韓國軍事運營分析學會誌
第 24 卷, 第 1 號, 1998. 6. 30

네트워크 문제에서 내부점 방법의 활용*
(내부점 선형계획법에서 효율적인 공액경사법)
Interior Point Methods for Network Problems
(An Efficient Conjugate Gradient Method for Interior Point Methods)

설동렬, 조은영, 박순달**

Abstract

Cholesky factorization is known to be inefficient to problems with dense column and network problems in interior point methods. We use the conjugate gradient method and preconditioners to improve the convergence rate of the conjugate gradient method.

Several preconditioners were applied to LPABO 5.1 and the results were compared with those of CPLEX 3.0. The conjugate gradient method shows to be more efficient than Cholesky factorization to problems with dense columns and network problems. The incomplete Cholesky factorization preconditioner shows to be the most efficient among the preconditioners.

---

* 이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의해 연구되었음.
** 서울대학교 산업공학과

1. 서　　론

내부점 방법은 대형 선형계획법 문제에 대해서 단체법에 비해 효율적인 해법으로 알려져 있다. 내부점 방법은 전체 수행 시간의 많은 부분을 개선방향을 계산하기 위한 선형방정식을 푸는 데에 사용하는데, 주로 촐레스키 분해가 이용되고 있다[12][1]. 본 연구에서는 밀집열이 있는 문제 또는 네트워크 문제 같이 독특한 특성을 가진 대형 선형계획법 문제에 대하여, 행렬의 특성을 이용하여 내부점 방법을 보다 효율적으로 수행하기 위한 기법을 연구하였다. 기존에 개발되어 있는 방법들을 실제로 내부점 방법에서 구현하고, 실험결과를 비교하여 가장 효과적인 방법을 제시하였다.

일반적으로 대형 선형계획법 문제들에서 나타나는 행렬 A은 희소행렬(sparse matrix)의 특성을 가지기 때문에, 비영요소만을 보관하여 계산하도록 하는 희소행렬 기법을 적용하여 문제를 푼다[7]. 밀집열을 가진 행렬의 경우에 행렬 A가 희소행렬이라 할지라도 내부점 방법에서 풀어야 하는 선형방정식의 행렬은 매우 밀집한 행렬이 된다[9][3][4]. 따라서, 밀집열을 가진 문제에 대해서는 촐레스키 분해를 적용하여 계산하는 경우에 촐레스키 분해행렬 L은 밀집행렬이 되어 계산량이 많아진다. 네트워크 문제의 경우에도 선형계획법 문제로 풀 경우에 매우 희소한 행렬이 되지만, 촐레스키 분해를 적용하면 많이 추가요소가 발생하여 결과적으로 행렬 L이 희소성을 물려받지 못하고 밀집행렬이 되어 버린다. 이와 같이 특수한 구조를 가진 선형계획법 문제에서 효과적으로 선형방정식을 풀 수 있는 방법이 필요하다.

선형방정식을 푸는 방법으로는 촐레스키 분해와 같은 직접적인 방법과 공액경사법(the conjugate gradient method)과 같은 반복적인 방법이 있다[10]. 공액경사법은 밀집열의 개수가 많거나, 행렬의 희소도가 낮아서 촐레스키 분해를 적용하기에 적절하지 않은 경우에 사용한다[6]. 또한, 수송문제나 네트워크 문제를 위해서 개발된 내부점 방법에도 적용되고 있다[14]. 공액경사법은 적절한 선조절자(preconditioner)를 적용하여 수렴속도를 향상시키는 것이 중요하다[13].

2장에서는 연립선형방정식을 푸는 데에 공액경사법이 어떻게 적용될 수 있는지를 설명한다. 내부점 방법에서 공액경사법이 활용될 수 있는 분야는 밀집열이 있는 문제와 네트워크 문제가 대표적이다. 이러한 특수구조 행렬에 공액경사법을 적용하는 방법에 대하여 3장에서 다룬다. 네트워크 문제의 경우에는 문제의 특성을 이용한 선조절자를 적용함으로써 공액경사법을 보다 효율적으로 수행할 수 있다. 네트워크 문제에서 적용한 가능한 선조절자들에 대하여 4장에서 설명한다. 5장에서는 실제로 구현하여 실험한 결과를 통해서 공액경사법의 적용 방안에 대해 토의한다.

