《연구논문》 Hankook Kwanghak Hoeji Volume 9, Number 3, June 1998
(Journal of the Optical Society of Korea – Korean Edition)

# 잔류수차가 있는 유한 가우스 동의 회절진폭 분포

송영란 · 이민희
인하대학교 이과대학 물리학과

이상수
한국과학기술원 물리학과

(1998년 3월 31일 받음, 1998년 6월 5일 수정본 받음)

가우스 함수로 진폭변조한 유한한 가우스 동에 작은 Seidel 제 1차 수차가 있을때의 회절진폭 분포를 해석적으로 구하였다. 즉, 무수차 가우스 동의 회절진폭 분포와 수차에 의한 회절효과의 합으로 구하였다. 각 수차의 표현은 파면수차함수의 환산좌표를 공간각주파수로 대치하여, 수차에 의한 회절상을 되돌이 공식(recurrence formula)으로 구하였다.

## I. 서 론

일정한 진폭의 광결상계의 회절진폭 분포는 Fraunhofer 회절에 의해 결상되며, 이 광학계에 수차가 있게 되면 결상력이 크게 저하된다.[1] 수차에 의한 결상력의 저하를 막기 위하여 광학계의 빔을 변조하게 된다. 국내에서는 정 창섭교수팀이 개구상에서 진폭을 단조증가하거나 단조감소하는 함수를 택하여 이론적으로 무수차 광학계와 구면수차와 코마등이 있을 때의 결상력을 발표하였다.[2] 그후 위상만 변조하거나[3-4] 진폭과 위상을 동시에 변조하여 초고분해능을 얻을 수 있음을 보였다.[5] 홍 경희교수는 일차원적 비균일 진폭변조가 광학계 MTF에 미치는 영향을 진폭변조가 없는 경우와 실험적으로 비교하였다.[6] 그 결과 비축상의 물체에 대해서는 시계각이 클수록 일차원적 비균일 진폭변조를 함으로써 광학계의 MTF가 증진함을 보였다. 본 연구팀은 광학계의 구경을 가우스 함수로 진폭을 변조하면 초분해능을 얻을 수 있음을 발표하였으며,[7] 이때 광학계는 무수차 광학계였다. 또한 구경을 annular 형태로 변조하거나,[8] 구경 위에서 세 개의 가우스 함수를 중첩하여 OTF를 구하여 한 개의 가우스 함수와 비교하였다.[9]

본 연구에서는 광학계에 수차가 있는 경우 가우스 함수로 진폭변조한 유한한 가우스 동의 회절 진폭분포를 이론적으로 구하고자 한다. 앞서 발표한 정창섭 교수팀은 컴퓨터 전산시늉을 통하여 MTF를 구하였으나, 본 논문에서는 해석적으로 수차에 의한 회절상의 효과를 구하고자 한다.

## II. 유한 가우스 동에 의한 회절진폭 분포[7]

역변환 문제(inverse problem)로 초기 진폭 임펄스 함수 (amplitude impule response) $A_0(x)$를 가우스(Gauss) 함수로 하면 $A_0(x)=e^{-\sigma^2x^2}$ 이고, 광학계의 가우스진폭 동함수 $A(\omega)$는 임펄스 함수 $A_0(x)$의 역푸리에 변환으로 구한다.

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}A_0(x)\,e^{i\omega x}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}$$

여기서 $\alpha$는 가우스 함수의 모양을 결정하는 값으로, 동함수의 반치폭(halfwidth at half maxima, HWHM) $\Delta\omega$는 $\Delta\omega=2\sigma\sqrt{\ln 2}$으로 주어지므로 $\sigma$가 크면 반치폭은 커진다. 그림 1의 결상계에서 물점 O의 회절진폭 분포 $A(x)$는 유한한 동함수의 푸리에 변환으로 주어진다. 즉,

$$A(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}-i\omega x}\,d\omega \tag{1}$$

여기서 동의 공간각주파수 $\omega_0$는 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\alpha_0}{l'}$으로, $\alpha_0$와 $l'$는 각각 동의 최대 반경값과 동과 상면과의 거리이다. 유한한 구

