

입력 시간지연 시스템의 한켈 근사화에 관한 연구

A Study on the Hankel Approximation of Input Delay Systems

황 이 철, 하 희 권, 이 만 형

(I Cheol Hwang, Hee Kwon Ha and Man Hyung Lee)

Abstract : This paper studies the problem of computing the Hankel singular values and vectors in the input delay systems. It is shown that the Hankel singular values are solutions to a transcendental equation and the Hankel singular vectors are obtained from the kernel of the matrix. The computation is carried out in state space framework. Finally, Hankel approximation of a simple example shows the usefulness of this study.

Keywords : input delay system, Hankel operator, Hankel singular value, Hankel singular vector, Hankel approximation, semi-separable integral operator

I. 서론

시스템의 과거입력과 미래출력과의 관계를 기술하는 한켈 작용소의 특이치 및 특이벡터는 모델 근사화 및 견실제어에 매우 중요한 역할을 수행한다. 모델 근사화는 시스템을 미리 규정된 Mcmillan 차수의 저차원 시스템으로 근사화하는 것으로서 제어시스템의 설계와 구현에 있어 매우 중요한 문제이며, 현재까지 많은 근사화 방법이 제안되어 있다. 그 가운데 한켈 근사법은 한켈 특이치를 이용하여 평가함수를 설정하고 이를 최소화함으로써 저차원 유리 전달함수를 얻는 방법으로서 현재까지 가장 최적인 시스템 근사법으로 잘 알려져 있다[1].

그리고 H_∞ 최적제어를 모델매칭(model matching) 문제로 공식화시켜 해를 구할 경우 제어기가 달성할 수 있는 성능사양의 하한은 한켈 작용소의 최대 특이치와 일치하며, 이때 최적 제어기는 최대 특이치에 상응하는 특이벡터로 구성된다는 사실이 잘 알려져 있다[2]. 그러므로 시스템의 한켈 근사화 및 H_∞ 제어기 설계시에는 반드시 문제에서 주어지는 한켈 작용소의 특이치 및 그에 상응하는 특이벡터 계산이 필요함을 알 수 있다.

유한차원 선형 시불변 시스템의 한켈 특이치 및 특이벡터는 그라미안의 고유치 문제를 통한 선형대수 문제로 귀착이 된다[3]. 그러나 시스템이 비선형성이나 무한차원성을 가질 경우에는 함수공간 상에서 정의되는 작용소의 스펙트럼 문제로 귀착되며, 그 해를 구하는 것은 그리 간단하지가 않다. 본 연구에서는 무한차원 시스템의 클래스를 입력 시간지연 시스템으로 한정하여 그들의 한켈 특이치와 특이벡터의 계산법을 제안하며, 동시에 그 특성에 관한 연구를 수행한다.

입력 시간지연 시스템에 관한 한켈 근사화는 다수의 연구자들에 의해서 연구되었다[4][5][6]. 특히 문헌 [4]에서는 한켈 근사화를 수행함에 있어 먼저 Laguerre 기저를 사용하여 한켈 작용소를 무한차원 행렬로 표현한 후,

이를 절단함으로써 얻어지는 유한차원 행렬의 특이치를 통하여 근사화하는 방법을 제안하였다. 여기서는 행렬을 절단할 때 발생하는 오차가 근사화 결과에 미치는 영향을 정확히 평가하는 것이 필수적으로 수반되어야 한다. 반면 문헌 [5]와 [6]에서는 시스템의 한켈 특이치를 초월 방정식의 근으로 계산하는 해석적 방법을 도출하여 초기 단계에서 한켈 작용소를 근사화하지 않는 방법을 제안하였다. 그러나 그들의 계산 알고리즘에는 수치적분이 포함되어 있으며 특히 특이벡터에 관한 명확한 계산 결과는 제시되지 않았다. 이러한 문제들에 대한 해결법 제시가 본 논문의 주요 연구내용이 된다.

따라서 본 연구는 문헌[6]의 확장으로서 복수 입력채널에 유리비의 시간지연을 포함하는 시스템의 한켈 특이치 및 특이벡터에 관한 새로운 계산법을 제안하는 것에 그 목적을 두고 있다. 결과적으로 한켈 특이치는 가관측 그라미안의 준-분리성으로부터 수치적분이 포함되지 않는 새로운 형태의 결과가 도출된다. 이때 한켈 작용소 및 그라미안은 문헌[6]과는 달리 입출력 작용소의 정의로부터 계산되며 동시에 특이벡터에 관한 구체적인 계산법이 도출된다. 그리고 수치계산은 선형시스템에 대한 범용적인 계산도구로 수행될 수 있음을 보이며, 이 결과를 이용하여 입력 시간지연 시스템의 한켈 근사화를 수행하여 본 연구의 유용성을 확인한다.