2. 공액경사법

공액경사법은 제약식이 없는 비선형계획법 문제의 최적화에 적용되는 기법이다. 또한, 선형방정식을 푸는데 적용되어 널리 사용되고 있는 선형방정식의 반복 계산 방법 가운데 하나이기도 하다. 그

러면, 선형방정식과 공액경사법의 관계를 보자. 다음과 같은 비제약 최적화 문제를 고려하자.

$$min\ \Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{b} \qquad (1)$$

단, Q는 $n \times n$ 대칭양정치 행렬, $\boldsymbol{b}$는 n차원 벡터이다. K. K. T. 조건에 의해서 (1)의 최적해 $\boldsymbol{x}^*$는 $\Phi'(\boldsymbol{x}^*) = Q\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b} = 0$를 만족한다. 따라서, (1)의 비선형식 $\Phi(\boldsymbol{x})$를 푸는 것은 다음의 식 (2)와 같은 선형방정식을 푸는 것과 같게 된다.

$$Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (2)$$

공액경사법은 (1)과 같은 문제를 $O(n^2)$에 풀 수 있는 것으로 알려져 있으며, 실제로 대칭양정치 행렬을 가지는 선형방정식을 푸는 해법으로 사용되고 있다[10].

공액경사법을 사용할 때에는 효과적인 선조절자를 사용하는 것이 중요하다. 선조절자를 사용하는 목적은 방정식 $Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$에 대해 Q를 잘 조절(well-conditioned)된 행렬이 되도록 하여, 공액경사법의 수렴성을 높이는 데 있다. 선조절자 M은 $M^{-1}Q\boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{b}$와 같이 방정식에 곱해져서 사용된다.

행렬 $M^{-1}Q$가 잘 조절되도록 하기 위해서는 조건수(condition number)가 1에 가까운 수를 가지게 해야 한다. 반복계산 방법의 수렴성을 정확하게 예측하는 것은 매우 어려운 일이나, 한계를 사용하면 가능하다[10]. 공액경사법에 대해서 오차는 행렬 $M^{-1}Q$의 조건수에 의해서 구간이 정해진다. 조건수는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{조건수} = E_{\max}/E_{\min} \qquad (3)$$

여기서, $E_{\max}$는 주어진 행렬의 특성치(eigen value)의 최대값, $E_{\min}$는 주어진 행렬의 특성치의 최소값이다. 조건수가 1에 가까운 수가 된다는 것은 주어진 행렬의 특성치의 값의 편차가 작다는 것을 의미하며, 이 때에 공액경사법의 수렴성이 좋아져서 $O(n^2)$회만에 공액경사법이 선형방정식의 해 $\boldsymbol{x}$에 수렴하게 된다.

선형방정식 $Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$에서 행렬 Q가 잘 조절된 행렬일 경우에는 따라서, 행렬 Q에 적당한 대칭양정치 행렬 M^{-1}을 곱하여 공액경사법의 수렴성을 좋게 하고자 하는 기법들이 연구되었다. 이 때에 곱해지는 행렬을 공액경사법의 선조절자라고 하고, 선조절자를 사용하는 공액경사법을 선조절 공액경사법이라고 한다. 직관적으로 $M \approx Q$일 때에 행렬 $M^{-1}Q(\approx I)$의 조건수가 1에 가까운 값을 가지므로 효과적인 선조절자가 될 수 있다. 선조절 공액경사법(preconditioned conjugate gradient method)은 결국 $Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 대신에 선조절자 M^{-1}를 곱한 $M^{-1}Q\boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{b}$를 푸는 것이다.

$Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$에서 행렬 Q의 성질에 따라 적절한 M행렬이 사용되는데, $M^{-1}Q$가 잘 조절되어 공액경사법의 수렴성을 높이는 것도 중요하지만, 한편으로 M^{-1}의 계산이 용이한 M행렬을 찾는 것도 중요하다. 일반적으로 M은 Q에 근사한 값을 가지면서 M^{-1}의 계산이 쉬운 형태로 만들어 사용한다.

