  $a/H$  increases, the amplitude of displacement increased.
  - 2) The values of displacement Dynamic Magnification Factor (DMF) range from 2.9 to 6.3 in the crown of shell and the values of factor in the mid-point of shell range from 1.8 to 2.6.
  - 3) As the  $a/H$  increases, the values of DMF in the crown of shell is decreased rapidly but the values of DMF in mid-point of shell is increased gradually.

\* 전남대학교 농과대학

키워드 : 동적해석, spherical shell, 비선형해석, 대 변형, 탄·점소성

4) The values of DMF of hoop-stresses range from 3.6 to 6.8 in the crown of shell and the values of factor in the mid-point of shell range from 2.3 to 2.6, the values of DMF of stress were larger than that of displacement.

2. The dynamic characteristics with  $t/R$ ,

1) With the decrease of thickness of shell decreases, the amplitude of the displacement and the period increased.

2) The values of DMF of the displacement were range from 2.8 to 3.6 in the crown of shell and the values of factor in the mid-point of shell were range from 2.1 to 2.2.

## I. 서 론

얇은 셸 구조물이 널리 사용됨에 따라 임의의 기하학적 형태, 경계조건 및 하중을 받는 경우에 대한 해석 방법의 개발이 필요하게 되었다. 고전적인 얇은 셸 이론은 평형조건 또는 연속조건으로부터 미분 방정식을 세우고 주어진 경계조건, 변위조건 또는 하중조건을 만족시키는 해를 구하는 것이다. 따라서 고전적인 해법은 단순한 형태를 갖는 셸에 대해서만 가능하였다.<sup>2)</sup> 그러나 컴퓨터의 발전과 유한 차분법 또는 유한 요소법과 같은 수치 해법의 개발로 어떠한 형태의 셸의 해석도 가능하게 되었다. 즉 고속 컴퓨터의 개발로 인해서 과거에는 불가능하였던 셸해석의 문제들이 쉽사리 접근 가능하게 되므로서 얇은 탄성 셸의 응력해석은 구조역학 분야에서 많은 관심의 대상이 되었고 광범위한 수치해석 방법이 spherical 또는 cylindrical 구조물에 적용되었지만<sup>3,4,7)</sup> 실제로 적용 가능한 결과는 매우 빈약한 형편이다. 이러한 정보의 부족은 셸과 같은 구조물의 설계에 대한 확신의 부족 때문이다.<sup>1)</sup>

얇은 셸 구조물은 기본적으로 대변형과 소성의 영향이 포함되어야 하는 문제이다.<sup>13,14)</sup> 실제로 얇은 셸의 복잡한 거동에 대한 수학적 정식화 및 해석의 절차는 매우 조심스럽게 접근되지 않으면 안된다.<sup>11)</sup> 특히 축대칭 구조물의 설계는 많은 산업 분야에서 빈번히 발생되고 있다. 따라서 그러한 구조물의 해석에 대한 신뢰성이 높고 정도가

좋은 유한요소 해석 절차는 절실히 필요하게 되었다.<sup>9)</sup> Zienkiewicz<sup>8)</sup> 등은 대변형을 고려한 소성문제의 해석방법을 연구하였고 Robert Kao<sup>9)</sup>는 초기 결함을 갖는 축대칭 셸의 좌굴문제를 해석하였으며 Stanley Klein<sup>12)</sup>는 매트릭스 변위법에 의해서 셸의 선형탄성 동적 문제를 연구하였다. 한편 축대칭 셸이 큰 회전 변형을 일으키는 경우에 대한 기하학적 비선형 정식화 해석법이 제시되었다.<sup>6)</sup>

구조물의 동적응답에 대한 연구는 항공기 설계에서 널리 사용되어 왔으며 최근에는 빈번한 지진의 발생으로 일반 구조물의 설계에서도 많은 관심을 받게 되었다. Spherical shell의 탄성 동적좌굴은 Galerkin 방법, 유한차분법 및 유한요소법을 사용하여 해석하고 있다. Robert Kao는<sup>10)</sup> 큰 외적 하중을 받아 소성 변형을 일으키는 spherical shell이나 돔이 초기 결함을 갖는 경우에 대한 동적좌굴문제를 유한요소법을 사용하여 해석하였다. 구조물에 동하중이 작용하면 응력이 탄성 범위를 벗어나는 경우가 있고 이로 인해서 준정적 해석(quasi-static analysis)에 따라서 설계된 셸구조물은 동적하중 조건에서는 붕괴될 수도 있으므로 이들 셸의 하중 전달 능력을 보다 실제적으로 평가하기 위해서는 재료 및 기하학적 비선형성이 고려된 동적 해석이 이루어져야 한다. 왜냐하면 이들 인자는 서로 다른 방법으로 구조물의 재하 능력에 크게 영향을 주기 때문이다.<sup>5)</sup>

