《연구논문》 Hankook Kwanghak Hoeji Volume 9, Number 4, August 1998
(Journal of the Optical Society of Korea – Korean Edition)

가우스 동 결상계에 대한 Strehl Ratio와 Marechal 한계

송영란 · 이민희
인하대학교 이과대학 물리학과

이상수
한국과학기술원 물리학과

(1998년 6월 25일 받음, 1998년 7월 29일 수정본 받음)

가우스 동 결상광학계에서 Strehl ratio(SR)를 구하였다. 광원의 파장이 0.365 μm, 광학계의 조리개수(NA)가 0.5이고 상의 분해 선폭이 0.5 μm일때 자오면에 비점수차가 있는 가우스 결상광학계와 일정한 진폭의 Rayleigh 동 광학계에서 SR을 이론적으로 구하여 비점수차의 Marechal 한계값을 비교한 결과 각각 0.65 λ와 0.24 λ를 얻었다. Seidel 제 1차 수차에 대한 가우스 동과 Rayleigh 동의 Marechal 한계를 구한 결과 가우스 동의 Marechal 한계가 매우 큼을 알 수 있었다.

I. 서 론

두 개의 근접한 점물체의 회절상은 서로 겹치게 된다. 이러한 현상으로 인해 두 개의 상을 검출하기 위한 분해한계가 서로 다른 조건하에서 여러 가지가 있다.[1-5] 회절한계 광학계에서는 Rayleigh 한계와 Sparrow 한계를 사용하고 있다. 광학계에 수차가 있는 경우, 회절상 중심의 강도는 감소하며 폭의 크기는 증가한다. 이때 무수차 회절상 중심(광축)의 강도에 대한 수차에 의한 효과로 나타나는 회절상 중심의 강도 비를 Strehl ratio(SR)라고 한다.[1] SR 값이 0.8 이상일 때 수차에 의한 상의 변화(감퇴)에 별 영향이 없게 되는데, 이 한계값을 Marechal 한계라 하며 어떤 수차의 Marechal 한계치가 큰 광학계일수록 그 수차의 허용치가 크게 되므로 광학계를 설계하는데 유리하게 된다. 큰 Marechal 한계를 얻기 위하여 동의 진폭과 위상을 변조하게 된다.[6-7]

본 논문에서는 동의 진폭을 가우스 함수로 변조한 가우스 동[8]과 일정한 진폭의 동인 Rayleigh 동에 대한 SR의 일반적 표현을 구하고, Seidel 제 1차 수차에 대한 SR과 Marechal 한계를 구하여 가우스 동 광학계의 설계가 유리함을 증명하고자 한다.

II. 가우스 동의 Strehl Ratio

수차 W가 있는 가우스 동함수의 회절진폭 분포 $A(x)$는 동함수의 푸리에 변환으로 구한다.[8-9] 즉,

$$A(x) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}+ikW}) e^{-i\omega x} d\omega \tag{1}$$

여기서 k는 $2\pi/\lambda$이고, σ는 가우스 함수의 형태를 결정하는 상수로써 $\sqrt{\ln 2}/\Delta x$로 구하며(Δx는 분해하고자 하는 선폭의 반치폭), ω는 공간각주파수로써 가우스 진폭회절상을 푸리에 변환하여 구한 가우스 동의 좌표이다.

$$e^{ikW} = 1 + ikW - \frac{1}{2}k^2W^2 \tag{2}$$

으로 근사하여 (1)식에 대입하여 정리하면 회절상의 진폭 $A(x)$는

$$A(x) = \int_{\omega_0}^{+\omega_0} (1 - \frac{k^2W^2}{2}) e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2} - i\omega x} d\omega + ik\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} We^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2} - i\omega x} d\omega \tag{3}$$

이고, 회절상의 강도는

$$|A(x)|^2 = |\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2} i\omega x} d\omega - \frac{1}{2}k^2\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} We^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2} - i\omega x} d\omega|^2$$
$$+ k^2 \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} We^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2} - i\omega x} d\omega|^2 \tag{4}$$

이다. (4) 식으로 부터 수차함수가 W=0일 때 상평면에서의 중심(x=0) 회절강도는

$$|A(0)|^2_{W=0} = |\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}} d\omega|^2 = 8\pi\sigma^2(1 - e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}) \tag{5}$$

이고, 수차함수가 $W \neq 0$일때 회절상의 중심(x=0)에서의 광파세기는 (4)식으로 부터

$$|A(0)|^2_{W\neq 0} = \left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}} d\omega\right)^2 + \frac{1}{4}k^4\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} W^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}} d\omega\right)^2$$
$$-k^2 \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}} d\omega \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} We^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}} d\omega + k^2\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} W^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}\right)^2$$