3. 특수구조 행렬 처리

내부점 방법은 대형 문제에 대해서 단체법보다 효율적인 해법으로 알려져서 널리 사용되고 있다. 내부점 방법은 개선방향을 계산하기 위해 매 회 선형방정식을 풀어야 하며, 선형방정식을 푸는 데에 전체 계산 시간의 약 70% 정도를 차지한다. 따라서, 효율적인 선형방정식 해법이 내부점 방법의 빠른 계산을 위해서 매우 중요하다. 대형문제에 대해서도 희소행렬 기법을 사용하면 비영요소에 대해서만 계산을 수행하므로 효율적인 계산이 가능하다. 선형방정식을 푸는 방법으로도 희소행렬 기법을 적용한 촐레스키 분해가 주로 사용된다. 그러나, 행렬에 밀집열이 존재하는 경우에는 일반적인 촐레스키 분해 방법을 적용해서는 비영요소수가 지나치게 많아서 계산 효율이 매우 떨어지게 된다. 따라서, 내부점 방법을 실제 밀집열이 있는 문제에 효과적으로 적용하기 위해서는 특수구조를 잘 처리할 수 있는 능력이 요구된다. 이제 다음과 같은 선형계획법 문제 (P)와 (D)를 고려하자.

$$
\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ s.t. & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geq 0 \end{array}
\qquad
\text{(D)}\quad \begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ s.t. & A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}\geq 0 \end{array}
$$

여기서, 행렬 A : $m\times n$ 행렬이고 나머지는 적절한 크기의 벡터들이다. 그리고, 문제 (D)는 (P)의 쌍대문제이다. 이 때에 내부점 방법에서 나타나는 선형방정식은 다음과 같다.

$$(A\theta A^T)\Delta\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{b}} \tag{4}$$

여기서, θ : $n\times n$ 의 대각행렬이고 모든 대각요소의 값은 양이다. θ 는 내부점 선형계획법의 종류에 따라서 다르게 계산된다. $\Delta\boldsymbol{y}$ 과 $\overline{\boldsymbol{b}}$ 는 $m\times 1$ 벡터로서 $\Delta\boldsymbol{y}$ 는 쌍대변수 $\boldsymbol{y}$의 개선방향이다. 행렬 A 를 완전계수(full rank)라고 가정하면, 행렬 $A\theta A^T$ 는 $m\times m$ 대칭양정치(symmetric and positive definite) 행렬이다.

이제 공액경사법을 행렬 A 가 밀집열을 가진 경우에 적용하는 방법을 고려하자. 행렬 $A\theta A^T$ 에 직접 공액경사법을 적용할 수도 있지만, 희소행렬에 대해서는 촐레스키 방법이 보다 효과적인 점을 이용하기 위해서 행렬 A 를 분할한다. 행렬 A에서 밀집열에 해당하는 부분을 A_d라고 하고, 희소한 부분을 A_s라고 하자. 즉, $A=[\,A_d \mid A_s\,]$라고 하면, A행렬에서 밀집열이 있는 부분 A_d를 제외하고 희소한 부분 A_s에 대해서만 $A_s\theta_sA_s^T$를 계산하여 다음과 같이 촐레스키 분해를 적용한다.

$$A_s\theta_sA_s^T=LDL^T \tag{5}$$

내부점 선형계획법에서 나타나는 선형방정식 (4)에 L^{-1}을 곱하면 다음을 얻게 된다. 단, $A\theta A^T=A_s\theta_sA_s^T+A_d\theta_dA_d^T$ 이다.

$$L^{-1}(A_s\theta_sA_s^T+A_d\theta_dA_d^T)\Delta\boldsymbol{y}=L^{-1}\overline{\boldsymbol{b}} \tag{6}$$

식 (6)은 다음과 같이 정리된다

$$
\begin{aligned}
& L^{-1}\overline{\boldsymbol{b}} \\
&= L^{-1}(A_s\theta_sA_s^T+A_d\theta_dA_d^T)(L^T)^{-1}L^T\Delta\boldsymbol{y} \\
&= L^{-1}(LDL^T+A_d\theta_dA_d^T)(L^T)^{-1}(L^T\Delta\boldsymbol{y}) \\
&= (D+L^{-1}A_d\theta_dA_d^T(L^T)^{-1})(L^T\Delta\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

$$(7)$$

이제 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= L^T \Delta \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{q} &= L^{-1} \boldsymbol{b} \\ Q &= D + L^{-1} A_d \theta_d A_d^T L^{-T} \end{aligned} \tag{8}$$

(8)을 이용하여 (7)을 정리하면, 결과적으로 공액경사법을 적용하여 풀어야 할 식은 다음과 같이 된다.