본 연구의 목적은 큰 외적 하중을 받아 소성 변형을 일으키는 spherical shell이나 돔이 초기 처짐을 갖는 경우에 대한 동적응답을 해석하기 위한 기초적 단계로서 유한요소법을 사용하여 이러한 구조물의 기하학적 형상에 따른 동적 거동 특성을 규명하는 것이다. 과도 동적 해석의 경우 탄·점소성 모델은 많은 구조 재료의 실제 거동에 대한 근사 표현이 가능하고 순간적인 최대 응력 변화 현상에 대한 적합한 모델화가 실현되었다고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 재료의 실제적인 거동과 근접하는 탄·점소성 모델에 의해서 재료의 비선형 효과를 고려하고 기하학적 비선형 탄성 거동은 전체 라그랑지안 좌표계를 사용하여 정식화하였다. 또한 운동 평형 방정식은 중앙 차분법을 이용하여 수치적분을 수행하였다.

## II. 유한요소 해석

### 1. 유한요소의 선정

Spherical shell의 동적 해석에 있어서 Fig. 1과 같은 8-절점 등매개변수요소를 대칭되는 축에 대해서 회전시킨 Fig. 2와 같은 링 요소를 채용하였다.

이러한 8-절점 등매개변수요소에 대한 형상함

수는 다음과 같이 주어진다.

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1) \quad (i = 1, 3, 5, 7) \dots\dots\dots (1)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi_i^2(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i^2(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2) \quad (i = 2, 4, 6, 8)$$

이 때, 8-절점 등매개변수요소의 응력 및 변형을 성분은 Fig. 3과 같다.

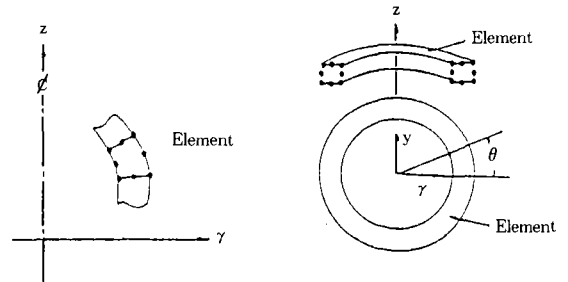


Fig. 2. Typical 8-noded isoparametric ring element

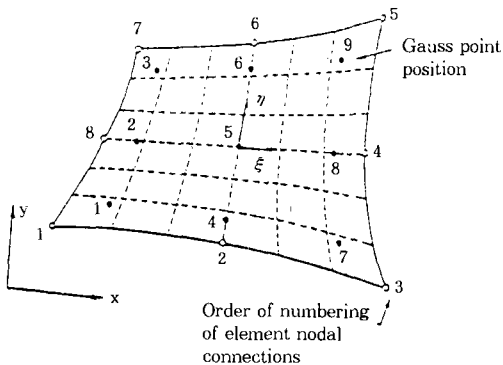


Fig. 1. Two dimensional parabolic isoparametric element

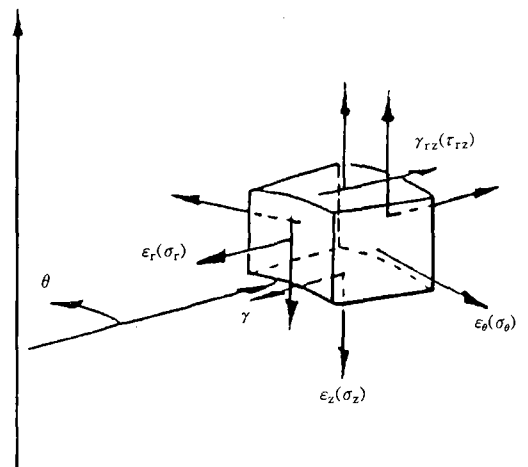


Fig. 3. Stresses and strains of axisymmetric solid element

2. 동적해석<sup>15)</sup>

동하중을 받는 구조물에서 임의시간  $t_n$ 의 평형 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$[M] \{\ddot{\mathbf{d}}\}_n + [C] \{\dot{\mathbf{d}}\}_n + \{P\}_n = \{F\}_n \dots (2)$$

