

# 로봇의 조작도 지수에 관한 연구

## A Study on the Manipulability Measures of Robot Manipulators

이 영 일, 이 지 홍

(Young Il Lee and Ji Hong Lee)

**Abstract** : Regarding the measure of dexterity of robot manipulators, two geometric tools, manipulability ellipsoids and manipulability polytopes, are examined and compared with each other. Even though the manipulability ellipsoid approach is the most widely used technique, it is shown that the manipulability ellipsoid transforms the inexact joint velocity constraints into task space and so it may fail to give an exact measure of dexterity and optimal direction of motion in task space. After showing that the polytope approach can handle such problems, we propose a practical polytope method which can be applied to 3-dimensional task space in general. The relation between manipulability ellipsoids and manipulability polytopes are also explored for a redundant case and a non-redundant one.

**Keywords** : manipulability, ellipsoid, polytopes

### 1. 서론

산업과 우주 탐사의 발달은 다양한 작업을 하고 효율성이 뛰어난 로봇을 필요로 하게 되었다. 따라서, 인간의 팔과 같이 점차 많은 자유도를 갖는 로봇이 설계되고 있는 추세이다. 작업 공간 차원 수보다 관절의 수가 많은 여유 자유도 로봇은 일반 로봇에 비하여 로봇 몸체와 장애물 사이의 충돌 회피나 특이 자세(singular configuration)의 회피, 그리고 여러 의미로의 최적 자세가 가능하다[1][2][6][12]. 이러한 여유 자유도 로봇은 작업기의 위치를 유지하면서 내부 관절 운동을 할 수 있으므로 효율적인 제어나 경로 계획이 일반적인 로봇의 경우보다 우수하나 그에 따르는 계산이 복잡하다. 운동의 효율성 해석을 위하여 비 여유 자유도 로봇이나 여유 자유도 로봇의 조작도 지수(manipulability measures)에 대하여 그동안 많은 연구가 이루어졌으나, 대부분의 연구는 각 관절의 허용 한계를 조작도에 포함시키지 않았다[1][6][12]. 또한, 허용 한계가 고려되었을지라도 이를 3차원 작업 공간상에서 작업을 하는 로봇에 대한 작업 속도 공간의 허용 범위의 특성에 대한 수치적 지수를 구하는 방법이 제시되지 않았다[10][13][14]. 따라서 본 연구에서는 관절 속도의 한계가 고려된 로봇의 조작도에 관한 연구를 비교 분석하고 3차원 작업 공간에서 작업을 하는 일반적인 로봇에 적용할 수 있는 조작도 지수를 제안한다.

로봇의 운동을 분석하는데 있어 잘 확립된 도구 중의 하나는 조작도 타원(manipulability ellipsoid) 방법이다[1][2][3][6]. 이 기하학적인 지수를 통하여 임의의 작업 방향으로 잘 움직일 수 있는 정도를 나타내는 양적 지수뿐만 아니라 특정한 작업 방향을 따라 관절 속도 크기에 대한 작업 속도 크기의 비를 구할 수 있다. 조작도 타원이 현재 로봇 운동의 조작도를 나타내는데 가장 널리 쓰이고 있는 방법이지만, 허용 가능한 관절 공간 속도의 영역을 총체적으로 기술하므로 각 관절의 특성이 고려된 작업 공간에서 허용 가능한 속도 영역을 정확히 기술하지 못한다. 이는 정확한 작업 속도 공간의 영역을 이끌어 내기 위해서는 각 관절 속도의 영역이  $\|\dot{q}\|_{\infty} = |\dot{q}_i| \leq \dot{q}_{i, \max}$  인  $l_{\infty}$  norm(norm)으로 기술되어

야 하는데,  $\|\dot{q}\|_2 = \sum \dot{q}_i^2 \leq 1$  인  $l_2$  norm(norm)으로 기술되었기 때문이다. 따라서 각 관절의 허용 속도가 제한되어 있을 때 작업 속도 공간의 타원은 부정확한 조작도와 작업 공간의 최적 방향에 대한 그릇된 정보를 줄 수 있다[10][13][14]. 본 논문에서는 각 관절의 허용 속도가 서로 다르게 제한되어 있을 때 발생하는 여러 상황을 분석하고 이를 작업 속도 공간으로 변환할 때 고려해야 할 여러 사항들에 대해 알아본다.

로봇의 조작도에 관하여 타원의 방법의 대안으로 다면체(polytope)방법이 있다[13][14]. 이는 다면체로 표현되는 허용 가능한 관절 속도 공간의 영역을 작업 속도 공간에 있어 다면체로 변환하는 방법이다. 단위화된 관절 속도 공간의 허용 영역은  $\|\dot{q}\|_{\infty} \leq 1$ 로 기술되고, 이 영역은 가중치 자코비안 행렬에 의해 작업 속도 공간의 다면체 영역으로 변환된다. 다면체에 의한 방법은 벡터의 합 계산에 의해서 허용 가능한 관절 속도 공간의 영역을 정확히 작업 공간으로 변환시키므로 타원의 방법을 적용할 때 만족시킬 수 없는 여러 문제점을 해결할 수 있다[10][13][14]. 특히, Kokkinis가 이 다면체의 방법을 개념적으로 설명하고, 이를 2차원 작업 공간에서 협조 작업을 하는 두 팔 로봇에 적용하여 작업 공간에서의 속도 및 힘의 허용 영역을 도식적으로 표현한 것은 주목할 만하다[13]. 그러나 이 논문에는 다면체의 영역의 수치적 지수를 구하는 방법이 제시되어 있지 않다. 따라서 본 연구에서는 다면체 방법에 있어 특정한 방향으로의 최대 허용 속도의 크기, 최대 허용 속도 크기에 대한 최소 허용 속도 크기의 비인 상태 지수도(condition number)와 허용 작업 속도 공간의 부피등을 구하고 이를 조작도 지수로 제시함으로써 보다 정확한 로봇 운동의 효율성 해석과 최적 자세 제어를 가능하도록 하였다.

본 논문에서는 조작도 타원과 조작도 다면체의 관계를 알아봄으로써 3차원 작업 공간에서 작업을 하는 일반적인 로봇에 적용할 수 있는 현실적인 조작도 지수를 제안하는 것을 주 관심사로 한다. 먼저 각 관절 최대 속도가 제한되어 있을 때, 여유 자유도 로봇과 비 여유 자유도 로봇에 있어 차이점을 비교한다. 이를 위해, 자코비안 열 벡터의 선형 조합에 의한 다면체 형성과 행 벡터들이 이루는 평면에 투영에 의해 형성되는 다면체, 즉 서로 다른 두 관점에서 형성되는 변환의 특성을 분석한다. 또한 일반적인 6차원 작업 공간에서 조작도 다면체의 형성 및 필요한 정보를 이끌어

접수일자 : 1996. 2. 10., 수정완료 : 1998. 1. 20.