II. 한켈 및 그라미안 작용소

복수의 입력채널에 유리비인 서로 다른 크기의 시간지연이 포함된 시스템을 다음과 같이 고려한다.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + \sum_{j=0}^n B_j u(t - jL) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 의 모든 고유치의 실수부는 음인 것으로 가정하며, 즉 (1)은 안정한 시스템이라고 한다. 이때 한켈 근사화를 수행하여 저차원의 유한차원 근사 시스템을 얻기 위해서는 (1)의 한켈 특이치 및 특이벡터를 계산해야 한다. 유한차원 시스템의 한켈 특이치가 그라미안의 고유치 문제로 귀착된다는 사실을 이용하여 먼저 (1)의 가제어 및 가관측 그라미안을 정의하여 구체적인 형태를 도출한다.

1. 한켈 작용소 및 그라미안 정의

(1)의 상태공간을 $X = R^n \times L_2(-L, 0)^q$, 과거입력 공간을 $U = L_2(-\infty, -qL) \times L_2(-L, 0)^q$, 그리고 미래출력 공간을 $Y = L_2(L, 0)^q \times L_2(qL, \infty)$ 로 정의한다. 여기서 $L_2(-L, 0)$ 는 $(-L, 0)$ 에서 2승 적분 가능한 함수들로 구성되는 힐버트(Hilbert) 공간을 의미하며, $L_2(-L, 0)^q$ 는 $L_2(-L, 0)$ 들의 Cartesian 곱을 나타낸다. 그리고 U 는 시간구간 $(-qL, 0)$ 에서 정의되는 입력신호의 단편들로 구성되며, Y 는 시간구간 $(0, qL)$ 상의 신호 단편들로서 구성됨을 의미한다. $f \in L_2(-\infty, 0)$ 에 관하여 $\hat{f} \in U$ 를 아래와 같이 정의하고

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{f}_2 = \begin{bmatrix} \hat{f}_{21} \\ \vdots \\ \hat{f}_{2q} \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}_1(t) = f(t), \quad t < -qL$$

$$\hat{f}_{2k}(t) = f(-(q-k)L + t), \quad -L < t < 0$$

$g \in L_2(0, \infty)$ 에 관하여 $\tilde{g} \in Y$ 를 정의한다.

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{g}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{1q} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{g}_{1k}(t) = g(kL + t), \quad -L < t < 0,$$

$$\tilde{g}_2(t) = g(t), \quad t > qL$$

표현의 간결성을 위하여 아래의 기호들을 각각 정의하기로 한다.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_q = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

즉, S 는 (qxq) 천이행렬을, e_1, e_q 는 크기가 q 인 단위행렬을 의미한다. 그리고 $\tilde{A} = I_q \otimes A, \tilde{S} = S \otimes I_n, \tilde{C} = I_q \otimes C, \tilde{B}_j = I_q \otimes B_j, \tilde{e}_1 = e_1 \otimes I_n, \tilde{e}_q = e_q \otimes I_n$ 로 두고, 다음을 정의한다. 단, \otimes 는 크로벡커 적(Kronecker product)을 나타낸다.

$$\tilde{B} = \sum_{j=0}^{q-1} \tilde{S}^j \tilde{B}_j = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_1 & B_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_{q-1} & \cdots & B_1 & B_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \sum_{j=1}^q \tilde{S}^{*(q-j)} \tilde{B}_j = \begin{bmatrix} B_q & B_{q-1} & \cdots & B_1 \\ 0 & B_q & \ddots & B_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_q \end{bmatrix}$$

$$\tilde{E} = \sum_{j=0}^{q-1} \tilde{S}^j e^{jAL} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ e^{AL} & I_n & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ e^{(q-1)AL} & \cdots & e^{AL} & I_n \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \tilde{e}_q^* \tilde{E} \quad (2)$$

여기서 $\tilde{A}, \tilde{S}, \tilde{E}$ 는 상호 교환 가능하며, $\tilde{S}^q = 0$ 임에 주의하자.

시스템 (1)에 있어서 입력사상 $\Psi : U \rightarrow X$ 와 출력사상 $\Phi : X \rightarrow Y$ 는 각각 다음과 같이 정의된다. 입력사상 Ψ

는 두 작용소의 곱으로 주어지는데, 하나는 과거입력에서 시스템 (1)에서 집중 파라미터 시스템의 상태변수까지의 사상이고, 다른 하나는 과거입력을 최대크기의 시간지연 간격에 축약하는 사상이다. Φ 는 집중 파라미터 시스템의 상태변수 및 최대 지연시간 간격으로 축약된 과거입력에서 미래출력까지의 사상을 나타낸다. 단 축약된 과거입력 가운데 집중 파라미터 시스템의 상태변수에 미리 영향을 준 부분은 제외된다. 이를 기호로 표시하면 다음과 같다.