- 여기서,  $[M]$  : 질량행렬
- $[C]$  : 감쇠행렬
- $\{P\}_n$  : 저항절점력벡터
- $\{F\}_n$  : 절점외력벡터
- $\{\ddot{\mathbf{d}}\}_n$  : 절점가속도벡터
- $\{\dot{\mathbf{d}}\}_n$  : 절점 속도벡터

임의시간  $t_n$ 에서의 가속도 및 속도는 중앙차분법을 이용하면 다음과 같이 계산된다.

$$\{\ddot{\mathbf{d}}\}_n \cong \{\mathbf{a}\}_n = \frac{1}{(\Delta t)^2} [ \{\mathbf{d}\}_{n+1} - 2\{\mathbf{d}\}_n + \{\mathbf{d}\}_{n-1} ] \dots (3)$$

$$\{\dot{\mathbf{d}}\}_n \cong \{\mathbf{v}\}_n = \frac{1}{2\Delta t} [ \{\mathbf{d}\}_{n+1} - \{\mathbf{d}\}_{n-1} ] \dots (4)$$

여기서  $\Delta t$ 는 시간간격이다.

식 (3) 및 (4)를 식 (2)에 대입하면 다음과 같다.

$$[M] \left[ \frac{\{\mathbf{d}\}_{n+1} - 2\{\mathbf{d}\}_n + \{\mathbf{d}\}_{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] + [C] \left[ \frac{\{\mathbf{d}\}_{n+1} - \{\mathbf{d}\}_{n-1}}{2\Delta t} \right] + \{P\}_n = \{F\}_n \dots (5)$$

여기서  $\{\mathbf{d}\}_{n+1}$ 에 관해서 다시 정리하면 식 (6) 및 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\mathbf{d}\}_{n+1} = \left[ [M] + \frac{4t}{2} [C] \right]^{-1} \{ (\Delta t)^2 [-\{P\}_n + \{F\}_n] + 2[M] \{\mathbf{d}\}_n - \left[ [M] - \frac{4t}{2} [C] \right] \{\mathbf{d}\}_{n-1} \} \dots (6)$$

$$\{\mathbf{d}\}_{n+1} = \mathbf{g}(\{\mathbf{d}\}_n, \{\mathbf{d}\}_{n-1}) \dots (7)$$

즉 임의의 시간  $t_n + \Delta t$ 에서의 변위는 시간  $t_n$  및  $t_{n-1}$ 에서의 변위의 함수로 주어진다.

III. 해석에 및 고찰

1. 해석구조물의 형상 및 하중조건

Spherical shell의 동적거동 특성 해석에 채용된 구조물의 기하학적 형상은 Fig. 4(a)와 같고 등분포 단계하중(uniformly distributed step load)을 받는 경우로 하였다. 한편 이러한 구조물의 유한요소 해석을 위한 요소분할은 Fig. 4(b)와 같으며 해석시 사용된 재료 성질은 Table 1과 같다.