이다. 여기서 우변의 두 번째 항 k^4W^4은 W가 10^{-1}~$10^{-2}\lambda$정도일 때 k^2W^2 값보다 10^{-2}~10^{-4}배 정도로 작기 때문에 무시할

수 있으므로 이 식을 다시 쓰면

$$|A(0)|^2_{W\neq 0}=\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}d\omega\right)^2-k^2\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}d\omega\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} W^2e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}d\omega$$
$$+k^2\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} We^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}d\omega\right)^2 \qquad (6)$$

이다. Strehl ratio(SR)은 수차가 있는 회절상의 중심강도를 수차 없는 이상적인 회절상의 강도로 나눈 양으로 식 (5)와 (6)으로 부터 구하면

$$SR=\frac{|A(0)|^2_{W\neq 0}}{|A(0)|^2_{W=0}}$$
$$=1-k^2\frac{\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}W^2e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}d\omega}{2\sigma\left(2\pi(1-e^{\frac{-\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}}+k^2\frac{\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}We^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}d\omega\right)^2}{8\pi\sigma^2(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})} \qquad (7)$$

이고, 여기서 수차함수 W는 Seidel 제1차 수차 양으로[10]

${}_0C_{40}r^4$(구면수차), ${}_1C_{31}\chi r^3\cos\varphi$(코마), ${}_2C_{22}\chi^2r^2\cos^2\varphi$(비점수차), ${}_2C_{20}\chi^2r^2$(상면만곡), ${}_3C_{11}\chi^3r\cos\varphi$(왜곡수차) (8)

이며, χ는 환산물체 높이(η/η_0), φ=0과 $\frac{\pi}{2}$로 각각 자오면(tangential plane)과 구결면(sagittal plane)을 나타내며, r은 구경높이의 비($|\alpha/\alpha_0|$)로 이를 공간각주파수 ω로 표현하면

$$|\omega|=\frac{2\pi}{\lambda}\left|\frac{\alpha}{l'}\right|=\frac{2\pi}{\lambda'}\frac{\alpha_0}{l'}\left|\frac{\alpha}{\alpha_0}\right|=\omega_0 r$$

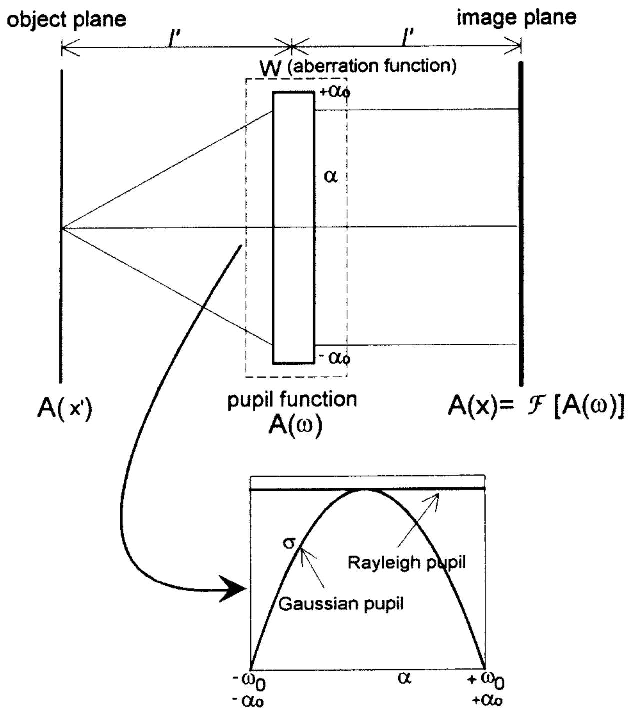

그림 1. 광결상계 및 가우스 동과 Rayleigh 동 비교.

으로, $r=\frac{|\omega|}{\omega_0}$이며 ω는 양수로 그림 1에 광학계를 나타내었다. (8) 식의 수차들을 ω의 표현으로 다시 쓰면

$${}_0C'_{40}\,\omega^4,\ {}_1C'_{31}\omega^3,\ {}_2C'_{22}\omega^2,\ {}_2C'_{20}\omega^2,\ {}_3C'_{11}\omega \qquad (9)$$

이며, ${}_lC'_{mn}$은 ${}_lC_{mn}\chi^l\omega_0^{-m}\cos^n\varphi$인 상수이다.