$$\Psi \hat{f} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \hat{f} \\ \Psi_2 \hat{f} \end{bmatrix}, \quad \Phi \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}x + \Phi_{12}f \\ \Phi_{21}x + \Phi_{22}f \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\Psi_1 \hat{f} = \sum_{j=0}^q \exp(-jAL) \int_{-\infty}^{-qL} \exp(-As) B_j \hat{f}_{1(s)} ds + M_3 \int_{-L}^0 \exp(-As) \tilde{B} \hat{f}_2(s) ds \quad (4)$$

$$\Psi_2 \hat{f} = \hat{f}_2$$

$$(\Phi_{11}x)(t) = \tilde{C} \tilde{E} \tilde{e}_1 \exp(A(t+L))x, \quad -L < t < 0$$

$$(\Phi_{21}x)(t) = C \exp(At)x, \quad t > qL$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{121} + \Phi_{122}$$

$$(\Phi_{121}f)(t) = \tilde{C} \exp(\tilde{A}(t+L)) \tilde{E} \tilde{S} \int_{-L}^0 \exp(-\tilde{A}s) \tilde{B} f(s) ds, \quad -L < t < 0$$

$$(\Phi_{122}f)(t) = \tilde{C} \exp(\tilde{A}t) \int_{-L}^t \exp(\tilde{A}s) \tilde{B} f(s) ds, \quad -L < t < 0$$

$$(\Phi_{22}f)(t) = C e^{A(t-qL)} M_3 \int_{-L}^t \exp(-As) \tilde{B} f(s) ds, \quad t > qL$$

위의 식에서 상태변수 X 는 유일하게 결정되지 않지만, 간단한 계산으로부터 시스템 (1)에 상응하는 한켈 작용소는 $\Gamma = \Phi \Psi$ 와 같이 정의되어 과거입력과 미래출력간의 사상을 나타낸다. 그리고 가제어 및 가관측 그라미안 P, Q 는 각각 $P = \Psi \Psi^*, Q = \Phi^* \Phi$ 와 같이 정의된다. 즉 가제어 그라미안은 과거입력에 의하여 초기상태에 저장되는 에너지 양을 나타내고, 가관측 그라미안은 초기상태에 의해서 미래출력에 나타나는 에너지의 양을 의미한다. 문헌 [7]로부터 P 가 유계이고 Q 가 컴팩트임을 알 수 있으므로 한켈 작용소의 특이치 및 특이벡터는 PQ 의 고유치 문제로부터 계산할 수 있다. 다음 절에서는 앞에서 정의된 그라미안을 구체적으로 기술하고 그 특성을 고찰한다.

2. 그라미안 계산 및 준-분리성

이 절에서는 그라미안 P, Q 의 구체적인 형태 및 PQ 가 준-분리 가능한(semi-separable) 핵(kernel)을 가지는 적분 작용소임을 보인다. 먼저 준-분리성을 가지는 적분 작용소의 정의를 간단히 소개하면 다음과 같다. 아래와 같이 주어지는 적분 작용소 $K : L_2(-L, 0) \rightarrow L_2(-L, 0)$ 를 고려한다.

$$Kf(t) = \int_{-L}^0 k(t,s) f(s) ds \quad (5)$$

여기서 핵 $k(t,s)$ 가 $(-L, 0)$ 에서 2승 적분 가능하고, 각

집합 $\{(t, s) : -L < t < s < 0\}$ 과 $\{(t, s) : -L < s < t < 0\}$ 에서 각각 t 및 s 만의 함수들 곱으로 분리 가능할 때 K 를 준-분리 가능한 적분 작용소라고 정의한다[8]. 문헌 [8]에서는 준-분리 가능한 적분 작용소의 고유치는 시변 선형 상미분방정식을 만족하는 상태 천이행렬에서 (2,2) 블록행렬이 특이행렬(singular matrix)이 되도록 하는 값을 설명하고 있다. 이것은 적분 작용소가 볼테라(Volterra) 및 유한랭크 작용소의 합으로 표현된다는 성질에 기초한다는 것에 주의하자.

이러한 준-분리성은 PQ의 고유치를 계산하는데 있어 기초가 되는 중요한 성질이 된다. P와 Q를 다음과 같이 정의한다.

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k e^{A(k-j)L} P_{jk} + \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=k+1}^q P_{jk} e^{A^*(j-k)L} \quad (6)$$

$$Q : QA + A^*Q + C^*C = 0 \quad (7)$$

(6)에서 P_{jk} 는 다음 선형 행렬방정식을 만족하는 것으로서

$$AP_{jk} + P_{jk}A^* + B_j B_k^* = 0 \quad (8)$$

여기서 P, Q는 (1)에서 집중 파라미터 시스템의 계수행렬로서 결정되며, 특히 Q는 집중 파라미터 시스템의 가관측 그라미안임에 주의하자. 그리고 $\tilde{Q} = I_q \otimes Q$ 를 정의하면 그라미안의 구체적인 계산과 준-분리성은 다음 정리 1과 같이 요약된다.