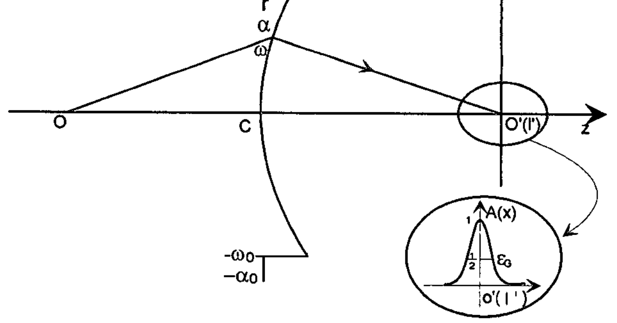


그림 1. 가우스 동에서 일어나는 광파의 회절. ($A(x)$ : 가우스동에 의한 광의 회절진폭 분포, ($A(\omega)$ : 가우스동의 진폭분포, $\alpha_0$ : 가우스동의 최대 반경, $l'$ : 동과 상면과의 거리, $\alpha$ : 가우스동의 반경, $C$ : 가우스동의 중심점, $O$, $O'$ : 광축에서의 물체점과 상점, $\omega_G$ : 가우스동 회절상의 HWHM.)

경밖에서는, 즉, $\alpha>\alpha_0$, $\alpha<-\alpha_0$ 영역에서 동함수는 영이 된다.

(1) 식을 다시 쓰면

$$\left.\begin{aligned} A(x)&=\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}e^{-\sigma^2x^2}\int_{-\frac{\omega_0}{2\sigma}}^{+\frac{\omega_0}{2\sigma}}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma}+i\sigma x)^2}d(\frac{\omega}{2}\sigma)\\ &=\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}e^{-\sigma^2x^2}J(z)\\ \text{단, } J(z)&=\int_{-\frac{\omega_0}{2\sigma}+i\sigma x}^{+\frac{\omega_0}{2\sigma}+i\sigma x}e^{-z^2}dz\ ,\ z=\frac{\omega}{2\sigma}+i\sigma x \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

이며, 적분값을 구하기 위하여 그림 2의 복소수 평면에서 사각형 ABCD의 각변을 따르는 선적분을 고려할 때 여기서 극(pole)이 없으므로

$$\oint e^{-z^2}dz=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}=0 \tag{3}$$

이고, 다시 정리하면

$$\int_{AB}=[\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}]=\int_{DC}+\left\{\int_{CB}+\int_{DA}\right\} \tag{4}$$

이다. 여기서

$$\int_{AB}=\int_{-\frac{\omega_0}{2\sigma}+i\sigma x}^{+\frac{\omega_0}{2\sigma}+i\sigma x}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma}+i\sigma x_0)^2}d(\frac{\omega}{2\sigma}) \tag{5}$$

이며, $\omega_0$와 $x_0$는 실수축과 허수축의 최대 값이다. 또한

$$\left.\begin{aligned} &\int_{DC}=\int_{-\frac{\omega_0}{2\sigma}}^{+\frac{\omega_0}{2\sigma}}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d(\frac{\omega}{2\sigma}),\\ &\text{단, } x_0=0\ (\text{실수축 위의 적분}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

이고 다음에

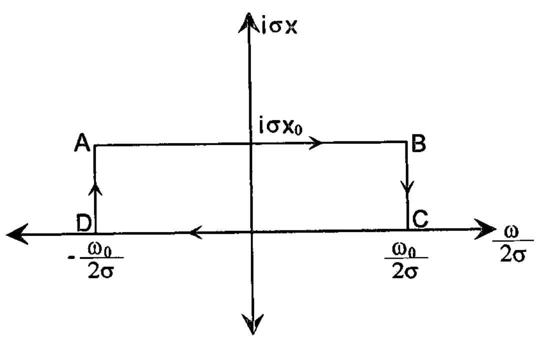


그림 2. 동함수의 복소수 평면에서 $\oint e^{-z^2}dz$ 적분.
$(\oint e^{-z^2}dz=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}=0,\ z=\frac{\omega}{2\sigma}+i\sigma x)$

$$\begin{aligned} &\int_{CB}-\int_{DA}\\ &=\int_{\frac{\omega_0}{2\sigma}}^{\frac{\omega_0}{2\sigma}+i\sigma x}e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma}+i\sigma x)^2}d(i\sigma x)-\int_{-\frac{\omega_0}{2\sigma}}^{-\frac{\omega_0}{2\sigma}+i\sigma x}e^{-(-\frac{\omega_0}{2\sigma}+i\sigma x)^2}d(i\sigma x)\\ &=e^{-\frac{\omega_0^2}{4\sigma^2}}\left\{\int_0^{i\sigma x_0}e^{-i\omega_0x+\sigma^2x^2}d(i\sigma x)-\int_0^{i\sigma x_0}e^{+i\omega_0x+\sigma^2x^2}d(i\sigma x)\right\}\\ &=2\sigma e^{\frac{\omega_0^2}{4\sigma^2}}\int_0^{x_0}e^{\sigma^2x^2}\sin(\omega_0x)\,dx \end{aligned} \tag{7}$$