III. 비점수차의 SR과 Marechal 한계

가우스 동의 결상광학계에 Seidel 제1차 수차가 있을때 SR과 Marechal 한계를 구하는데 있어서, 비교적 계산과정이 간단한 경우인 비점수차가 있을때의 SR을 구하고 이로 부터 Marechal 한계를 구하는 과정을 보이고자 한다. 비점수차는 (9) 식에서 $W={}_2C'_{22}\omega^2$이므로 SR의 (7) 식에 대입하면

$$SR=1-k^2({}_2C'_{22})^2\frac{\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}\omega^4e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}d\omega}{2\sigma\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}}$$
$$+k^2({}_2C'_{22})^2\frac{\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}\omega^2e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}d\omega\right)^2}{8\pi\sigma^2(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})} \qquad (10)$$

이고, 우변의 두 번째항과 세 번째항의 적분은 각각 다음과 같다.[11]

$$\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\omega^4e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega=-4\sigma^2\omega_0e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma})^2}(\omega_0^2+6\sigma^2)+24\sigma^5\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2} \qquad (11)$$

$$\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\omega^2e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2}d\omega=-4\sigma^2\omega_0e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma})^2}+4\sigma^3\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2} \qquad (12)$$

이로 부터 (10) 식을 다시 쓰면

$$SR=1-k^2({}_2C'_{22})^2\frac{-4\sigma^2\omega_0e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma})^2}(\omega_0^2+6\sigma^2)+24\sigma^5\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}}{2\sigma\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}}$$
$$+k^2({}_2C'_{22})^2\frac{\left\{-4\sigma^2\omega_0e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma})^2}+4\sigma^3\left(2\pi(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})\right)^{1/2}\right\}^2}{8\pi\sigma^2(1-e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}})} \qquad (13)$$

이다.

결상광학계 광원의 파장이 0.365 μm이며 조리개수(NA)가 0.5이고 분해하고자 하는 선폭이 Δx=0.5 μm이면, 최대 공간

각주파수는 $\omega_0 = 8.6\times10^4\ \mathrm{cm}^{-1}$이고 가우스 함수의 형태를 결정하는 상수인 $\sigma(=\frac{\sqrt{ln 2}}{\Delta x})$는 $1.7\times10^4\ \mathrm{cm}^{-1}$가 된다. 따라서

$$\frac{\omega_0^2}{\sigma^2} \approx 25.6 \tag{14}$$

가 되며, $e^{-(\frac{\omega_0}{2\sigma})^2}$와 $e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}}$는 (14) 식으로 부터 매우 작은 값이 되므로 이들을 영으로 근사할 수 있다.
(13) 식을 정리하여 다시 쓰면

$$SR = 1 - 8k^2\sigma^4({}_2C'_{22})^2 \tag{15}$$

이고, SR의 값이 0.8 이상일 때를 Marechal 한계라 하므로 이 한계값을 구하기 위하여 (9) 식으로 부터 비점수차의 계수 ${}_2C'_{22}$는 $\chi = 1$, $\cos\varphi = 1$(자오면: φ=0)일 때 ${}_2C_{22}\omega_0^{-2}$이므로 (15) 식의 SR이 0.8 일 때 비점수차 계수 ${}_2C'_{22}$는

$${}_2C'_{22} = \sqrt{\frac{0.2}{8k^2\sigma^4}} = \frac{0.16}{k\sigma^2} = {}_2C_{22}\frac{1}{\omega_0^2} \tag{16}$$

가 되며, 이때 (14) 식을 이용하여 구한 비점수차 계수는 ${}_2C_{22} = 0.65\lambda$가 된다. 이 값의 이하까지는 가우스 동에서 비점수차가 허용됨을 말한다.

IV. Rayleigh 동의 SR과 비점수차의 Marechal 한계

일정한 진폭의 Rayleigh 동에서 SR을 구하기 위해서는 우선 (5) 식으로 부터

$$|A(0)|^2_{W=0} = |\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} d\omega|^2 = 4\omega_0^2 \tag{17}$$

이고, (6) 식으로 부터

$$|A(0)|^2_{w\neq0} = \left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} d\omega\right)^2 - k^2\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} d\omega\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} W^2 d\omega + k^2\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} W\, d\omega\right)^2$$

이므로, Rayleigh 동의 SR 표현은

$$SR = 1 - \frac{k^2\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} W^2 d\omega}{2\omega_0} + \frac{k^2\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} W\, d\omega\right)^2}{4\omega_0^2} \tag{18}$$

이다. Rayleigh 동에 비점수차 $W = {}_2C'_{22}\omega^2$가 있을 때 SR을 구하면

$$SR = 1 - k^2({}_2C'_{22})^2\frac{\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}\omega^4 d\omega}{2\omega_0} + k^2({}_2C'_{22})^2\frac{\left(\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}\omega^2 d\omega\right)^2}{4\omega_0^2} \tag{19}$$

이고, 적분값은 아래와 같다.

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}\omega^4 d\omega = \frac{2}{5}\omega_0^5$$

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}\omega^2 d\omega = \frac{2}{3}\omega_0^3$$

표 1. 각 동에 대한 Seidel 제1차 수차의 Marechal 한계.