정리 1 : 입력사상 Ψ 와 출력사상 Φ 는 (3)과 (4)에서 정의된 것으로 하며, 다음의 작용소들을 각각 정의한다.

$$Vf(t) = \int_{-L}^t F_1^*(t)F_2(s)f(s)ds \quad (9)$$

$$W_j f = \int_{-L}^0 F_j(t)f(s)ds, j = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \begin{bmatrix} \exp(\tilde{A}^*t) \tilde{Q} \tilde{B} \\ \exp(-\tilde{A}t) \tilde{B} \end{bmatrix} \\ F_2(t) &= \begin{bmatrix} \exp(-\tilde{A}t) \tilde{B} \\ -\exp(\tilde{A}^*t) \tilde{Q} \tilde{B} \end{bmatrix} \\ F_3(t) &= \exp(-\tilde{A}t) \tilde{B} \end{aligned} \quad (10)$$

이때 가제어 및 가관측 그라미안 $P = \Psi\Psi^*$, $Q = \Phi^*\Phi$ 는 각각 (11), (12)와 같으며 Q의 (2, 2)요소는 준-분리 가능한 핵을 가지는 적분 작용소이다.

$$P = \begin{bmatrix} P & M_3 W_3 \\ W_3^* M_3^* & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_1^* \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$M = \begin{bmatrix} Q & 0 & -\tilde{e}_1^* \tilde{E}^* \exp(\tilde{A}^*L) \\ \exp(\tilde{A}L) \tilde{E} \tilde{e}_1 & \tilde{S} \exp(\tilde{A}L) \tilde{E} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}^* \end{bmatrix} \quad (13)$$

증명 : P, Q의 구체적인 계산은 입력 및 출력사상의 여인자(adjoint)를 계산하여 그라미안 정의식에 대입하면 된다. 여기서는 구체적인 계산을 생략하기로 한다. 그리고 가관측 그라미안에서 (2, 2)요소의 준-분리성은 (9), (12)로부터 쉽게 확인할 수 있다. ■

위의 정리에서 Q는 볼테라 작용소와 유한랭크를 가지는 작용소의 합으로 표현됨을 쉽게 확인할 수 있다. 이 사실은 PQ가 준-분리성을 가지는 적분 작용소임을 의미한다. 다음 장에서는 이러한 준-분리성으로부터 PQ의 고유치를 계산할 수 있다는 사실을 보인다.

III. 한켈 특이치 및 특이벡터

한켈 근사화를 사용하여 유한차원 근사 시스템을 얻기 위해서는 한켈 특이치 및 특이벡터를 계산해야 한다. 시스템 (1)의 한켈 작용소를 L_2 상에서 컴팩터인 Laguerre 기저 등으로부터 근사화를 수행하면 그 특이치는 근사적인 값이 되어 오차를 포함하게 된다. 즉 근사화하기 전에 특이치의 계산 단계에서 오차가 발생하므로 이것이 근사화에 미치는 영향을 충분히 검토하여야 한다. 본 절에서는 특이치의 해석적인 계산법을 제안하여 그러한 문제를 해결한다. 결과적으로 복수 입력 시간지연 시스템의 한켈 특이치를 초월함수의 해로서 구하는 해석적인 방법을 도출하여 특이치 계산 단계에서 오차가 발생하지 않도록 하며, 또한 근사화에서 기저의 선정문제를 고려할 필요가 없도록 한다. 동시에 그들의 계산이 시스템 (1)의 계수행렬 A, B_j, C를 사용함으로써 수행되며 실제 선형 제어시스템 설계에 이용되는 일반적인 소프트웨어로 구할 수 있음을 보인다.

1. 한켈 특이치 계산법

한켈 특이치를 특징지우는 초월 방정식은 가관측 그라미안의 준-분리성에 기초하여 얻어진다. 이에 앞서 (13)에서 정의된 행렬 M을 다음과 같이 인수분해한다.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^* \\ M_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 각 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_{11}^* &= \begin{bmatrix} 0 & \mu^{-1/2} \tilde{e}_1^* \end{bmatrix} \\ M_{12}^* &= \begin{bmatrix} \exp(\tilde{A}L) & 0 \\ -\exp(-\tilde{A}^*L) \tilde{Q} & \mu^{-1/2} \exp(-\tilde{A}^*L) \end{bmatrix} \\ M_{21} &= \begin{bmatrix} \tilde{E} \tilde{e}_1 \\ \mu^{1/2} \tilde{Q} \tilde{E} \tilde{e}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} \tilde{E} \tilde{S} & 0 \\ \mu^{1/2} \tilde{Q} \tilde{E} \tilde{S} & -\mu^{1/2} \tilde{E}^* \exp(\tilde{A}^*L) \end{bmatrix}$$

정리 2 : $U(t; \mu)$ 를 다음의 시변 선형 상미분방정식을 만족하는 기본해라고 한다.

$$\frac{d}{dt} U(t; \mu) = \mu S(t)U(t; \mu), U(-L; \mu) = I_{4qn} \quad (16)$$

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & F_3(t)F_1^*(t) & 0 \\ 0 & F_2(t)F_1^*(t) & F_2^*(t)F_3(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