$$Q\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \tag{9}$$

공액경사법을 식 (9)에 적용하는 경우에 Q는 A_d만을 고려하여 계산할 수 있으므로, A 전체를 고려하는 경우보다 계산량이 줄어든다. 공액경사법을 적용하여 $\boldsymbol{p}$를 구하고 나면 $\Delta \boldsymbol{y}$는 $L^T \Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}$를 풀어서 쉽게 구할 수 있다. 유사한 방법으로 밀집열을 처리하는 Schur Complement에 의한 방법이 Sherman-Morrison-Woodbury 공식을 이용하여 매우 작은 크기(밀집열의 개수를 p라고 할 때에 $p \times p$ 행렬)의 밀집행렬에 대해서 촐레스키 분해를 적용하는 것과는 달리 $m \times m$ 행렬에 대해 공액경사법을 적용하게 된다 [13].

네트워크 문제를 푸는 해법으로는 여러 가지가 개발되어 왔는데 내부점 방법이 나오기 전에는 네트워크 단체법이 많이 사용되어 왔다. 그러나 대형 네트워크 문제에 있어서는 내부점 방법도 적용되고 있다[15]. 네트워크 문제는 선형계획법과 같은 형태로 모형화될 수 있기 때문에 일반적인 선형계획법 문제에서 사용한 촐레스키 분해를 이용하는 내부점 방법을 그대로 적용해도 되지만 이러한 경우에 문제 행렬 A가 가지는 특수성으로 인해 효율적이지 못하다. 네트워크 문제를 선형계획법 모형으로 바꾸어 내부점 방법을 적용하면, 촐레스키 분해 시에 매우 많은 추가요소가 발생하여 네트워크 단체법에 비해서 효과적이지 않기 때문에 주로 촐레스키 분해 대신 공액경사법을 적용하고 있다. 특히, 네트워크 문제의 특성을 활용한 선조절자들이 개발되어 네트워크 내부점 방법에 적용되고 있다. 이들 선조절자의 기본적인 아이디어는 내부점 방법에서 나타나는 θ값을 가중치로 한 연결목(spanning tree)을 구하여 이에 해당되는 열들을 밀집열 처리에서 희소한 부분처럼 따로 처리하여 선조절자를 생성하도록 하는 것이다. 이러한 선조절자들로는 극대 연결목 선조절자(maximal spanning tree preconditioner), 불완전 촐레스키 분해 선조절자(incomplete Cholesky factorization preconditioner)등이 있다.

밀집열 처리에 적용했던 공액경사법과 네트워크 내부점 방법에 적용되는 공액경사법의 가장 큰 차이는 밀집열 처리의 경우에는 밀집열이 고정되어 있어서 밀집열과 희소열이 늘 일정하게 정해서 있지만, 네트워크 내부점 방법에서는 매 회마다 θ가 변하므로 그에 따라 계산되는 연결목이 변하므로 나누어 처리해야 할 열들이 매 회마다 바뀐다는 것이다. 즉, 밀집열 처리에 촐레스키 분해를 이용한 선조절자를 적용할 때에는 밀집열이 정해져 있으므로 미리 순서화를 적용하여 $A_S \theta_S A_S^T = LL^T$에 대한 자료구조를 미리 정해둘 수 있다. 그러나, 네트워크 내부점 방법의 경우에는 연결목(spanning tree)에 해당하는 열들이 계속 변화하므로 순서화를 적용할 수는 없지만, 연결목에 해당하는 열들로 구성된 A_T에 대해서

$A_T\theta_T A_T^T$를 다루기 때문에 $O(n)$에 촐레스키 분해를 수행할 수 있는 특성을 가지고 있다.

4.네트워크문제를 위한 선조절자

주어진 네트워크를 G라고 하자. 극대 연결목 (maximal spanning tree)에 포함되는 열(호)의 지수 집합을 T라고 하자. 그리고, 극대 연결목에 포함되지 않는 열의 지수 집합을 N이라고 하자. 극대 연결목 선조절자(maximal spanning tree preconditioner)[14]는 행렬 A로부터 극대 연결목을 구하여 극대 연결목에 포함되는 열(호)들만을 뽑아낸 행렬 A_T를 구한 다음, $M=A_T\theta_T A_T^T$를 선조절자로 사용하는 방법이다. 즉, A행렬은 다음과 같이 분할될 수 있다.