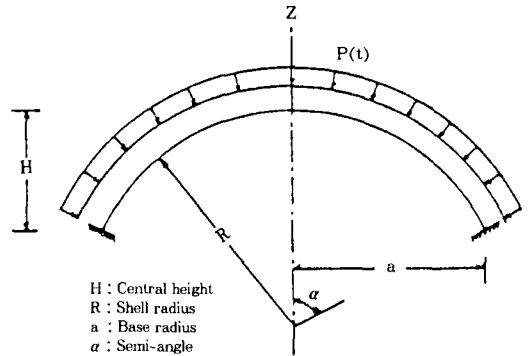


Fig. 4(a). Geometry of spherical shell

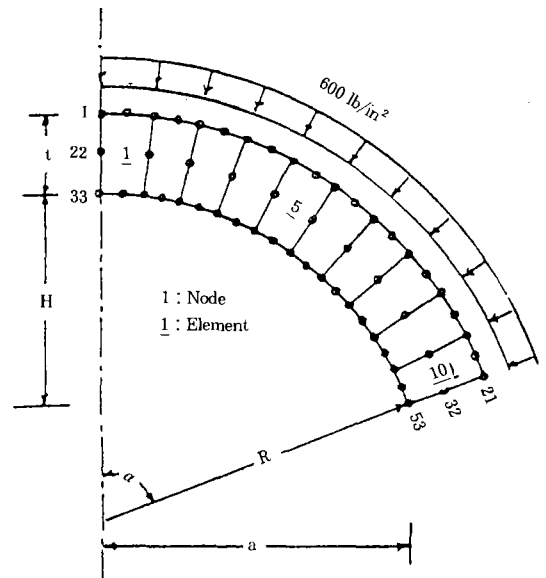


Fig. 4(b). Mesh generation of spherical shell

**Table 1. The dimension and properties of spherical shell**

internal radius	R=10~21.25 inch
thickness of shell	t=0.4~0.7 inch
semi angle	$\alpha=90\sim 28.072$ degree
elastic modulus	E=10.5 * 10 <sup>6</sup> psi
poisson ratio	$\nu=0.3$
yield stress	$\sigma_v=0.024 * 10^6$ psi
tangent hardening modulus	E <sub>T</sub> =0.21 * 10 <sup>6</sup> psi
mass density	$\rho=2.45 * 10^{-6}$ lb-s <sup>2</sup> /in <sup>4</sup>
step distributed pressure	p=600 psi

**Table 2. Detail dimension of analyzed spherical shell**

a/H	a(inch)	H(inch)	$\alpha$ (degree)	R(inch)	t(inch)
1.0	10.000	10.000	90.000	10.000	0.4
2.0	10.000	5.000	53.130	12.500	0.4
3.0	10.000	3.333	36.870	16.667	0.4
4.0	10.000	2.500	28.072	21.250	0.4

기하학적 형상에 따른 동적 거동 특성의 규명을 위해서 형상 변화는 Table 2와 같이 하였다. 즉 쉘의 중앙에서의 높이(H)에 대한 저변반경(a)의 비(a/H)의 값을 4가지 경우로 변화시켰다. 또한 구조물의 두께에 따른 동적 거동 특성을 규명하기 위해서 a/H의 값을 일정하게(a/H=4.0)한후 쉘의 두께(t)를 0.4~0.7 inch로 변화시켰다.

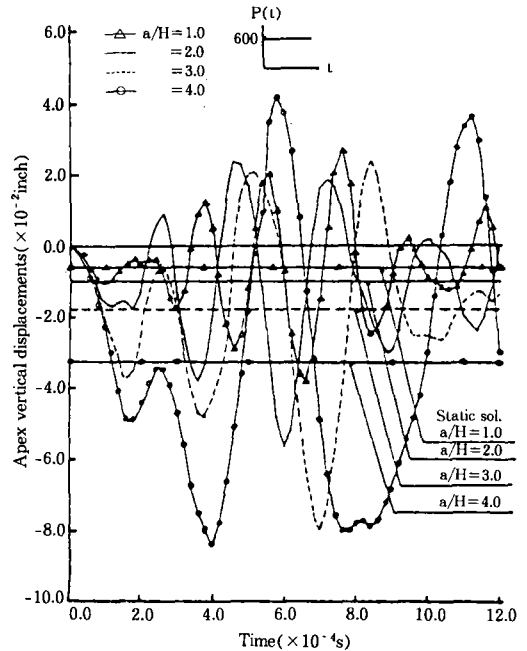
2. 연직변위의 해석 결과

먼저 쉘의 정점 및 중앙에서의 연직 변위의 응답은 Fig. 5 및 Fig. 6과 같다.

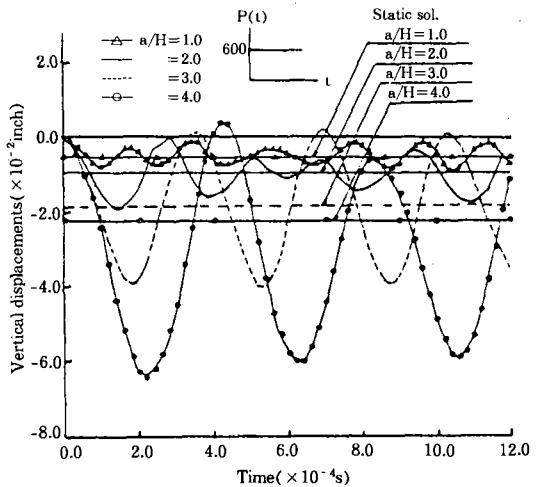
3. 변위의 동적확대계수의 변화

a/H의 값이 증가 할수록 즉 중앙에서의 높이가 감소할수록 변위의 진폭은 증가하였으며, 변위의 동적확대계수의 변화는 Fig. 7과 같다.