이때 다음 식을 만족하는 $\sigma = \mu^{-1/2} (\neq 0)$ 가 시스템 (1)의 한켈 특이치가 된다.

$$\det(N_1 - N_2 U(0; \mu) N_3) = 0 \quad (18)$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} I_{qn} - \mu \tilde{e}_1 P Q \tilde{e}_1^* + \tilde{S} \exp(\tilde{A}L) \tilde{E} & \mu \tilde{e}_1 P \tilde{e}_1^* \tilde{E}^* \exp(\tilde{A}^*L) \\ 0 & -\tilde{S}^* \exp(\tilde{A}^*L) \tilde{E}^* \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_q^* & \tilde{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{qn} & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \exp(\tilde{A}L) \tilde{E} & 0 \\ 0 & \tilde{E}^* \\ \tilde{E}^* \tilde{e}_q Q \tilde{e}_1^* - \tilde{E}^* \tilde{e}_q \tilde{e}_1^* \tilde{E}^* \exp(\tilde{A}^*L) & 0 \end{bmatrix}$$

증명 : (12)에서 볼테라 작용소 V를 포함하는 우변의 첫째항을 다음과 같이 정의한다.

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

이때 $(I - \mu V)$ 가 임의의 μ 에 대해 가역(invertible)이므로, $(I - \mu PV)$ 도 역시 가역이다. 따라서 역행렬 공식과 다음 관계로부터

$$I - \mu PQ = (I - \mu PV) - \mu P \times \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_1^* \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

$(I - \mu PV)$ 의 가역성은 아래 식의 가역성과 동가임을 알 수 있다.

$$I_{2qn} - \mu \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} (I - \mu PV)^{-1} \times \begin{bmatrix} P & M_3 W_3 \\ W_3^* M_3^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}^* \\ M_{12}^* \end{bmatrix}$$

$$= I_{2qn} - \mu M_{21} P M_{11}^* - \begin{bmatrix} M_{21} M_3 & M_{22} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} M_3^* M_{11}^* \\ M_{12}^* \end{bmatrix}$$

여기서

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mu W_3 \mu V (I - \mu V)^{-1} W_3^* & \mu W_3 (I - \mu V)^{-1} W_1^* \\ \mu W_2 (I - \mu V)^{-1} W_3^* & \mu W_2 (I - \mu V)^{-1} W_1^* \end{bmatrix}$$

따라서 (16)의 기본해 $U(t; \mu)$ 로부터 Θ 를 구하면 (18)이 얻어진다[9].

위의 정리에서 상 미분방정식 (16)의 차수가 $4qn$ 인 반면에 (18)의 초월 방정식 핵 행렬은 $2qn \times 2qn$ 의 정방행렬임을 알 수 있다. 따라서 상 미분방정식의 차수를 증가시킴으로써 문헌 [5]에서 보이는 수치적분이 형식적으로 나타나지 않음을 알 수 있다. 이러한 사실은 그라미안의 기술 방법에 따른 차이임을 의미한다. 이에 관한 구체적인 내용은 문헌들을 참고하기 바란다[5][6][9]. 여기서 주어진 시스템이 시불변이므로 선형 상미분방정식 (16)이 시변이라는 것은 다소 특이한 구조를 가진다고 할 수 있다. 이 사실은 다음 정리와 같은 좌표변환을 통하여 시불변 선형 상 미분방정식으로 변환하는 것으로 명확해진다. 정리 3은 이를 설명하고 있다.

정리 3 : 다음과 같이 H를 정의한다.

$$H = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \mu^{1/2} \tilde{B} \tilde{B}^* & 0 \\ 0 & \tilde{A} & \mu^{1/2} \tilde{B} \tilde{B}^* & \mu^{1/2} \tilde{B} \tilde{B}^* \\ 0 & -\mu^{1/2} \tilde{C}^* \tilde{C} & -\tilde{A}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{A}^* \end{bmatrix} \quad (20)$$

이때 (1)의 한켈 특이치 $\sigma = \mu^{-1/2} (\neq 0)$ 는 다음 식을 만족하는 값이 된다.

$$\det(N_1 - N_2 e^{HL} N_3) = 0 \quad (21)$$

여기서 N_1 은 정리 2에서 정의되며 N_2, N_3 는 각각 아래와 같이 주어진다.

$$N_2 = [N_{21} \ N_{22}]$$

$$N_{21} = \begin{bmatrix} \tilde{E} \tilde{e}_1 \tilde{e}_q^* \tilde{E} & \tilde{E} \tilde{S} \\ \mu^{1/2} \tilde{Q} \tilde{E} \tilde{e}_1 \tilde{e}_q^* \tilde{E} & \mu^{1/2} \{ \tilde{Q} \tilde{E} \tilde{S} + \tilde{E}^* \exp(\tilde{A}^*L) \tilde{Q} \} \end{bmatrix}$$

$$N_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{E}^* \exp(\tilde{A}^*L) & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & \exp(\tilde{A}^*L) \tilde{E}^* \tilde{e}_q \tilde{e}_1^* \end{bmatrix}$$