$$A=[A_T|A_N] \tag{10}$$

극대 연결목을 구하기 위한 가중치(weight)로 내부점 방법에서 나타나는 행렬 θ를 사용한다. θ를 이용하여 극대 연결목을 구하는 경우에 최적해에서 극대 연결목이 최적기저에 대응되는 특성을 가진다. 즉, 최적해에 도달하게 되면 $M=A_T\theta_T A_T^T=A\theta A^T$가 된다. 즉, 다음과 같이 된다.

$$M^{-1}(A\theta A^T)\boldsymbol{d}_y = \boldsymbol{d}_y = M^{-1}\overline{\boldsymbol{b}} \tag{11}$$

따라서, 최적해에 도달했을 때에는 극대 연결목 선조절자를 적용하면 바로 선형방정식의 해를 얻을 수 있게 된다. 극대 연결목 선조절자는 이와 같이 내부점 방법이 진행함에 따라서 점점 공액경사법의 반복수를 줄여가게 된다.

극대 연결목 선조절자가 내부점 방법의 초기에는 효과적이지 않기 때문에 해법 초기에는 효과적으로 알려진 야코비 선조절자[*]를 사용하고, 해법의 후반기에만 극대 연결목 선조절자를 적용하는 방법이 사용되기도 한다. 야코비 선조절자는 $M=diag(A\theta A^T)$를 선조절자로 사용하는 방법이다. 언제 극대 연결목 선조절자로 바꾸어 사용할 것인가가 중요한 요건이 된다.

실제로 문제를 풀 때, 공액경사법에 선조절자를 적용하게 되면, M^{-1}을 계산해야 한다. 따라서, 선조절자 M은 M^{-1}를 쉽게 계산할 수 있도록 고안되어야 한다. 극대 연결목 선조절자의 M은 A_T가 나무인 특성을 가지고 있어서 적당히 행순서와 열순서를 바꾸어 주면 열마다 비대각 요소를 하나씩만 가지는 하삼각행렬 형태를 취하게 되어 치환연산과 유사하게 문제를 풀 수 있다.

불완전 촐레스키 분해 선조절자(incomplete Cholesky factorization preconditioner)[13]는 극대 연결목 선조절자와 야코비 선조절자(Jacobi preconditioner)의 장점을 함께 가지도록 하기 위하여 고안된 선조절자이다. 극대 연결목 선조절자는 $M=A_T\theta_T A_T^T$가 되고, 야코비 선조절자는 $M=diag(A\theta A^T)$이다. 불완전 촐레스키 분해 선조절자는 $M=A_T\theta_T A_T^T+\Lambda$ 인데, $\Lambda=\alpha\times diag(A_N\theta_N A_N^T)$이다. 예를 들어, $\alpha=1$인 경우에는 극대 연결목 선조절자에 야코비 선조절자가 합쳐진 형태가 되고, 보다 $A\theta A^T$에 가까운 값을 가지는 선조절자가 된다. M^{-1}

<표 1> 밀집열을 가진 행렬의 비영요소의 수 비교

문제이름	행	열	비영요소수		
			A	AA^T의 하삼각	L
fit1p	627	1,677	9,868	196,251	196,251
fit2p	3,000	13,525	50,284	4,498,500	4,498,500

를 구할 때에도 $M = A_T\theta_T A_T^T + \Lambda$를 촐레스키 분해하면 다음의 정리에서와 같이 $O(m)$에 계산할 수 있다. 이러한 성질을 가지고 있어서 $M = A_T\theta_T A_T^T + \Lambda$를 불완전 촐레스키 분해 선조절자라고 부른다.

정리 1. $LL^T = A_T\theta_T A_T^T + \Lambda$인 촐레스키 분해 행렬 L은 $O(m)$ 회만에 계산할 수 있다. [13]

(증명) $A_T\theta_T A_T^T + \Lambda$의 분해하는 과정에서 비대각요소에 정확하게 하나의 비영요소만이 존재하는 행렬이 생긴다. 그러므로 L의 첫 번째 열은 $O(1)$ 회만에 계산할 수 있다. 나머지 행렬에 대한 다음의 계산도 같은 방법으로 진행된다. ■

불완전 촐레스키 분해 선조절자는 실제로 내부점 방법의 후반기에는 극대 연결목 선조절자와 같이 공액경사법의 반복수를 1에 수렴하여 줄어들도록 하는 효과를 가지고, 해법의 전반기에도 야코비 선조절자보다 공액경사법의 반복수를 더욱 줄여주어 내부점 방법의 전체적인 수행도 향상을 가져온다.