변위의 동적확대계수의 값은 쉘의 정점에서 2.9~6.3, 쉘의 중앙에서 1.8~2.6이었고 정점에서 a/H에 따른 변화가 크게 나타났다. 또 a/H의



**Fig. 5. Time response of vertical displacement at apex with a/H**



**Fig. 6. Time response of vertical displacement at mid-point with a/H**

증가에 따라 정점에서는 급격히 감소하는 반면에 중앙에서는 완만하게 증가되었다. 한편 원주방향 응력의 응답이력은 Fig. 8 및 Fig. 9와 같고 응력에 대한 동적확대계수는 Fig. 10과 같다.

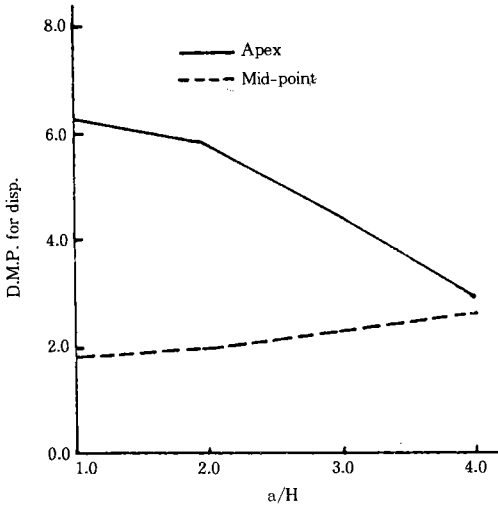


Fig. 7. Dynamic magnification factor for displacement with  $a/H$

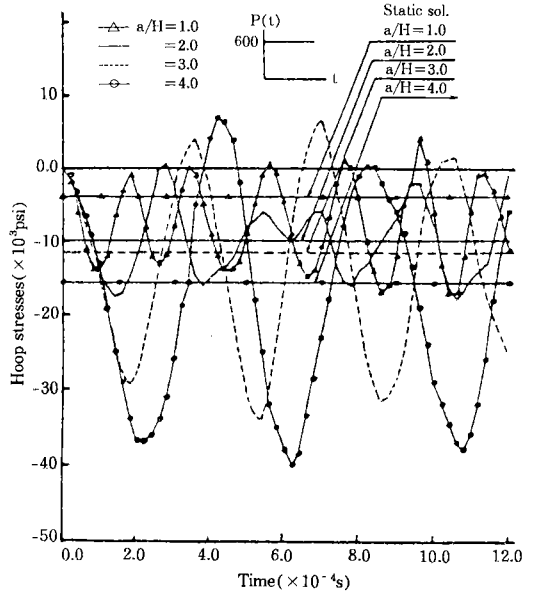


Fig. 9. Time response of hoop-stress at exterior surface of mid-point with  $a/H$

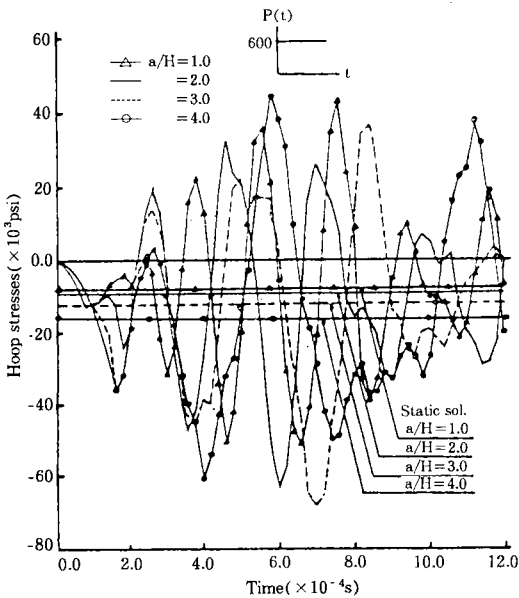


Fig. 8. Time response of hoop-stress at exterior surface of crown with  $a/H$

동적확대계수의 값은 쉘의 정점에서 3.8~6.8, 쉘의 중앙에서 2.3~2.6으로서 변위의 확대계수에 비해서 약간 크게 나타났고 전반적인 변화 패턴은 변위의 경우와 유사하였지만 쉘의 중앙에서의 값은 일정한 경향을 나타내지 않았다.