이영일 : 충남대학교 항공우주 및 메카트로닉스공학과

이지홍 : 충남대학교 메카트로닉스 공학과

\* 본 논문은 한국과학재단의 특정연구 및 핵심연구의 지원을 받아 연구하였습니다.

내는 계산은 간단하지 않다. 따라서, 타원에 의한 방법을 다면체의 방법으로 대체하기 위해 직선 조작도와 회전 조작도를 분리하여 다루는 방법을 제안한다. 로봇의 응용에 있어 작업 공간상에서 작업기의 운동, 즉 작업 속도 공간은 최대 3차원의 직선 운동(translational velocity)과 3차원의 회전 운동(rotational velocity) 공간으로 구성되어 있으므로[9], 3차원 직선 조작도와 3차원 회전 조작도를 서로 독립적으로 다루는 방법을 제안한다. 이는 길이 치수(length scale)가 다른 차원을 분리할 뿐만 아니라 3차원 이상에서 표현할 수 없었던 도식화를 이룰 수 있는 현실성이 있는 방법이다. 또한, 제한한 3차원상의 직선 속도와 회전 속도 다면체에 효과적인 알고리즘[8]을 적용하였으며, 8축 로봇인 ARM III[4][5]의 여러 자세에 있어 예를 구해 보았다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 로봇의 운동을 기술하는데 필요한 식들을 기술한 후, 각 관절 최대 허용 속도를 고려한 조작도 타원에 대하여 알아본다. 3장에서는 관절의 속도 공간 영역을 정확히 기술한 \$l\_\infty\$ 노름에 의해 표현되는 영역에서 유도된 작업 속도 공간상의 영역인 조작도 다면체에 대하여 알아보고, 현실적인 조작도 지수를 제안한다. 4장에서는 조작도 타원과 조작도 다면체를 비여유 자유도 로봇과 여유 자유도 로봇에 대하여 서로 비교 분석한다. 5장에서는 일반적인 3차원 공간에서의 작업 공간 속도를 직선 속도와 회전 속도로 분리한 다면체를 가지고 조작도를 제안하고, 6장에서는 결론과 추후의 연구 과제를 기술하겠다.

**II. 조작도 타원**

이 장에서는 로봇의 운동을 분석하는데 있어, 관절 속도 벡터를 작업 공간 속도 벡터로 변환해 주는 자코비안(jacobian)으로부터 조작도 타원의 유도과정과 기하학적 성질을 보인다. 또한, 각 관절의 최대 허용 속도가 서로 다를 때, 조작도 타원을 유도하는데 있어 고려해야 할 점을 알아본다. 먼저, \$n\$개의 회전 관절을 갖는 로봇이 \$m\$차원의 작업공간에서 작업을 하고 있을 때 이 로봇의 정기구학적 다음과 같이 나타내기로 하자.

$$X = f(q) \tag{1}$$

여기서, \$X\$는 \$m\$차원의 작업 공간 벡터로서 작업기의 위치 및 회전량 정보를 갖고 있으며 \$q = [q\_1, q\_2, \dots, q\_n]^T\$는 관절 각도 벡터이다. 또한 여유 자유도 로봇인 경우를 고려하여 다음과 같이 가정한다.

$$n \geq m \tag{2}$$

(1)을 미분하면,

$$V \equiv \dot{X} = J(q) \dot{q} \tag{3}$$

가 얻어지는데 \$V\$와 \$J(q)\$를 각각 작업 공간 속도벡터, 자코비안이라 부르기로 한다. 이 전의 여러 연구에서 자코비안을 이용하여 조작도가 다음과 같이 정의된 바 있다[1][2][3][6].

$$w_e = \sqrt{\det[J(q)J(q)^T]} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m \tag{4}$$

여기서

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \tag{5}$$

의 관계를 만족시키는 \$\sigma\_i\$를 \$J\$의 특이값(singular value)라 한다. 또한 이들 값으로부터 로봇의 특이 자세 근처를 해석하기 위하여 상태 지수도(condition number)가 다음과 같이 정의된 바 있다[3].

$$c_e = \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \tag{6}$$

그런데, (4)에서 정의된 조작도는 관절 속도의 제약 조건이 \$\|\dot{q}\| = \sum \dot{q}\_i^2 \le 1\$로부터 유도된 것이므로, 각 관절 속도의 허용 범위의 특성을 포함하고 있지 않다. 하지만, 실제적인 상황에서는 로봇의 각 관절 최대 허용 속도는 서로 다르게 제한되어 있는 것이 일반적이다. 이러한 경우, 각 관절 속도의 허용 범위를 수식으로 표현하면 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$|\dot{q}_i| \leq \dot{q}_{i,max}, \quad i=1,2,\dots,n \tag{7}$$

이때, 각 관절의 최대 허용 속도를 조작도에 포함시키기 위하여 단위화 된 관절 속도를 다음과 같이 쓰며, 이는 각 관절의 최대 허용 속도 대한 각 관절 속도의 비인데, 이를 단위화된 관절 속도라 하자[2].

$$\hat{q} = [\dot{q}_1/\dot{q}_{1,max}, \dot{q}_2/\dot{q}_{2,max}, \dots, \dot{q}_n/\dot{q}_{n,max}]^T \tag{8}$$

먼저, 단위화 된 관절 속도와 작업 공간 속도의 변환 관계를 유도하기 위해 위 식을 행렬식으로 표현하면,

$$\dot{q} = R^{-1} \hat{q} \tag{9}$$

$$R = \text{diag}(\dot{q}_{1,max}, \dot{q}_{2,max}, \dots, \dot{q}_{n,max}) \tag{10}$$

가 되는데, 여기서 \$\text{diag}(\ )\$는 대각선 행렬로서 괄호 안의 요소를 대각선 요소로 갖는 행렬이다. 그러면, (9)를 이용하여 (3)을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$V = J \dot{q} = (JR) \hat{q} = \tilde{J} \hat{q} \tag{11}$$

위 식에서 단위화 된 관절 속도와 작업 공간 속도의 변환 관계를 나타내는 수정된 자코비안 \$\tilde{J}\$를 가중치 자코비안이라 부르기로 한다. 이 가중치 자코비안을 가지고 보다 실제적인 조작도 지수는 다음과 같은 양으로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{w}_e &= \sqrt{\det[\tilde{J} \tilde{J}^T]} \\ &= \sqrt{\det[JR^2J^T]} = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_m \end{aligned} \tag{12}$$