5. 실험결과 및 결론

NETLIB 문제[8]에서 밀집열을 가진 문제로는 fit1p, fit2p가 있다. fit1p와 fit2p는 밀집열을 처리해 주지 않을 경우에 완전밀집행렬을 이루어 계산량이 매우 많아지게 되는 문제이다. 이들 문제의 AA^T와 L의 비영요소수는 <표 1>과 같다.

밀집열을 판정하는 기준은 A 행렬이 $m \times n$ 행렬일 때에 열의 비영요소 개수가 $m/10$보다 많은 경우로 하였다. 그리고, A 행렬의 비영요소수가 5,000개 미만인 문제에 대해서는 밀집열 처리를 수행하지 않았다. <표 2>는 이러한 조건을 만족하는 fit1p, fit2p에 대한 실험 결과이다. 공액경사법의 밀집열 처리 능력을 평가하기 위하여 밀집열 처리에 사용되는 다른 기법들과 비교하였다. 비교한 방법은 쌍대전환 방법[3], 밀집열 분할 방법[4], Schur Complement[6] 방법이다. 실험에는 다중중

<표 2> 밀집열 처리 실험 결과

문제	밀집열처리 ×	쌍대전환	밀집열 분할	Schur	공액경사법
fit1p	69.78	13.030	27.12	3.15	5.42
fit2p	-	441.170	2107.06	33.95	64.44

<표 3> 네트워크 실험 문제

이름	마디(행)	호(열)	L의 밀집도	이름	마디(행)	호(열)	L의 밀집도
stndrd1	200	1308	39.61	stndrd26	400	1382	22.85
stndrd2	200	1511	41.94	stndrd27	400	2676	37.80
stndrd3	200	2000	44.78	transp9	400	10000	38.29
stndrd4	200	2200	39.68	transp11	600	10000	40.94
stndrd10	300	6320	39.19	transp12	600	20000	25.49
stndrd16	400	1306	20.55	transp13	600	30000	35.29
stndrd17	400	2443	33.42	transp1	800	10000	39.81
stndrd18	400	1306	20.55	transp2	800	20000	40.29
stndrd19	400	2443	33.42	stndrd28	1000	2900	37.80
stndrd20	400	1400	22.13	stndrd29	1000	3400	35.89
stndrd21	400	2836	40.95	cap1	1000	10000	40.84
stndrd22	400	1416	22.57	transp5	1000	20000	45.12
stndrd23	400	2836	40.95	cap2	1000	30000	46.37
stndrd25	400	2676	37.80	cap4	5000	30000	49.25

심수정 방법을 이용한 내부점 프로그램 LPABO 5.1[2]을 사용하였다. Sun SPARC 170에서 실험하였으며, GCC에서 -O3으로 컴파일하였다.

밀집열 처리를 하지 않았을 경우에 fit1p는 69.78이 소요되었으며, fit2p는 지나치게 많은 메모리를 필요로 하여 문제를 풀지 못하였다. 전체적인 수행도는 Schur Complement 방법, 공액경사법, 쌍대전환, 밀집열 분할의 순서이다. 그러나 Schur Complement 방법은 수치적으로 불안정해질 수 있음이 보고되어 있어서[5], 공액경사법이 보다 안정적인 밀집열 처리 방법인 것으로 사료된다.

네트워크 문제를 위해 적용된 공액경사법의 실험은 앞에서 언급된 여러 가지 선조절자들을 구현하여 실험하였다. <표 3>은 실험에 사용한 최소비용 문제 자료들의 특성에 관한 것이다. 희소행렬인 네트워크 문제의 행렬 A를 고려할 때, <표 3>에 기록된 L의 밀집도는 상당히 높은 값을 가진다.

<표 4>는 야코비 선조절자, 극대 연결목 선조절자, 혼합 선조절자, 불완전 촐레스키 분해 선조절자 간의 실험 결과를 비교한 것이다. 극대 연결목 선조절자와 불완전 촐레스키 분해 선조절자의 경우에는 극대 연결목을 구하는 과정에 필요한 정렬(sorting) 방법에 따라 수행속도가 많은 영향을 받게 된다. 본 연구에서는 퀵 정렬(quick sorting) 방법을 사용하였다.