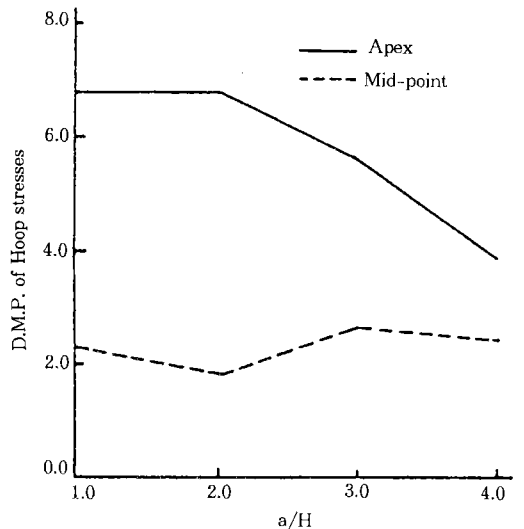


Fig. 10. Dynamic magnification factor for hoop-stress at exterior surface with  $a/H$

#### 4. 두께별 동적 특성

Spherical shell의 두께에 따른 동적 특성은 다음과 같다.

먼저 쉘의 정점 및 중앙에서의 연직 변위의 응답이력은 Fig. 11 및 Fig. 12와 같다.

두께가 작을수록 변위진폭은 크게 나타났으며

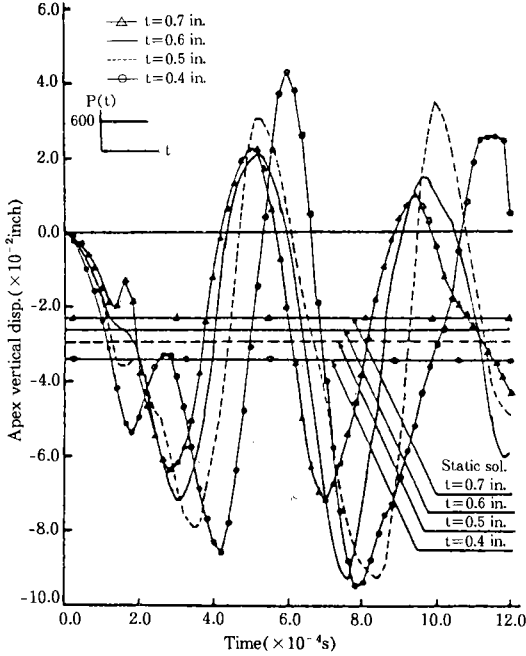


Fig. 11. Time response of vertical displacement at apex with  $t/R$

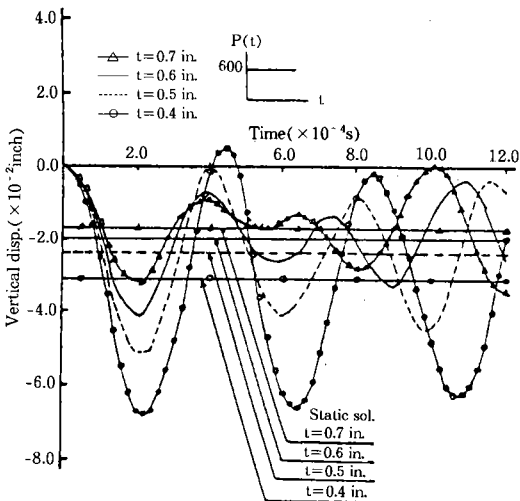


Fig. 12. Time response of vertical displacement at mid-point with  $t/R$

주기 또한 증가하였다. 정적 변위에 대한 동적변위의 비 즉 동적확대계수는 Fig. 13과 같다. 정점에서의 동적확대계수는 2.8~3.6이었고 쉘의 중앙에서는 2.1~2.2로서 거의 일정 하였다. 또한 정점에서의 동적확대계수는 두께 0.6 inch까지