여기서

$$\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \geq \dots \geq \tilde{\sigma}_m \tag{13}$$

의 관계를 만족시키는 \$\tilde{\sigma}\_i\$가 \$J(q)\$의 특이값 일 때 앞에서 언급한 바 있는 상태 지수도를 다음과 같이 새롭게 정의할 수 있다.

$$\tilde{c}_e = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_m} \tag{14}$$

지금부터는 \$\tilde{J}\$로부터 유도된 조작도 타원을 설명하고, 조작도 지수 \$\tilde{w}\_e\$와 조작도 타원과의 관계를 기술하도록 한다. 여유 자유도 로봇인 경우를 포함하기 위하여 (11)로부터 단위화된 관절 속도 벡터는 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{q} = J^+ V + (I - J^+ J)k \tag{15}$$

위 식에서 \$J^+\$는 \$J\$의 의사 역행렬, \$k\$는 임의의 벡터이다. 그러면, 실제 작업 공간에 있어 조작도 타원은 \$\|\hat{q}\| \le 1\$인, 단위화된 관절 속도 공간의 영역으로부터 유도된다. 이때, (15)의 단위화된 관절 속도 공간에서 영 공간(null space)의 벡터 집합, 즉 \$(I - J^+ J)k\$은 작업 속도 공간에서 원점으로 대응(mapping)이 된다. 따라서 조작도 타원을 이끌어 내기 위한 단위화된 관절 속도는 영 공간 속도를 제외한 최소 노름의 단위화된 관절 속도로 다음과 같다.

$$\hat{q}_s = J^+ V \tag{16}$$

그러면, 속도 전달비를 나타내는 타원의 식을 유도하기 위한 단위화된 관절 속도 공간의 영역은 다음과 정의된다.

$$\|\hat{q}_s\| \equiv \hat{q}_s^T \hat{q}_s \leq \|\hat{q}\| \leq 1 \tag{17}$$

이때, (16)과 (17)을 조합하여 조작도 타원의 식을 정리하여

쓰면

$$V^T J^{*T} J^* V \leq 1 \quad (18)$$

이 되고, 이 조작도 타원의 부피는  $\tilde{w}_e$  에 비례한다.

위에 기술된 조작도 타원의 부피는 전체적인 조작도 지수를 준다더라도, 작업 공간에 있어 특정한 방향으로 허용 가능한 속도에 관한 정보를 줄 수 없다. 따라서 관절 속도에서 작업 속도 공간으로의 속도 전달비를 구하기 위하여 작업 공간의 속도 벡터  $V$ 가 크기  $\beta$ 이고 방향이 단위 벡터  $u_n$ 인 벡터이면  $V = \beta u_n$ 로 표현되고, 이를 (18)에 대입하면 속도 전달비는 다음과 같다.

$$\beta = [u_n^T (J^* J^*)^{-1} u_n]^{-1/2} \quad (19)$$

### III. 조작도 다면체

일반적으로 로봇을 제어하는데 있어 입력에 해당하는 관절 공간에 있어 속도, 힘 등은 제한되어 있다. 이때 출력에 해당하는 작업기의 속도, 힘 등의 허용 범위를 정확히 평가하는 것은 로봇의 효율성 해석 및 최적 제어에 있어 중요하다. 이와 같이 입력이 제한되어 있을 때 출력의 허용 영역은 다면체로 표현된다. Kokkinis는 협조 작업을 하는 두 팔 로봇에 다면체의 방법을 적용하여 허용 가능한 작업 속도와 힘의 영역을 이끌어 낼 수 있음을 보였다[13]. 그러나 다면체의 작업 공간에 있어서 특정한 방향으로의 허용치의 크기 또는 허용 영역의 부피 등을 수치 해석적으로 구하는 방법이 제시되어 있지 않아 로봇의 효율성 해석 및 최적 자세 제어를 위한 성능 지수를 이끌어 낼 수 없다. 따라서 이 장에서는 다면체를 부분 공간으로 정의한 후에 조작도 지수를 수치 해석적으로 구하는 방법에 대하여 기술한다.

이를 위해 먼저, 단위화된 관절 속도와 작업 공간 속도의 변환 관계를 나타내는 (11)을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$V = [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_n] [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]^T \\ = \dot{q}_1 J_1 + \dot{q}_2 J_2 + \dots + \dot{q}_n J_n \quad (20)$$

위 식에서  $J_i$ 는  $J$ 의  $i$ 번째 열 벡터이고,  $V$ 은  $|\dot{q}_i| \leq 1$ 로 주어지는 계수를 갖는  $J$ 의 열 벡터 선형 조합으로 해석할 수 있다. 그림 1은 다면체 형성의 예를 보여준다.

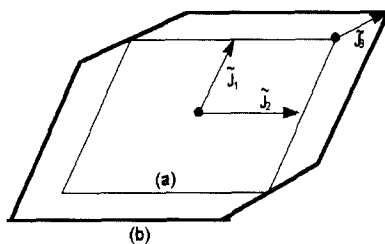


그림 1. 3 자유도 로봇의 2차원 공간에서의 조작성 다면체의 구성. (a) 두 벡터에 의한 조작성 다면체 (b) 한 벡터 추가 후의 다면체.

Fig. 1. Construction of manipulability polytopes in 2-dimensional task space for a 3 joint robot. (a) Polytope made of two vectors. (b) Polytope after adding one more.

그러면, 이러한 조작도 다면체를 유도하기 전에 다면체의 부분 공간(subspace)을 다음과 같이 정의한다.

정의 1:  $V_j, j=1, \dots, N_v$ 을  $n$ 차원 상의 작업 공간상에서 다면체의 꼭지점을 나타내는 벡터,  $N_v$ 은 꼭지점의 수라 하자. 그러면, 벡터 집합  $V_k, i=1, 2, \dots, n$ 로 구성된 (21)에 의해 표현되는 다면체의 요소(elements)가 없을 때, 이를

원시 꼭지점 집합(primary vertex set)이라 한다.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{k_i} V_{k_i}, \lambda_{k_i} \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_{k_i} > 1 \quad (21)$$

또한, 다음 식에 의해 기술되는 영역을 단위 다각뿔 (Cone-cell<sub>K</sub>)이라 부른다.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{k_i} V_{k_i}, \lambda_{k_i} \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_{k_i} \leq 1 \quad (22)$$

그리고 다음과 같이 기술되는 평면을 단위 다각뿔의 하부 평면(bottom plane)이라 부른다.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{k_i} V_{k_i}, \lambda_{k_i} \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_{k_i} = 1 \quad (23)$$

위에서 정의된 단위 다각뿔의 예는 그림 2에 보였다.