증명 : (16)과 (20)에서 정의되는 S(t) 및 H를 통하여 시변 변환행렬 T(t)는 다음 관계를 만족한다.

$$T(t) \mu S(t) T^{-1}(t) + \left(\frac{d}{dt} T(t) \right) T^{-1}(t) = H$$

구체적인 계산을 수행하면 T(t)는 아래와 같이 주어진다.

$$T(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{1/2} \tilde{Q} \mathcal{E}_1 & \mu^{1/2} \mathcal{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{1/2} \mathcal{E}_2 \end{bmatrix}$$

여기서 $\mathcal{E}_1 = \exp(\tilde{A}t)$, $\mathcal{E}_2 = \exp(-\tilde{A}^*t)$ 를 나타낸다. 그리고 (16)의 기본해와 (21)에 포함된 지수함수 사이에는 다음 관계가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

$$U(t; \mu) = T(t) e^{H(t+L)} T^{-1}(-L) \quad \blacksquare$$

위의 결과에 대한 수치 알고리즘은 문헌 [6]과 동일하다. 즉 이분법을 사용하여 반복적으로 한켈 특이치가 계산되며, 그 상한값은 (1)에서 집중 파라미터 시스템의 H_∞ 노음으로 주어진다. 단일 입력 시간지연 시스템의 한켈 특이치는 문헌 [10]에서 연구되었다. 그 결과는 정리 3의 행렬식 조건에서 $q = 1, \tilde{B} = 0, \tilde{E} = I_n, \tilde{S} = 0$ 에 해당됨을 알 수 있다. 그리고 (20)의 H가 블록 대각행렬이 되고 N_2 의 4번째 블록 열과 N_3 의 첫번째 블록 행이 0이 된다는 것은 자명하다. 따라서

$$N_2 e^{HL} N_3 = N_2'' e^{H''L}$$

이 되고, 여기서 H'' 는 H의 두번째와 세번째의 블록 열과 블록 행으로 이루어진 Hamiltonian 행렬이며, N_2'' 는 N_2 의 두번째와 세번째 블록 열로 이루어진 부분 행렬이다. 이 값들을 (21)에 대입하고 좌측에 비특이 행렬을 곱하면 문헌 [10]의 정리 1과 동일한 결과가 됨을 쉽게 확인할 수 있다.

2. 한켈 특이벡터 계산법

정리 3에 의하여 한켈 특이치는 (21)에서 주어지는 행렬을 특이행렬로 만든다. 그 행렬의 영화공간(null space)에는 0이 아닌 벡터가 존재하게 된다. 이 벡터로부터 한

켈 특이벡터는 다음 정리와 같이 구조화된다.

정리 4 : $\sigma = \mu^{-1/2}$ 가 (21)을 만족하는 (1)의 한켈 특이치라 하고, $\xi \in R^{2qn}$ 는 다음을 만족하는 0이 아닌 벡터라고 정의한다.

$$(N_1 - N_2 e^{HL} N_3) \xi = 0 \quad (23)$$

여기서 N_1, N_2, N_3 는 각각 (19), (22)에서 주어진다. 이때 각 한켈 특이치 σ 에 상응하는 한켈 특이벡터 $\tilde{f} \in L_2(-\infty, -qL) \times L_2(-L, 0)^q, \tilde{g} \in L_2(-L, 0)^q \times L_2(qL, \infty)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(t) &= \sum_{j=0}^q B_j^* e^{-A^*(j+1)L} e^{-A^*t} [0 \ 0 \ 0 \ I] N_3 \xi, \\ \tilde{f}_2(t) &= [0 \ 0 \ \tilde{B}^* \ \bar{B}^*] e^{H(t+L)} N_3 \xi, \\ \tilde{g}_1(t) &= [0 \ \tilde{C} \ 0 \ 0] e^{H(t+L)} N_3 \xi, \\ \tilde{g}_2(t) &= C e^{A(t-qL)} [0 \ \tilde{e}_q^* \ 0 \ 0] e^{HL} N_3 \xi. \end{aligned} \quad (24)$$

증명 : \tilde{f} 와 \tilde{g} 가 임의의 특이값 $\sigma \neq 0$ 에 상응하는 한켈 특이벡터라고 하면 아래 식을 만족한다.

$$\Gamma \tilde{f} = \sigma \tilde{g}, \quad \Gamma^* \tilde{g} = \sigma \tilde{f} \quad (25)$$

이들은 PQ의 고유치 $\sigma^2 (= \mu^{-1})$ 에 상응하는 고유벡터 z 와는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sigma} \Psi^* \Phi^* \Phi z = \frac{1}{\sigma} \Psi^* Q z, \quad \tilde{g} = \Phi z \quad (26)$$