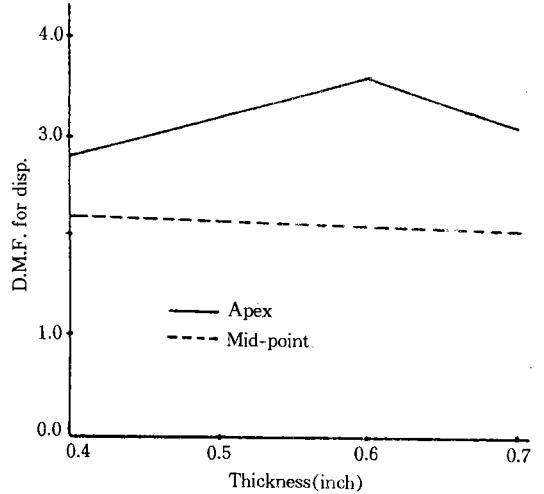


Fig. 13. Dynamic magnification factor for displacement with  $t/R$

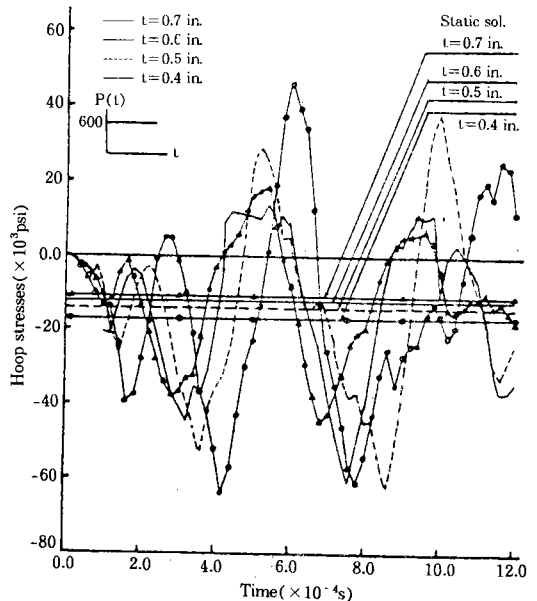


Fig. 14. Time response of hoop-stress at exterior surface of crown with  $t/R$

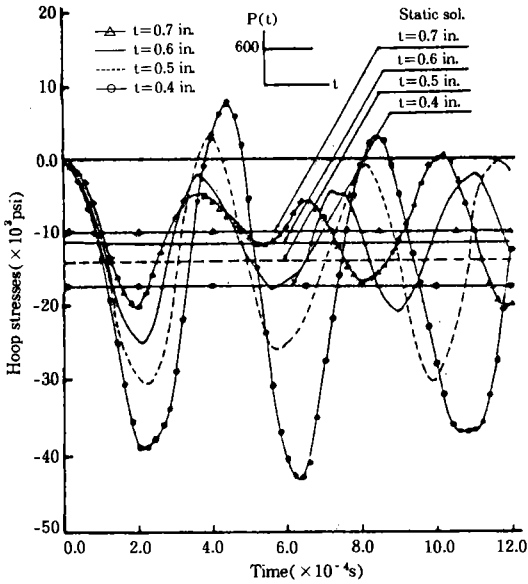


Fig. 15. Time response of hoop-stress at exterior surface of mid-point with  $t/R$

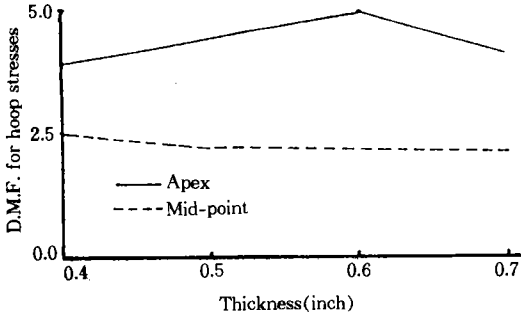


Fig. 16. Dynamic magnification factor for hoop-stress with  $t/R$

는 점차로 증가 되다가 감소되었지만 중앙에서의 동적확대계수는 거의 일정한 값을 나타냈다. 원주 방향 응력의 시간 응답이력은 Fig. 14 및 Fig. 15 와 같고 동적확대계수는 Fig. 16과 같으며 전반적인 경향은 변위의 경우와 유사하였다.

#### IV. 결 론

얇은 셸 구조물이 널리 사용됨에 따라 임의의

기하학적 형태에 대한 해석 방법의 개발이 필요하게 되었다. 따라서 얇은 탄성 셸의 응력 해석은 구조역학 분야에서 많은 관심의 대상이 되었다. 특히 축대칭 구조물의 설계는 많은 산업분야에서 빈번히 발생되고 있으며 따라서 그러한 구조물의 해석에 대한 신뢰성과 정도가 높은 유한요소 해석 절차는 절실히 필요하게 되었다. 구조물에 동하중이 작용하면 응력이 탄성 범위를 벗어나는 경우가 있고 이로 인해서 준 정적 해석에 의하여 설계된 셸 구조물은 동적 하중 조건에서는 붕괴 될 수도 있으므로 이들 셸의 하중 전달 능력을 보다 실제적으로 평가하기 위해서는 재료 및 기하학적 비선형성이 고려된 동적 해석이 이루어지지 않으면 안된다. 이를 위하여 본 연구는 재료 및 기하학적 비선형성을 고려한 해석 모형에 의해서 spherical shell의 동적 특성을 규명하였다. 셸의 저면반경/중양높이( $a/H$ ) 및 두께/셸 반경( $t/R$ )에 따른 동적 특성을 해석한 결과를 요약하면 다음과 같다.