수차 \ 동	가우스 동	Rayleigh 동
구면수차	1.04λ	0.27λ
코 마	0.82λ	0.25λ
비점수차	0.65λ	0.24λ
상면만곡	0.65λ	0.24λ
왜곡수차	0.31λ	0.25λ

(19) 식을 정리하여 다시 쓰면

$$SR = 1 - \frac{4k^2\omega_0^4}{45}({}_2C'_{22})^2 \tag{20}$$

이다. 여기서 $\chi = 1$, $\cos\varphi = 1$(자오면)일 때 ${}_2C'_{22} = {}_2C_{22}\omega_0^{-2}$인 조건을 이용하여 비점수차의 Marechal 한계를 구하면 다음과 같고

$${}_2C'_{22} = \frac{1.5}{k\omega_0^2} = {}_2C_{22}\frac{1}{\omega_0^2} \tag{21}$$

이로 부터 Rayleigh 동의 비점수차의 계수는 ${}_2C_{22} = 0.24\lambda$가 된다. 즉, 비점수차가 0.24λ 이하의 값까지는 허용됨을 의미하며 III 절에서 구한 가우스동의 비점수차 계수 0.65λ보다 한계값이 작음을 알 수 있다.

V. 각 동에 대한 Seidel 제1차 수차의 Marechal 한계

가우스 동과 Rayleigh 동에 대한 SR의 일반적 표현을 (7) 식과 (18) 식과 같이 구하였다. III 절에서 비점수차가 있는 경우의 계산과정을 보였으며, 다른 수차가 있는 경우에도 같은 방법으로 SR을 얻었으며 이로 부터 Marechal 한계를 구하여 도표화하였다. 이때 사용한 광학계의 광원은 0.365 μm, 광학계의 조리개수는 0.5이고 상의 분해선폭이 0.5 μm인 경우이다.

표 1에서 보듯이 가우스 동의 Marechal 한계가 Rayleigh 동에 비하여 매우 큼을 알 수 있다. 따라서 가우스 동으로 변조한 광결상계의 설계가 유리함을 알 수 있다.

VI. 결 론

가우스 동과 Rayleigh 동의 Strehl ratio의 일반적 표현을 구하여 광원의 파장이 0.365 μm이고 광학계의 조리개수가 0.5이며 분해선폭이 0.5 μm인 광학계의 Seidel 제1차 수차에 대한 Marechal 한계를 각각 구하여 가우스 동에 대한 Marechal 한계가 Rayleigh 동에 비해 매우 큼을 볼 수 있었다. 이 한계값이 클수록 수차의 허용치가 커지므로 광학계를 설계하는데 가우스 동 결상계가 유리함을 알 수 있다.

감사의 글

본 연구는 97년도 교육부 학술연구조성비(BSRI-97-2429)

의 지원을 받아 이루어졌음.

참고문헌

[1] 이상수, *파동광학*(교학연구사, 서울, 1983) pp. 221-225.
[2] Daniel Malaraca and Zacarials Malaraca, *Handbook of Lens Design* (Marcel Deckker, Inc.) pp. 290-295, 1994.
[3] Michael Bass, *Handbook of Optics*, Vol. I (McGraw-Hill, Inc. 1995) pp. 7.11-7.12.
[4] James E. Stewart, *Optical Principles and Technology for Engineers* (Marcel Dekker, Inc. 1996) pp. 16-19.
[5] Warren J. Smith, *Modern Optical Engineering* (McGraw-Hill, Inc. 1990) pp. 335-339.
[6] T. R. M. Sales and G. Michael Morris, J. Opt. Soc. Am. A, **14**(7), 1637 (1997).
[7] J. O. Castaneda, P. Andres, and E. Montes, J. Opt. Soc. Am. A, **4**(2), 313 (1987).
[8] 송영란, 이민희, 이상수, 한국광학회지 **7**(2), 89 (1996).
[9] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*(McGraw Hill, New York, 1996) pp. 145-154.
[10] 이상수, *기하광학*(교학연구사, 서울, 1985) pp. 169-173.
[11] 송영란, 이민희, 이상수, 한국광학회지 **9**(3), 142 (1998).

Strehl ratio and marechal criterion for gaussian pupil imaging system

Young Ran Song and Min Hee Lee
Department of Physics, Inha University, Inchon 402-751, Korea

Sang Soo Lee
Department of Physics, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Taejon 305-701, Korea

(Received June 25, 1998, Revised manuscript received July 29, 1998)

The Strehl ratio(SR) expressions are derived from the diffration intensity distribution in a Gaussian pupil imaging system, and Marechal criterion is applied for the case of astigmatism aberration first and then to all the rest of the Seidel 1st order aberrations. The aberration criteria obtained are tabulated. In the case of Rayleigh's pupil, the same criteria are always smaller than Gaussian pupil, thus the latter is superior to the former.