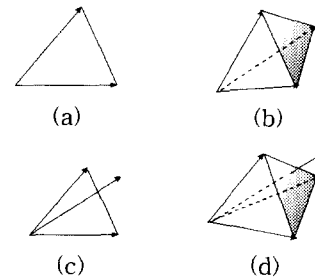


그림 2. 단위 다각뿔의 예들 (a) 2차원 작업 공간 (b) 3차원 작업 공간, 비 단위 다각뿔의 예들 (c) 2차원작업 공간 (d) 3차원 작업 공간.

Fig. 2. Examples of cone-cell in (a) 2-dimensional task space and (b) 3 dimensional task space and non-cone-cell in (c) 2-dimensional task space and (d) 3 dimensional task space.

지금부터는 다면체에 근거하여 조작도 지수를 유도하여 보자.  $k$ 번째 단위 다각뿔의 부피를  $S_k$ 라 하면 이는 다음과 같다.

$$S_k = \frac{1}{d_n} |\det[V_{k_1} \ V_{k_2} \ \dots \ V_{k_n}]| \quad (24)$$

위 식에서  $d_n$ 은 작업 공간의 차원에 의해 정해지는 상수이고[11],  $[V_{k_1} \ V_{k_2} \ \dots \ V_{k_n}]$ 은  $n \times n$ 정방 행렬이다. 위에서 정의된 부피를 가지고 임의의 방향을 따라 잘 움직일 수 있는 성능과 관계되는 조작도 지수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$w_p = \sum S_k \quad (25)$$

위에 기술된 다면체의 부피가 전체적인 조작도 지수를 준다더라도, 조작도 지수  $w_p$ 는 특정 방향으로의 운동에 관하여 허용 가능한 속도 크기에 대한 정보를 줄 수 없다. 따라서 작업 속도 공간에서 특정한 방향으로의 최대 허용 속도의 크기를 알기 위하여 다음과 같은 방법을 제안한다. 원시 꼭지점 집합  $V_k$ 와 벡터  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_{k_i} V_{k_i}, 0 \geq \lambda_{k_i}$ 에 대하여, 원점에서부터 다면체와 작업 공간 속도 벡터  $u$ 의 교차점까지의 거리  $l_{uk}$ 를 결정하는 식을 유도한다. 그림 3에서 보듯이, 단위 다각뿔의 부피는  $u$ 에 의한 분해되는 단위 다각뿔의 합으로 다음과 같이 표현된다.

$$S_k = \frac{1}{d_n} l_{uk} \{ |\det[u_n \ V_{k_2} \ \dots \ V_{k_n}]| \\ + |\det[V_{k_1} \ u_n \ \dots \ V_{k_n}]| \\ + \dots + |\det[V_{k_1} \ \dots \ V_{k_{n-1}} \ u_n]| \} \quad (26)$$

여기서  $u_n = u/\|u\|$ 이다. (24)와 (26)로부터 길이  $l_{uk}$ 를 결정할 수 있다.

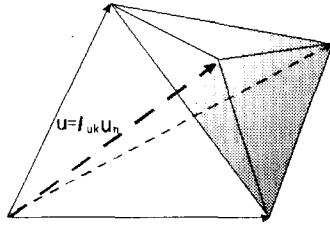


그림 3. 단위 다각뿔의 분해.  
Fig. 3. Partitioning Cone-cell.

또한, (26)의  $l_{uk}$ 를 이용하여 타원에서와 마찬가지로 상태 지수도를 다음과 같이 새롭게 정의할 수 있다.

$$c_p = \frac{s_{\max}}{s_{\min}} \quad (27)$$

위에서  $s_{\max}$ 와  $s_{\min}$ 은 각각 원점에서 다면체까지 교차하는 최소, 최대 거리이고 다음과 같이 구할 수 있다.

$$s_{\max} = \max_k \{ \|V_k\| \} \quad (28)$$

$$s_{\min} = \min_k \{ \min_u l_{uk} \} \quad (29)$$

위 식에서  $\min_u l_{uk}$ 는 원점에서부터 각 단위 다각뿔의 하부 평면까지의 가장 짧은 거리를 결정짓는 식이고,  $s_{\min}$ 은 다음과 같이 간단한 최적화 기법을 적용하여 구할 수 있다.

$$f^2(\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{km}) = (\sum_{k=1}^m \lambda_k V_k) (\sum_{k=1}^m \lambda_k V_k)^T \quad (30)$$

또한, 이때 구속식(constraint equation)은 다음과 같다.

$$\lambda_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1 \quad (31)$$

정의 1은 다면체에 있어 속도 전달비를 구하는데 유용하게 쓰일 수 있다. 그러나  $n$ 차원 상에서 원시 꼭지점 집합을 찾아내기 위해서는 꼭지점 중에서  $n$ 개의 꼭지점을 선택하여 (21)을 만들고 다면체의 다른 요소 즉, 다른 꼭지점들이 (21)에 의해 표현되지 않는가를 알아보아야 한다. 이는 작업 공간의 차원이 커질수록 꼭지점이 많아질수록 계산량이 기하급수적으로 증가한다는 것을 말해준다. 따라서  $n$ 차원 이상에서 단위 다각뿔을 이루는 원시 꼭지점을 효과적으로 찾아 다면체를 형성시키는 알고리즘[8]을 3차원 상에서 의미에 맞게 수정하여 부록에 첨부하였다.

IV. 타원과 다면체

지금까지는 두 종류의 조작도 지수, 즉 조작도 타원과 조작도 다면체에 대하여 알아보았다. 이 장에서는 이 두 종류의 기하학적 측정에 있어 차이점을 분석한다. 전 장에서 보였듯이, 조작도 타원과 조작도 다면체를 유도하기 위한 단위화된 관절 속도의 영역은 각각  $l_2$ 놈과  $l_\infty$ 놈의 의미로 정의된다. 그러므로 작업 속도 공간으로 변환을 위한 단위화된 관절 속도 공간의 구속 영역은 타원일 때는 다음과 같이 정의되고,

$$Q_e = \{ \dot{q} : \sum \dot{q}_i^2 \leq 1 \} \quad (32)$$

다면체일 때는 다음과 같이 정의한다.

$$Q_p = \{ \dot{q} : |\dot{q}_i| \leq 1 \} \quad (33)$$

위에서 정의한 단위화 된 관절 속도 공간의 구속 영역은 그림 4와 같다. 위에서 조작도 타원을 유도하기 위한 영역을 관절 속도의 단위 구, 즉  $\|\dot{q}\|_2 = \sum \dot{q}_i^2 \leq 1$ 의 영역이 아닌 단위화된 관절 속도의 단위 구 영역인 (32)로 부터 유도한 것은 조작도 타원이 조작도 다면체에 더 근사하기 때문이다 [10]. 또한, 조작도 다면체를 유도하기 위한  $l_\infty$ 의 영역은  $|\dot{q}_i| \leq \dot{q}_{i, \max}$ 로 표현할 수 있으나 각 관절이 허용 범위가 다른 경우 작업 공간의 다면체를 일관성 있게 유도할 수 없으므로 이를 일관성 있게 유도하기 위해서 단위화 된 관절 속도의 단위 다면체 영역을 (33)과 같이 표현한다. 이는 단위화된 각 관절의 속도의 범위가 -1과 1 사이의 값인 단위 다면체의 영역을 뜻한다.