1.  $a/H$ 의 값에 따른 동적특성은

1)  $a/H$ 의 값이 증가 할수록 변위의 진폭은 증가하였다.

2) 변위에 대한 동적확대계수의 값은 셸의 정점에서 2.9~6.3, 셸의 중앙에서 1.8~2.6으로서 셸의 정점에서의 동적확대계수의 값이 대단히 크게 나타났다.

3)  $a/H$ 의 값이 증가함에 따라 셸의 정점에서는 동적확대계수의 값이 급속히 감소하는 반면 셸의 중앙에서는 완만하게 증가되었다.

4) 원주방향 응력에 대한 동적확대계수는 셸의 정점에서 3.8~6.8, 셸의 중앙에서 2.3~2.6으로서 변위의 확대계수에 비해서 약간 크게 나타났다.

2.  $t/R$ 의 값에 따른 동적특성

1) 두께가 작을수록 변위의 진폭은 크게 나타났다으며 주기도 증가하였다.

2) 변위에 대한 동적확대계수는 셸의 정점에서 2.8~3.6, 셸의 중앙에서 2.1~2.2으로서 비교



적 변화의 폭이 크지 않았다.

이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공  
모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

### 참 고 문 헌

1. C. Philip Johnson : 'The analysis of thin shell by a finite element procedure', Thesis for Ph. D., University of California, Berkeley, sept., 1967.
2. H. Javaherian, P. J. Dowling and L. D. R. Lyons : 'Nonlinear finite element analysis of shell structures using the semi-loof element', pergamon, computer & structures, Vol. 12, pp. 147-159, 1980.
3. James A. Stricklin and Walter E. Haisler : 'Formulation and solution procedure for nonlinear structural analysis', pergamon, computer & structures, Vol.7, pp. 125-136, 1983.
4. J. L. Urrutia-Galicia and A. N. Sherbourne : 'Analysis of stresses in internally loaded cylindrical shells', pergamon, computer & structures, Vol.15 No. 3, pp. 225-240, 1982.
5. Karan S. Surana : 'Geometrically nonlinear formulation for the axisymmetric transition finite elements', pergamon, computer & structures, Vol.17 No. 2, pp. 243-255, 1983.
6. K. N. Khatri and P. C. Dumir : 'Nonlinear axisymmetric static and transient analysis of orthotropic thin tapered circular plate', computer & structures Vol. 21 No.5 pp. 1001-1002, 1985.
7. M. Ganapathi and T. K. Varadan : 'Dynamic buckling of orthotropic shallow spherical shells', pergamon, computer & structures, Vol.15 No. 5, pp. 517-520, 1982.
8. O. C. Zienkiewicz and G. G. Nayak : 'A general approach to the problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements, proc. conf. on matrix methods in structural mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, ohio, 1971.
9. Robert Kao : 'Dynamic buckling of axisymmetric spherical caps with initial imperfections', pergamon, computer & structures, Vol. 9, pp. 463-473, 1978.
10. Robert Kao : 'Nonlinear dynamics buckling of spherical caps with initial imperfections', pergamon, computer & structures, Vol. 12, pp. 49-63, 1980.
11. R. D. Wood and O. C. Zienkiewicz : 'Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells', pergamon, computer & structures, Vol. 7, pp. 725-735, 1977.
12. Stanley Klein : 'The linear elastic dynamic analysis of shell of by the matrix displacement method', AFFDL-TR-66-80 Wright-Patterson Air Force Base, ohio, pp. 299-325, 1965.
13. Tairo Ishizaki : 'On finite element large displacement and elastic-plastic dynamic analysis of shell structures', pergamon, computer & structures, vol. 12, pp. 309-318, 1980.
14. Yair Tene and Izhak Sheinman : 'Dynamics of shell of revolution under axisymmetric load involving shear deformation', pergamon, computer & structures, vol. 8, pp. 563-568, 1978.
15. 조진구 : 탄성 지반상에 놓인 철근 콘크리트 축대칭 셸의 정적 및 동적 해석(II), 한국농공학회지 Vol. 38 No. 5, pp. 74-84, 1996.