그리고 고유벡터 z 와 (23)을 만족하는 벡터 ξ 는 다음 관계를 만족한다.

$$z = (I - \mu PV)^{-1} P \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}^* \\ M_{12}^* \end{bmatrix} \xi \quad (27)$$

따라서 앞에서 정의된 각 작용소를 (27)에 대입하여 z 를 구한 후, (26)으로부터 한켈 특이벡터에 관한 결과식 (24)를 얻는다. ■

한켈 특이벡터는 $t > qL$ 구간에서는 전방 방정식의 초기조건에 대한 응답이고, $t < -qL$ 구간에서는 후방 방정식의 초기조건 응답이다. 이때 구간 $-qL < t < 0$ 와 $0 < t < qL$ 에서의 Hamiltonian을 이용한다. 여기서 초기조건은 영화공간상에 존재하는 벡터에 의하여 결정되는 점에 주의하자. 다음 절에서는 간단한 예제에 관한 한켈 근사화를 수행하여 III장에서 얻은 결과의 유용성을 살펴보기로 한다.

IV. 수치예제

두 입력에 서로 다른 시간지연을 가지는 2차 시스템에 관한 한켈 근사화 문제를 다룬다.

$$G(s) = (e^{-2s} + e^{-4s}) / (1 + 1.2s + 4s^2)$$

먼저 정리 3과 4로부터 각각 한켈 특이치 및 특이벡터를 계산한다. 이들을 이용하면 한켈 근사화는 문헌 [11]에 따라 수행될 수 있다. 여기서는 4차 시스템으로 근사화하여 4차 Padé 근사화와 비교하였으며 Padé 근사화는

e^{-2s} 와 e^{-4s} 를 각각 (1, 1) Padé 함수로 수행하였다. 그림 1, 2, 3은 근사화 결과를 각각 나타내고 있다.

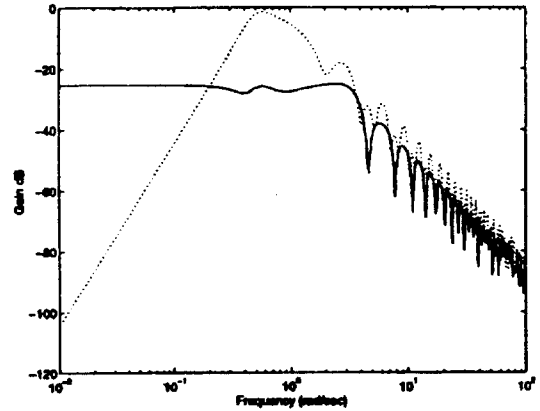


그림 1. 근사화 오차의 게인선도.
Fig. 1. Gain diagram of approximate errors.

그림 1은 주파수 응답에서의 게인 오차이며, 굵은 실선이 한켈 근사화의 결과를 나타내고, 점선은 동일 차수의 Padé 근사화를 나타내고 있다. 결과적으로 Padé 근사화가 한켈 근사화보다 저주파역에서는 양호하지만, 중간 주파수역에서 매우 큰 오차가 발생하며, 고주파역에서는 나뻐를 알 수 있다. 즉 Padé 근사화가 고주파에서 더욱 큰 H_∞ 노음 오차를 야기시킨다고 할 수 있으며, 이는 유한차원으로 근사화된 입력 시간지연 시스템의 견실제어기 설계시 고주파역의 모델링 오차에 대한 부담이 크게 됨을 의미하고 있다. 또한 원래의 시스템 위상지연이 점점 커지면 한켈 및 Padé 근사화는 모두 원래의 위상을 따라 잡지 못하게 된다. 이 점에서 Padé 근사화는 고주파역에서 큰 게인 오차를 유발하는 특성을 가진다고 할 수 있다. 그림 2는 임펄스 응답을 보여주고 있다. 그림 2를 확대한 그림 3에서 근사화 결과들의 시간지연 특성을 명확히 알 수 있다. 점선은 원래 시스템이며, 굵은 점선과 얇은 점선은 각각 한켈 및 Padé 근사화 결과를 나타낸다. 한켈 근사화가 Padé 근사화보다 시간지연의 특성을 양호하게 유지함을 알 수 있다.

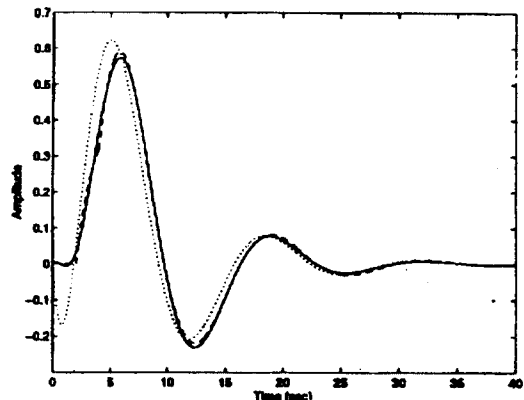


그림 2. 근사함수의 임펄스 응답(a).
Fig. 2. Impulse response of approximates(a).