이다. (5), (6), (7)식을 (4)식에 대입하면

$$J(z)=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega+2\sigma e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}\int_0^{x_0}e^{\sigma^2x^2}\sin(\omega_0x)\,dx \tag{8}$$

이며, (2) 식에 다시 대입하면

$$A(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}e^{-\sigma^2x^2}\left\{\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma^2})^2}d\omega+2\sigma e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}\int_0^{x_0}e^{\sigma^2x^2}\sin(\omega_0x)\,dx\right\}$$

으로, 여기서 허수축의 $x_0$의 값을 충분히 작게 하면 두 번째항은 영이 된다. 즉,

$$\begin{aligned} A(x)&=\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}e^{-\sigma^2x^2}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma^2})^2}d\omega\\ &=2\pi\left(2(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}e^{-\sigma^2x^2} \end{aligned} \tag{9}$$

이다. 여기서 (9) 식의 적분값은

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma^2})^2}d\omega=2\sigma\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2} \tag{10}$$

이며, (9) 식을 규격화하면

$$A(x)=e^{-\sigma^2x^2}$$

이고, 이때 진폭 회절상의 반치폭(HWHM) $\varepsilon_G$는 다음과 같다.

$$\varepsilon_G=\frac{\sqrt{\ln 2}}{\sigma}$$

## III. 수차가 있는 가우스 동의 회절진폭 분포

수차가 있는 가우스 동함수의 표현은[10]

$$e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}\cdot e^{ikW} \tag{11}$$

으로 $k$는 $2\pi/\lambda$로 파수이고 $W$는 수차함수이다. 수차가 있는

가우스 동함수의 회절진폭 분포 $A(x)$는 (1) 식과 같이 동함수의 푸리에 변환으로 구한다. 즉,

$$A(x)=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}+ikW} e^{-i\omega x} d\omega \tag{12}$$

여기서 수차함수 $W$를 촛점이동 수차와 Seidel 제 1차 수차를 고려하면 다음과 같다.[11]

$$\begin{aligned}&{}_0C_{20}\gamma^2,\ {}_1C_{11}\chi\gamma\cos\varphi(\text{촛점이동}),\ {}_0C_{40}\gamma^4(\text{구면수차}),\\ &{}_1C_{31}\chi\gamma^3\cos\varphi(\text{코마}),\ {}_2C_{22}\chi^2\gamma^2\cos^2\varphi(\text{비점수차}),\\ &{}_2C_{20}\chi^2\gamma^2(\text{상면만곡}),\ {}_3C_{11}\chi^3\gamma\cos\varphi(\text{왜곡수차})\end{aligned} \tag{13}$$

여기서 $\chi$는 환산물체 높이($\eta/\eta_0$)이고, 자오면(tangential plane)과 구결면(sagittal plane)일 때 각각 $\varphi$=0 과 $\frac{\pi}{2}$이다. 한편 $\gamma$은 구경높이의 환산좌표(=$|\alpha/\alpha_0|$)로 항상 양수이며 이를 동의 공간각주파수 $\omega$로 표현하면

$$|\omega|=\frac{2\pi}{\lambda}\left|\frac{\alpha}{l'}\right|=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\alpha_0}{l'}\left|\frac{\alpha}{\alpha_0}\right|=\omega_0\gamma$$

으로, $\gamma=\frac{|\omega|}{\omega_0}$이다. (13) 식의 수차들을 동의 공간각주파수 $\omega$의 표현으로 다시 쓰면

$$\begin{aligned}&{}_0C'_{20}|\omega|^2,\ {}_1C'_{11}|\omega|,\ {}_0C'_{40}|\omega|^4,\ {}_1C'_{31}|\omega|^3,\ {}_2C'_{22}|\omega|^2,\\ &{}_2C'_{20}|\omega|^2,\ {}_3C'_{11}|\omega|\end{aligned} \tag{14}$$

이며, 수차함수 $W$는 $W={}_lC'_{mm}|\omega|^m$의 형태이며, 여기서 ${}_lC'_{mm}$은 ${}_lC_{mm}\chi^l\omega_0^{-m}\cos^n\varphi$이다.