조작도 타원과 다면체 모두 자코비안 행렬을 이용하여 관절 속도 공간을 작업 속도 공간으로 변환한 것이므로 작업 속도 공간에 있어 타원과 다면체는 서로 밀접한 관계가 있다. 특히, 조작도 타원과 조작도 다면체는 최대 속도 방향이 다른 것으로 알려져 있는데[14], 이어지는 장에서는 최대 속도 방향뿐만 아니라 다른 기하학적 성질을 비 여유자유도와 여유 자유도 로봇인 경우로 나누어 설명한다.

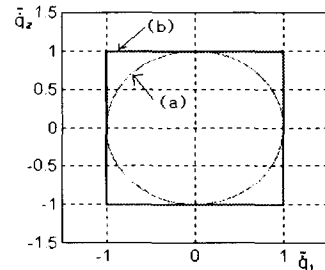


그림 4. (a) 조작성 타원과 (b) 다면체를 유도하기 위한 2차원 공간상의 관절 구속.

Fig. 4. 2-dimensional joint constraints for deriving (a) Manipulability ellipsoid and (b) polytope.

1. 비 여유 자유도 로봇인 경우

비 여유 자유도 로봇인 경우에 타원과 다면체의 상관 관계를 보이기 위하여 2차원에서 운동을 하는 2자유도 로봇에 대한 예를 보이겠다(그림 5 참조).

여기서 단위 관절 속도 영역의 원시 꼭지점은  $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = ((1,1)^T, (1,-1)^T, (-1,-1)^T, (-1,1)^T)$ 이고, 가중치 자코비안 행렬의 행 벡터는  $\tilde{J}_1 = (-2.0, -2.5)$ 와  $\tilde{J}_2 = (-1.5, 1.5)$ 이다. 이때, 작업 공간에 있어 다면체의 원시 꼭지점들은  $T_j$ 로써 다음 식으로 표현된다.

$$T_j = JQ_j = [ J_1^T \cdot Q_j, J_2^T \cdot Q_j ], \quad j=1,2,3,4 \quad (34)$$

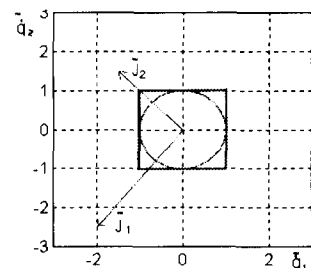


그림 5. 자코비안의 행 벡터들과 겹쳐진 2차원의 관절 속도 공간.

Fig. 5. 2-dimensional joint velocity spaces overlapped with Jacobian row vectors.

위 식은 (32)과 (33)의  $Q_e$ 와  $Q_b$ 로 각각 정의된 단위화된 관절 속도 공간 영역을 작업 속도 공간에 해당되는 영역으로 변환된다. 여기서,  $a \cdot b$ 는 두 벡터  $a$ 와  $b$ 의 내적이고  $J_i^r$ 은  $J$ 의  $i$ 번째 행 벡터이다. 이 방식을 적용하면, 그림 5에 표시된 영역에 대하여 그림 6과 같이 변환된 영역을 구할 수 있다.

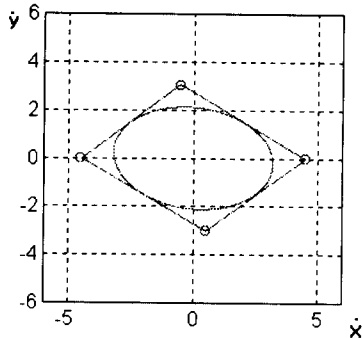


그림 6. 작업 공간에 있어 타원과 다면체.  
Fig. 6. Resultant ellipsoid and polytope in task space.

또한 다음 사항을 주의하여 보면 ; i) 작업 공간에서 타원은 다면체 내부에 접한다, ii) 타원에 있어 최소 속도 전달비의 방향은 일치하더라도 최대 속도 전달비의 방향은 일치하지 않는다, iii) 타원의 부피는 항상 다면체의 부피보다 작다. 위에서 i)에 대한 이유는 단위화 된 관절 속도 공간에서 단위 구와 단위 다면체가 접하는 부분이 작업 속도 공간에서 일대일로 대응이 되기 때문이다.

2. 여유 자유도 로봇인 경우

여유 자유도 로봇인 경우에 있어 단위화 된 관절 속도 공간의 구속 영역을 작업 속도 공간의 영역으로 변환할 때 비 여유 자유도 로봇의 경우와 다른 상황이 발생한다. 여유 자유도 로봇의 예로써 2차원 공간에서 작업을 하는 3관절 로봇을 고려하여 본다. 타원과 다면체에 의한 단위 관절 속도의 구속 영역  $Q_e$ 와  $Q_b$ 를 그림 7에 보였고 변환을 위한 가중치 자코비안의 행 벡터를 ( $J_1^r, J_2^r$ ) = ((-1.3, -1.2, -1.5), (-1.5, 2.0, -1.2)) 라 가정한다.

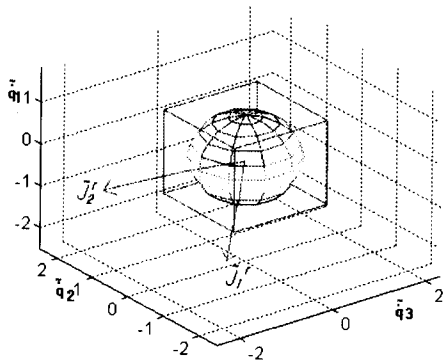


그림 7. 자코비안의 행 벡터들에 의해 겹쳐진 3차원 공간의 관절 속도 벡터.

Fig. 7. 3-dimensional joint velocity spaces overlapped with Jacobian row vectors.