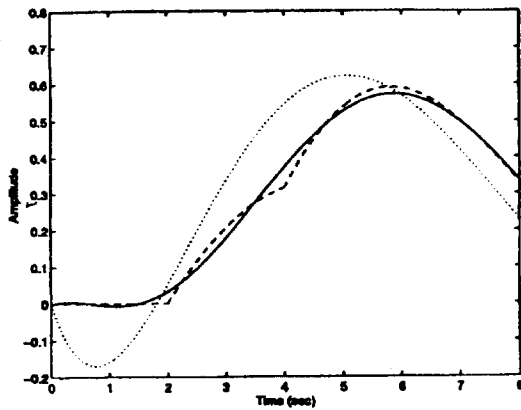


그림 3. 근사함수의 임펄스 응답(b).
Fig. 3. Impulse response of approximates(b).

V. 결론

복수 입력 시간지연 시스템에 관한 한켈 특이치 및 특이벡터의 수치적 계산법을 제안하였고, 간단한 예제를 통한 한켈 근사화에서 본 연구의 유용성을 확인하였다. 한켈 특이치는 시스템의 계수행렬로부터 이루어진 초월 방정식의 해로 주어짐을 보였으며, 동시에 특이벡터에 대한 구체적인 계산법을 도출하였다. 결과적으로 본 연구의 결과는 한켈 근사화를 수행할 때 초기단계에서 시스템의 한켈 작용소를 절단할 필요가 없음을 나타내고 있으며 그리고 수치 알고리즘의 실현도 선형 제어의 일반적인 소프트웨어로 수행됨을 보이고 있다.

참고문헌

[1] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L_{∞} -error bounds," *Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, 1984.
[2] B. A. Francis, *A course in H_{∞} control theory*,

Springler-Verlag, vol. 88, 1987.
[3] D. S. Flamm and S. K. Mitter, " H_{∞} sensitivity minimization for delay system," *System & Control Letter*, vol. 9, pp. 17-24, 1987.
[4] C. Glader, G. Högnäs, P. M. Mäkilä and H. T. Toivonen, "Approximation of delay systems," *Int. J. Control*, vol. 53, no. 2, pp. 363-390, 1991.
[5] I. C. Hwang and Y. Ohta, "Hankel singular values of commensurate delay systems," *Trans. of The Society of Instrument and Control Engineers*, vol. 32, no. 2, pp. 188-196, 1996.
[6] 황이철, 박경택, "복수입력 시간지연 시스템의 유리 근사화," 정밀공학회논문지, 제14권, 제1호, pp. 194-204, 1997.
[7] R. F. Curtain, "Robust stabilizability of normalized coprime factors: the infinite dimensional case," *Int. J. Control*, vol. 51, no. 6, pp. 1173-1190, 1990.
[8] I. Gohberg, S. Goldberg and M. A. Kaashoek, *Classes of linear operators, vol. I, Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 49, Birkhäuser, 1990.
[9] I. C. Hwang, "Studies on the Hankel singular values for rational approximation of input delay systems," *Ph.D. Thesis of Osaka University*, 1996.
[10] K. Glover, J. Lam and J. R. Partington, "Rational approximation of a class of infinite dimensional systems I: singular values of Hankel operators," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 325-344, 1990.
[11] K. Glover, R. F. Curtain and J. R. Partington, "Realisation and approximation of linear infinite dimensional systems with error bounds," *SIAM J. on Control and Optimization*, vol. 26, no. 4, pp. 863-898, 1988.



황 이 철

1987년 및 1991년 부산대학교 기계설계공학과 및 동 대학원 졸업(공학석사). 1996년 일본 오사카대 전자제어 기계공학과 졸업(공학박사). 1986년~1988년 삼성중공업 플랜트 사업부 근무. 1996년~1998년 부산대학교 기계공학부 국책교수 근무. 1998년 3월~

현재 동의대학교 기계공학과 전임강사. 관심분야는 건설 제어 및 모델규명 이론과 응용, 무한차원 시스템의 모델 근사화 및 제어, 프로세스 제어.



하 희 권

1982년 및 1987년 부산대학교 기계공학과 및 동 대학원 졸업(공학석사). 1982년~현재 한국 국방과학 품질관리소 선임연구원. 1994년~현재 부산대학교 기계공학부 박사과정 재학중. 관심분야는 건설제어 및 모델규명.



이 만 형

1969년 및 1971년 부산대학교 전기공학부 및 동 대학원 졸업(공학석사). 1983년 미국 오리건 주립대 전기·컴퓨터공학과 졸업(공학박사). 1975년~현재 부산대학교 기계공학부 교수. 관심분야는 메카트로닉스, 비선형제어, 확률제어, 랜덤 프로세스 및 파라미터 추정기법.