한편 동함수의 수차가 작다면 (11) 식의 수차항을 $e^{ikW}=1+ikW$로 근사할수 있으며, 회절진폭 분포의 (12) 식은

$$\begin{aligned}A(x)&=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}(1+ikW)\,e^{-i\omega x}d\omega\\ &=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}\left(1+ik\sum\nolimits_l C'_{mm}|\omega|^m\right)e^{-i\omega x}d\omega\\ &=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}+i\omega x}d\omega+ik\sum\nolimits_l C'_{mm}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}|\omega|^m e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}+i\omega x}d\omega\end{aligned} \tag{15}$$

단, $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\quad i=\sqrt{-1}$

이며, 수차가 없을때의 동함수 (1) 식과 (9), (10) 식을 이용하여 (15) 식을 다시 쓰면

$$\begin{aligned}A(x)&=e^{-\sigma^2x^2}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega+ik\sum\nolimits_l C'_{mm}e^{-\sigma^2x^2}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}|\omega|^m e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega\\ &=2\sigma\left(2\pi\left(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}\right)\right)^{1/2}e^{-\sigma^2x^2}+ik\sum\nolimits_l C'_{mm}A_m(\omega)e^{-\sigma^2x^2}\end{aligned} \tag{16}$$

단, $A_m(\omega)=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}|\omega|^m e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega,\quad m=1,\ 2,\ 3,\ 4$

으로 가우스 동에 수차가 있을때의 일반적인 표현을 얻는다.

여기서 우변의 두 번째항의 $A_m(\omega)$는 $m$의 값에 대해서 각각 왜곡수차($m$=1), 비점수차와 상면만곡($m$=2), 코마($m$=3), 구면수차($m$=4)를 나타낸다. 다음 절에서 $A_m(\omega)$의 적분값을 구하고자 한다.

## IV. $A_m(\omega)$의 되돌이 공식(recurrence formula)

(16) 식의 $A_m(\omega)$를 다시 쓰면

$$\begin{aligned}A_m(\omega)&=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}|\omega|^m e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega\\ &=2\int_0^{x_0}\omega^m e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega\end{aligned} \tag{17}$$

으로 $\omega$는 양수이다. 이 식은 다시 다음과 같이 표현되며,

$$\begin{aligned}&-4\sigma^2\int_0^{x_0}\omega^{m-1}d\left(e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}\right)\\ &=-4\sigma^2\cdot\omega^{m-1}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}\Big|_0^{x_0}+4\sigma^2(m-1)\int_0^{x_0}\omega^{m-2}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega,\end{aligned}$$

이 식을 (17) 식의 $A_m(\omega)$에 대입하면

$$A_m=-4\sigma^2\left\{\omega_0^{m-1}e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma})^2}\right\}+2\sigma^2(m-1)A_{m-2} \tag{18}$$

이다. 이 식은 $A_m(\omega)$의 되돌이 공식으로 $m$=2, 3, 4를 대입하여 $A_2$, $A_3$, $A_4$를 $A_0$와 $A_1$을 사용하여 구할 수 있다. 여기서 $A_0$와 $A_1$의 값을 (17) 식으로 부터 구하면 각각다음과 같다.

$$A_0=2\int_0^{x_0}e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega=2\sigma\left(2\pi\left(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}\right)\right)^{1/2} \tag{19}$$

$$A_1=2\int_0^{x_0}\omega e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega=4\sigma^2\left(1-e^{-(\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2})^2}\right) \tag{20}$$

따라서 $A_2$, $A_3$, $A_4$는 (19)와 (20) 식을 이용하여 (18) 식으로 부터

$$A_2=-4\sigma^2\omega_0 e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma^2})^2}+4\sigma^3\left(2\pi\left(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}\right)\right)^{1/2} \tag{21}$$

$$A_3=-4\sigma^2\omega_0^2 e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma^2})^2}+16\sigma^4\left(1-e^{-(\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2})^2}\right) \tag{22}$$

$$\begin{aligned}A_4&=-4\sigma^2\left(\omega_0^3 e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma^2})^2}\right)+6\sigma^2A_2\\ &=-4\sigma^2\omega_0^2 e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma^2})^2}(\omega_0^2+6\sigma^2)+24\sigma^5\left(2\pi\left(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}\right)\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{23}$$

을 얻게 된다. (20) 식에서 (23) 식을 이용하여 (16) 식에 대입하면 회절진폭 분포 $A_m(\omega)$를 구할 수 있으며, 이때 회절무늬의 강도(intensity) 분포는

$$|A(x)|^2=8\sigma^2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})e^{-2\sigma^2x^2}+(k\sum_l C'_{mm}A_m)^2e^{-2\sigma^2x^2} \quad (24)$$

이다.