그림 8에 표현된 두 그림 중에 하나는  $Q_e$ 와  $Q_b$ 를  $J_1^r$ 과  $J_2^r$ 에 의해 형성되는 평면에 투영이고 다른 하나는 작업 속도 공간으로 변환된 그림이다. 다음 사항을 주의하여 보면; i) 타원은 다면체의 내부에 접하지 않을 수도 있다, ii) 타원에 있어 최대 속도 전달비의 방향이 일치하지

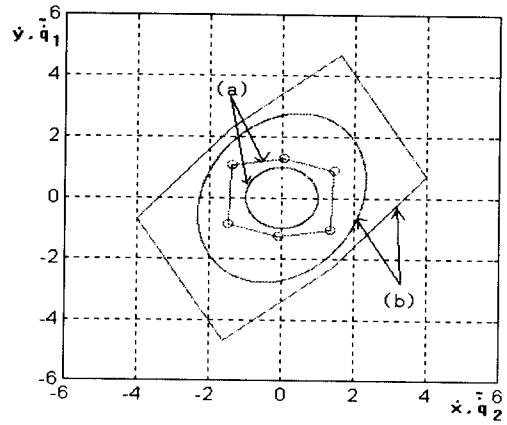


그림 8. (a)  $Q_e$ 와  $Q_b$ 를  $J_1^r$ 와  $J_2^r$ 에 의하여 이루어진 평면에 투영시킨 그림. (b) 작업 공간에서 이에 해당하는 타원과 다면체.

Fig. 8. (a) Projected figure of  $Q_e$  and  $Q_b$  to the plane made up of  $J_1^r$  and  $J_2^r$ . (b) Corresponding ellipsoid and polytope in task space.

않을 뿐만 아니라 최소 속도 전달비의 방향도 일치하지 않을 수도 있다, iii) 타원의 부피는 다면체의 부피보다 항상 작다.

위에서 i)에 대한 이유는 다음과 같이 해석될 수 있다.  $Q_e$ 의 영역은  $Q_b$ 의 영역에 내접을 하므로 접하는 부분의 방향을 제외하고 나머지 방향에서는  $Q_b$  영역의 길이가  $Q_e$  영역의 길이 보다 크다. 따라서 접하지 않은 단위화된 관절 속도 영역이 작업 속도 공간에서 다면체의 허용 속도 크기가 타원이 허용 속도 크기 보다 커지므로 타원은 다면체의 내부에 접하지 않을 수 있다.

V. 6차원 작업 공간으로의 확장

다면체 방법이 전체적인 조작도와 운동의 최적 방향에 있어 정확한 해를 주지만, 이는 타원의 방법보다 해석적이지 않으며, 적용되는 공간의 차원이 커질수록 계산이 복잡하여 현실적이지 않다[8]. 그러나, 일반적인 3차원 작업 공간에서 기준 좌표계에서 본 작업기 좌표계의 속도를 직선 속도와 회전 속도로 즉, 두 개의 독립적인 3차원의 직선 속도와 회전 속도로 분해할 수 있다. 여기서 회전 속도는 기준 좌표계에 있어 한 특정한 방향으로의 회전 속도이다. 따라서, 작업 속도 벡터가 다음과 같이 기술된다고 가정하면,

$$V = [V_x \ V_y \ V_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \tag{35}$$

$V$ 를 다음 두 식으로 나눌 수 있다.

$$V_T = [V_x \ V_y \ V_z]^T = J_T \dot{q} \tag{36}$$

$$V_w = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T = J_w \dot{q} \tag{37}$$

여기서,  $J_T$ 와  $J_w$ 는 로봇의 관절 수가  $n$ 일 때,  $J$ 를 다음과 같이 분해하는  $3 \times n$  행렬들이다.

$$J = \begin{bmatrix} J_T \\ J_w \end{bmatrix} \tag{38}$$

또한  $V_T$ 와  $V_w$ 는  $3 \times 1$  벡터이고, 3장에서 기술된 방법은 3차원 이상의 공간에 대하여 적용될 수 있고, 3차원 직선 속도 공간과 3차원 회전 속도 공간에 있어 다면체는 각각 (36)과 (37)에 의해 결정된다. 따라서, 직선 속도 공간과 회전 속도 공간을 분리한 이 다면체들을 이용하면 3차원 공간에서 도식화가 가능할 뿐만 아니라 특정한 방향으로의 조작도 뿐만 아니라 임의의 방향으로 조작도를 결정할 수 있다. 또한, 다루고자 하는 문제의 중요도에 따라 두 조작도 중

하나를 택할 수 있다. 만약 직선 속도가 중요하다면 (36)에 의한 다면체를 최적화의 성능지수(performance index)로 택할 수 있다. 그런데, 두 지수를 동시에 최적화하고자 할 때는 두 지수는 서로 연동되어 독립적으로 최적화 할 수 없을 것이다. 예를 들면 직선 조작도(회전 조작도)가 최대값을 가질 때 회전 조작도(직선 조작도)가 최소화되어 로봇이 특이 자세를 가질 수 있다. 따라서, 두 지수를 동시에 최적화하여야 한다면 각 지수의 가중치의 합인 (39)나 곱인 (40)으로 결합하여 전체 조작도를 정하면 될 것이다. 이때 가중치는 각 지수의 길이 치수(length scale)를 조절하는 역할을 하므로 길이 치수가 다른 것을 극복할 수 있다[15].

$$w_o = k_T w_{pT} + k_w w_{pw} \quad (39)$$

$$w_o = k_T w_{pT} \cdot k_w w_{pw} \quad (40)$$

물론 위  $w_{pT}$ 와  $w_{pw}$ 는 3 차원 보다 낮은 차원의 경우에도 적용될 수 있다. 예로써, 그림 9는 2차원 공간에서 움직이는 3자유도 로봇의 경우를 보여준다. 여기서, 로봇은 다만 z 축 방향을 따라 움직이므로 회전 다면체의 부피는 z 축으로의 길이가 된다.

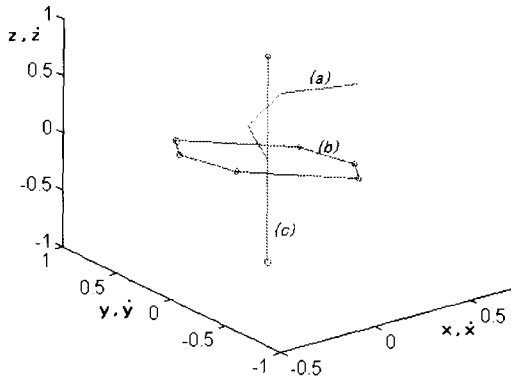


그림 9. (a) 2 차원 작업 공간에서의 로봇의 자세와 (a) 직선 속도 공간 과 (b) 회전 속도 공간.  
Fig. 9. (a) Robot configuration in 2-dimensional task space and corresponding polytopes in (b) translational velocity space and (c) rotational velocity space.