<표 4>에 의하면, 앞에서 언급한 대로 야코비 선조절자는 초반부에는 수행도가 좋지만, 후반부로 갈수록 공액경사법 자체의 반복수(iteration)가 증가하여 전체적으로는 나빠지는 결과를 가져왔다. 하지만 선조절자를 사용하지 않은 경우에 비해서는 좋은 것으로 나타났다. 극대 연결목 선조절자는 후반부에 좋아지지만, 초반부에 수렴속도가 느린 것으로 나타났다. 연결목의 성질을 이용한 불완전 촐레스키 분해 선조절자는 전체적으로 효율적인 것으로 나타났다. 문제의 크기에 따라 수행속도는 약간의 차이를 보이고 있다. 문제의 크기가 커질수록 다른 방법에 비해 수행속도가 좋은 것으로 나

<표 4> 선조절자 간의 비교 실험

문제	야코비		극대 연결목		혼합		불완전 촐레스키	
	평균회수	시간	평균회수	시간	평균회수	시간	평균회수	시간
stndrd1	203.9	6.43	32.8	5.09	78.3	2.16	7.8	0.72
stndrd2	141.3	8.08	37.6	7.71	89.9	2.59	7.7	0.83
stndrd3	172.8	7.97	37.5	6.54	90.2	3.73	7.4	0.94
stndrd4	227.1	11.44	37.8	10.42	88.8	5.15	6.3	1.05
stndrd10	319.6	56.85	38.1	18.24	85.9	6.01	6.7	3.67
stndrd16	99.0	3.51	54.6	2.87	91.5	1.37	9.3	0.79
stndrd17	109.2	6.93	70.3	5.51	61.8	4.51	8.4	1.52
stndrd18	103.2	3.86	52.0	3.01	88.0	2.46	9.6	0.83
stndrd19	105.3	6.74	70.5	4.18	64.2	3.20	7.7	1.40
stndrd20	141.5	5.24	52.6	3.10	98.5	2.51	9.0	0.89
stndrd21	96.1	6.80	75.73	5.18	64.9	4.87	8.6	1.64
stndrd22	121.3	4.35	58.8	3.35	90.7	2.51	9.4	0.87
stndrd23	97.8	6.83	76.9	3.41	90.8	2.80	8.4	1.61
stndrd25	122.7	8.36	74.2	6.18	100.7	3.23	8.5	1.64
stndrd26	93.43	8.04	61.9	4.81	75.3	2.31	8.7	0.81
stndrd27	86.8	2.98	78.6	3.04	78.2	1.52	8.9	1.42
transp9	390.2	44.39	180.3	18.89	109.3	9.03	7.8	6.13
transp11	335.2	4.01	140.2	21.14	108.2	10.21	8.0	6.56
transp12	441.3	59.18	200.4	49.68	98.3	24.87	6.0	16.72
transp13	455.2	134.30	230.1	90.41	96.3	45.28	5.8	31.57
transp1	250.5	18.40	135.4	21.18	101.1	10.94	6.9	9.03
transp2	297.8	19.36	120.3	45.41	107.8	20.49	6.4	16.00
stndrd28	158.1	5.61	98.8	4.69	91.5	4.31	8.4	3.80
stndrd29	133.8	26.41	97.2	13.21	81.4	6.79	6.7	3.71
cap1	199.2	56.98	93.8	28.41	83.2	14.49	7.7	7.26
transp5	189.3	120.84	99.3	50.24	77.4	29.28	6.5	15.92
cap2	388.2	190.26	129.4	80.39	105.4	40.49	6.0	24.99
cap4	350.8	346.12	150.3	160.48	143.2	80.29	6.7	65.34

타났다.

<표 5>는 CPLEX 3.0의 장벽법(Barrier Method)과 불완전 촐레스키 분해 선조절자를 이용한 공액경사법을 적용한 LPABO 5.1의 비교 실험 결과이다. <표 5>에서 보는 바와 같이 크기가 작은 문제는 0.3배 정도 느리지만 문제의 크기가 커질수록 반복수가 많음에도 불구하고 최대 30배 까지도 효과적인 것으로 나타났으며 전체적으로 5~6배정도 효과적인 것으로 나타났다. 따라서, 대형 네트워크 문제에 대해서는 직접적인 방법인 촐레스키 분해를 적용하는 것에 비해서 공액경사법을 적용하는 것이 유리함을 알 수 있다. 공액경사법에 사용하는 선조절자로서는 불완전 촐레스키 분해 선조절자가 가장 효과적인 것으로 나타났다.