## V. 구면수차가 있을때의 회절진폭과 강도 분포

가우스 동에 구면수차가 있을때 회절무늬의 진폭과 강도 분포를 구해보면, 구면수차는 식 (14)에서 ${}_0C'_{40}|\omega|^4$이며, $m=4$이다. 따라서 광 진폭분포는 (16) 식과 (23) 식을 이용하여 다음과 같이 구할수 있다.

$$A(x)=2\sigma\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}e^{-\sigma^2x^2}+ik_0C'_{40}\times$$

$$\left[-4\sigma^2\omega_0e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma^2})^2}(\omega_0^2+6\sigma^2)+24\sigma^5\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}\right]e^{-\sigma^2x^2}$$

$$=d_1e^{-\sigma^2x^2} \quad (25)$$

여기서 상수 $d_1$은

$$d_1=2\sigma(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}))^{1/2}$$

$$+ik_0C'_{40}\left[-4\sigma^2\omega_0e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma^2})^2}(\omega_0^2+6\sigma^2)+24\sigma^5\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}\right]$$

이며, 강도 분포는

$$|A(x)|^2=d_2e^{-\sigma^2x^2},\ d_2=|d_1|^2 \quad (26)$$

이다. 여기서 $d_1$과 $d_2$는 $\sigma$, $\omega_0$, ${}_0C'_{40}$의 함수로 이루어진 상수이므로 이들을 수치계산하여 광의 회절진폭과 강도를 정확히 구할수 있다.

## VI. 결 론

유한한 구경 위의 광 진폭분포가 $e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}$인 가우스 동함수가 작은 잔류수차를 포함하고 있을때의 상면에서의 회절진폭 분포를 해석적으로 구하였다. 가우스동에 작은 구면수차가 있을때의 회절상의 분포 $A(x)$를 구하여 규격화하면 구면수차의 영향이 없음을 보였다. 따라서 진폭이 변조되지 않은 경우와 달리 가우스 함수로 동이 변조된 경우에는 동에 수차가 조금 있다하더라도 회절상에는 수차의 영향이 별로 없음을 알 수 있었다. 본 논문은 원통렌즈계를 가정하여 1차원 취급을 하였으나 2차원으로 확장할 수 있으며, 현재 진행중인 수치계산 결과는 앞으로 발표할 예정이다.

## 감사의 글

본 연구는 97년도 교육부 학술연구조성비(BSRI-97-2429)의 지원을 받아 이루어졌음.

## 참고문헌

[1] 이상수, 파동광학(교학연구사, 서울, 1983) pp. 225-235.
[2] 정창섭, 심상현, 새물리 **28**(2), 233(1988).
[3] 홍경희, 정창섭, 한순희, 새물리 **30**(6), 646(1990).
[4] 한순희, 정창섭외 6인, 새물리, **32**(3), 312(1992).
[5] 박성종, 이종진, 정창섭, 한국광학회지 **4**(1), 9(1993).
[6] 홍경희, 한국광학회지 **9**(2), 59(1998).
[7] 송영란, 이민희, 이상수, 한국광학회지 **7**(2), 89(1996).
[8] 송영란, 이민희, 이상수, 한국광학회지 **7**(3), 196(1996).
[9] 송영란, 이민희, 이상수, 한국광학회지 **8**(1), 1(1997).
[10] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*(McGraw Hill, New York, 1996) pp. 145-154.
[11] 이상수, 기하광학(교학연구사, 서울, 1985) pp. 169-173.

## Diffraction Amplitude Distribution of Finite Gaussian Pupil with Residual Aberrations

Young Ran Song and Min Hee Lee
*Department of Physics, Inha University, Inchon 402-751, Korea*

Sang Soo Lee
*Department of Physics, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Taejon 305-701, Korea*

(Received March 31, 1998, Revised manuscript received June 5, 1998)

It is shown that the optical system with Gaussian pupil $e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}$, diffraction amplitude distribution is not affected by the presence of residual aberrations. The case of spherical aberration is treated, as an example, and the complex diffraction amplitude distribution at the neighbourhood of the image point is described analyticallly by using a recurrence formula.