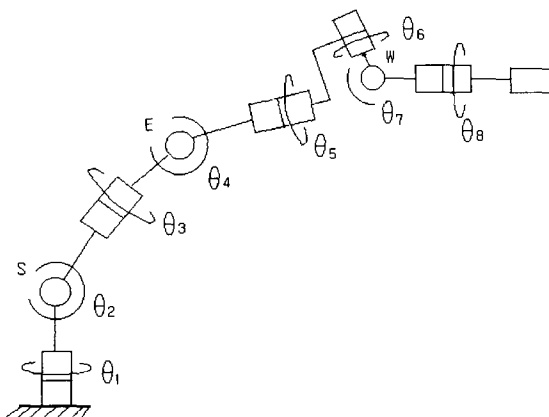
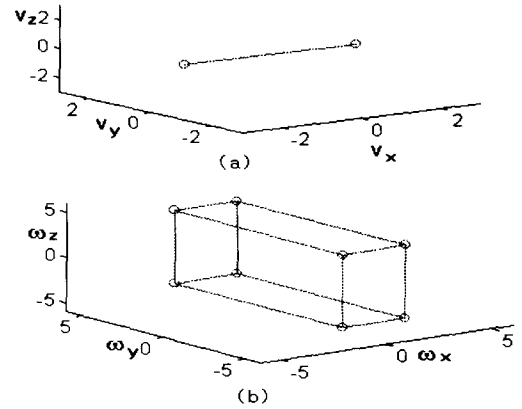


그림 10. ARM II 8 자유도 로봇.  
Fig. 10. ARM II 8 degree of freedom robot manipulator.

이제는 그림 10에 보인 [5]의 8축 로봇의 더 복잡한 예를 보여겠다. 로봇의 최대 허용 각 속도가  $\dot{q}_{max} = (1.0, 1.2,$



1.2, 1.3, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5) rad/s 이고 관절 각도가  $q = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$  deg인 자세를 가질 때, 조작도 다면체들은 그림 11과 같고 다른 자세에서의 조작도 다면체의 예를 그림 12-14에 보였다.

그림 11. 관절 각도가 (0,0,0,0,0,0,0,0) 일때 (a) 직선 속도 공간과 (b) 회전 속도 공간의 다면체.

Fig. 11. Polytopes in (a) translational velocity space and (b) rotational velocity space with joint angle of (0,0,0,0,0,0,0,0).

먼저, 그림 11-14의 직선 속도 공간의 다면체를 분석하여 보자. 그림 11의 자세는 1차원 직선 운동으로, 그림 12의 자세는 2차원의 직선 운동으로 제한되어 있는 특이 자세이다. 그림 13-14는 3차원 상에서 자유롭게 직선 운동을 할 수 있는 자세이다. 예를 든 자세들이 직선 속도 공간에서 제한되어 있는 차원이 다른 반면, 회전 속도 공간에서는 모두 3 차원 상에서 자유롭게 운동을 할 수 있다.

**VI. 결론**

각 관절의 허용 속도가 서로 다르게 제한되어 있는 경우를 가정하여, 작업 공간에서 임의의 방향으로 잘 움직일 수 있는 정도를 나타내는 양이나 특정한 방향으로의 허용 속도의 크기를 결정하는 실제적인 방법을 다면체 방법에 근거하여 제안하였다.

기존의 타원의 방법은 정확하지 않은 관절 속도의 허용 영역으로부터 허용 가능한 작업 속도 공간의 영역을 유도했다는 문제점을 갖고 있다. 따라서, 이 타원에 의한 방법은 작업 속도 공간에 있어 그릇된 최적 운동 방향을 줄 수 있으므로, 이러한 문제를 해결할 수 있는 효과적인 다면체 방법이 제안되었다. 자코비안 행렬에 의한 작업 영역 변환이 기하학적으로 해석되었고, 비 여유 자유도 로봇인 경우와 여유 자유도 로봇인 경우에 대하여 서로 다른 특성을 갖는 이유가 분석되었고, 또한 3차원 작업 공간까지 적용될 수 있는 방법이 제안되었다.

다면체 방법의 비 해석적인 특성과 계산의 복잡성을 극복하기 위해 로봇 작업기의 운동을 직선 운동과 회전 운동으로 분리하는 방법을 제안하였다. 일반적인 3차원 작업 속도 공간은 물리적으로 의미있는 두 개의 3차원 직선 공간과 3차원 회전 공간으로 분리할 수 있으므로 일반적인 3차원 공간에서 로봇의 조작도를 두 개의 독립적인 양으로 분리하여 다루는 방법을 제안하였다. 제안한 방법은 8축 여유 자유도 로봇의 여러 경우에 적용하여 타당성을 보였다.

본 연구 결과를 확장하여 여유 자유도 로봇인 경우에 있어, 다면체의 정량적인 해석을 통한 로봇의 최적 자세를 모

의 실험을 하고 로봇 매니플레이터의 동력학을 포함한 운동의 조작도를 추후에 연구할 계획이다.

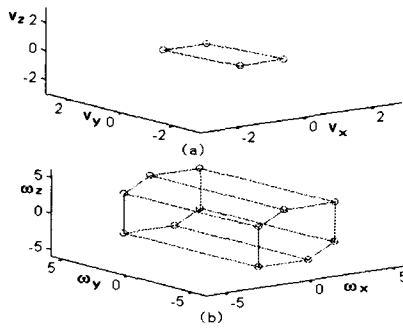


그림 12. 관절 각도가 (60,0,-40,0,0,0,0) 일때 (a) 직선 속도 공간과 (b) 회전 속도 공간의 다면체.

Fig. 12. Polytopes in (a) translational velocity space and (b) rotational velocity space with joint angle of (60,0,-40,0,0,0,0).

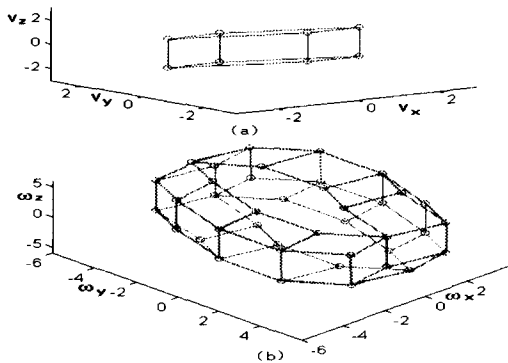


그림 13. 관절 각도가 (45,-60,0,35,20,-15,10,0) 일때 (a) 직선 속도 공간과 (b) 회전 속도 공간의 다면체.

Fig. 13. Polytopes in (a) translational velocity space and (b) rotational velocity space with joint angle of (45,-60,0,35,20,-15,10,0).