<표 5> 촐레스키 분해와 공액경사법의 비교 실험

문제	촐레스키분해 (CPLEX 3.0)		공액 경사법		문제	촐레스키분해 (CPLEX 3.0)		공액 경사법	
	회수	시간	회수	시간		회수	시간	회수	시간
stndrd1	12	0.38	19	0.72	stndrd26	9	0.79	19	0.81
stndrd2	13	0.48	22	0.83	stndrd27	10	1.75	18	1.42
stndrd3	10	0.56	19	0.94	transp9	18	4.45	25	6.13
stndrd4	12	0.51	19	1.05	transp11	17	9.75	25	6.56
stndrd10	16	2.38	24	3.67	transp12	20	12.48	34	16.72
stndrd16	10	0.56	16	0.79	transp13	30	37.04	44	31.57
stndrd17	12	1.76	20	1.52	transp1	16	14.39	33	9.03
stndrd18	11	0.64	17	0.83	transp2	19	18.99	31	16.00
stndrd19	11	1.71	20	1.40	stndrd28	13	5.63	20	3.80
stndrd20	11	0.98	18	0.89	stndrd29	12	7.50	24	3.71
stndrd21	10	1.98	19	1.64	cap1	11	25.44	22	7.26
stndrd22	10	0.93	17	0.87	transp5	19	29.18	29	15.92
stndrd23	11	2.09	19	1.61	cap2	18	77.24	30	24.99
stndrd25	12	2.04	19	1.64	cap4	11	1797.94	27	65.34

참고문헌

[1] 김병규, 성명기, "내부점기법에 있어서 효율적인 순서화와 자료구조", 한국경영과학회지, 21권, 3호, pp.63-74, 1996.12

[2] 박순달, LPABO ver 5.1 시스템 매뉴얼, URL http://orlab.snu.ac.kr/Software.html#LPABO, 1997.

[3] 설동렬, 박순달, 정호원, "내부점 선형계획법의 쌍대문제 전환에 대하여", '96 한국경영과학회 추계학술대회 논문집, pp.289-292, 1996.10

[4] 설동렬, 박순달, 정호원, "내부점 선형계획법의 밀집열 분할에 대하여", '97 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회 논문집, pp.410-413, 1997.4

[5] Andersen, Knud D., "A modified Schur complement method for handling dense columns in interior point methods for linear programming", Technical Report, Odense University, Oct 7, 1995.

[6] Choi, I. C., C. L. Monma and D. F. Shanno, "Further development of a primal-dual interior point method", ORSA Journal on Computing, No.2, pp.304-311, 1990.

[7] Duff. I., A. Erisman and J. Reid, Direct Methods for Sparse Matrices, Oxford University Press, New York, 1986.

[8] Gay, D. M., "Electronic mail distributioin of linear programming test problems", Mathematical Programming Society Committee on Algorithms Newsletter, No.13, pp.10-12, 1985.

[9] Gondzio, Jacek, "Splitting dense columns of constraint matrix in interior point methods for large scale linear programming", Optimization, Vol.24, pp.285-297, 1992.

[10] Golub, G. and C. Van Loan, Matrix Computations, 2nd ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.

[11] Kelly, C. T., Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.

[12] Lustig, I. J., R. E. Marsten, and D. F. Shanno, "Interior point methods for linear programming: computational state of the art", ORSA Journal on Computing, Vol.6, No.1, pp.1-15, 1994.

[13] Sanjay Mehrotra and Jen-Shan Wang, "Conjugate Gradient Based Implementation of Interior Point Methods for Network Flow Problems", Tech. Report, Dept of Industrial Eng. and Management science, Northwestern Univ. Evanston, IL, 1995.

[14] Resende, Mauricio G. C. and Panos M. Pardalos, "Interior point algorithms for network flow problems", Advances in linear and integer programming, J. E. Beasley, ed., Oxford University Press, 1995.

[15] Resende, M. and G. Veiga, "An Efficient Implementation of a Network Interior Point Method, in Network Flows and Matching: First DIMACS Implementation Challenge", D. S. Johnson and C. C. McGeoch, eds., DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol.12, American Mathematical Society, pp. 299-348, 1993.