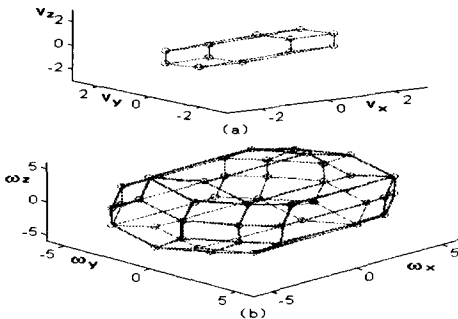


그림 14. 관절 각도가 (-25,-40,34,62,-58,0,0,0) 일때 (a) 직선 속도 공간과 (b) 회전 속도 공간의 다면체.

Fig. 14. Polytopes in (a) translational velocity space and (b) rotational velocity space with joint angle of (-25,-40,34,62,-58,0,0,0).

Press, pp. 735-747, 1984.

[2] T. Yoshikawa, "Manipulability of robotic mechanisms," *Int'l J. Robotics Research*, vol. 4, no. 2, pp. 3-9, 1985.

[3] J.-O. Kim and P. K. Khosla, "Dexterity Measures for design and control of manipulators," *Proc. of IEEE/RSJ Int'l Conf. on Intelligent Robotics and Systems, IROS'91*, pp. 758-763, 1991.

[4] R. L. Williams II, "Local performance optimization for a class of redundant eight-degree-of-freedom manipulators," *Proc. IEEE Int'l Conf. on Robotics and Automation, ICRA'94*, pp. 992-997, 1994.

[5] R. L. Williams II, "Kinematic equations for control of the redundant eight-degree-of-freedom advanced research manipulator II," *Technical memorandum, NASA, TM-4377*, 1992.

[6] Y. Nakamura, *Advanced Robotics, Redundancy and Optimization*, Addison Wesley, 1991.

[7] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag, 1995.

[8] D. R. Chand and S. S. Kapur, "An algorithm for convex polytopes," *Journal of Association for Computing Machinery*, vol. 17, no. 1, pp. 78-86, 1970.

[9] K. L. Doty, C. Melchiorri, E. M. Schwartz, and Claudio Bonivento, "Robot manipulability," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 11, no. 3, June, 1995.

[10] J. Lee, "Optimal configuration control for redundant robot manipulators," *Proc. Int'l Conf. on Automation, Robotics, Control, and Vision*, Singapore, Dec. 1996.

[11] R. V. Benson, *Euclidean geometry and convexity*, Mcgraw-Hill Book Company, pp. 188-192, 1966.

[12] S. L. Chiu, "Task compatibility of manipulator postures," *Int'l J. Robotics Research*, vol. 7, no. 5, pp. 13-21, 1988.

[13] T. Kokkinis and B. Paden, "Kinetostatic performance limits of cooperating manipulators using force-velocity polytopes," in *ASME Winter Annu Meet. - Robot. Res.*, pp. 151-156, 1989.

[14] C. Melchiorri, "Comment on 'Global task space manipulability ellipsoids for multiple armed systems' and further consideration," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 2, pp. 232-235, 1993.

[15] S. McGhee and et al., "Probability-based weighting of performance criteria for a redundant manipulator," *Proc. of IEEE Int'l Conf. on Robotics and Automation, ICRA'94*, pp. 1887-1894, 1994.

참고문헌

[1] T. Yoshikawa, "Analysis and control of robot manipulators with redundancy," *Robotics Research, The First International Symposium*, The MIT

부록

다면체 형성 알고리즘

단계 1 : (20)에서 단위화된 각 관절 속도의 최소, 최대 값 즉, -1, +1 을 조합하여 작업 속도 공간에서의 꼭지 점을 생성한다. 로봇의 자유도가 n인 경우 꼭지점의 수는

2"이 된다.

**단계 2 :** 꼭지점 중에서 원점으로부터 거리(norm)가 최대한 꼭지점을 다면체의 초기 원시 꼭지점으로 한다.

**단계 3 :** 초기 원시 꼭지점을 시작점으로 하고 다른 꼭지점을 끝점으로 하는 벡터들을 생성 시킨다. 이 벡터들 중에서 한 벡터를 기준벡터로 할 때 이 벡터와 사이 각이 가장 큰 벡터를 택하면 벡터의 끝점은 원시 꼭지점이 되고 이 벡터는 3차원 공간의 단위 다각뿔 하부 평면의 모서리 벡터가 된다. 이를 초기 모서리 벡터라 하자.

**단계 4 :** 초기 모서리 벡터의 두 원시 꼭지점과 이 벡터의 일직선상에 있지 않은 다른 한 꼭지점을 선택하여 평면들을 생성시킨다. 이 평면들 중에서 한 평면을 기준으로 할 때 이 평면과 사이 각이 가장 큰 평면을 택하면 이 평면은 단위 다각뿔의 하부 평면을 이루게 된다.

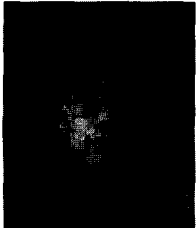
**단계 5 :** 위에서 생성된 3차원 상의 단위 다각뿔 하부 평면의 방정식에 다른 꼭지점들을 대입하여 하부 평면상에 있는 꼭지점들을 찾아낸다.

**단계 6 :** 평면상에 있는 점들 중에서 단위 다각뿔을 이루는 원시 꼭지점을 찾기 위해 초기모서리 벡터와 이 벡터의 끝점을 시작점으로 하고 하부 평면상의 점들을 끝점으로 하는 벡터들 중에서 사이 각이 가장 작은 벡터는 단위 다각뿔 하부 평면의 모서리 벡터가 된다. 새로 생성된 모서리 벡터를 초기 모서리 벡터로 생각하여 이와 같은 방법을 모서리 벡터의 끝점이 초기 원시 꼭지점이 될 때까지 한다.

**단계 7 :** 이전 평면의 각 모서리를 초기 모서리로 하는 단위 다각뿔 중에서 이전 평면과 내부 사이 각이 최대인 단위 다각뿔을 찾은 다음, 단계 5와 단계 6을 수행하여 평면을 구한다.

**단계 8 :** 생성된 새로운 평면의 모서리 중에서 이전의 평면과 공유하지 않는 모서리를 찾는다.

**단계 9 :** 두 평면이 공유하지 않는 모서리를 초기 모서리로 하는 평면을 단계 7을 수행하여 구한다. 이때 공유하지 않는 모서리가 없으면 다면체는 완성된 것이다.



#### 이 영 일

1973년 3월 16일생. 1996년 충남대학교 메카트로닉스 공학과 학사. 1996년~현재 동대학원 항공우주 및 메카트로닉스 공학과 석사과정. 주관심분야는 여유 자유도 로봇.

#### 이 지 흥

제어·자동화·시스템공학회 논문지 제 3권 제 5호 참조.