

# 새로운 다단계 복소 활성화 함수를 이용한 신경회로망에 의한 M-ary QAM 신호의 적응 등화

## (Neural Adaptive Equalization of M-ary QAM Signals Using a New Activation Function with a Multi-Saturated Output Region)

劉哲雨 \* , 洪大植 \*

(Cheol Woo You and Dae Sik Hong)

### 요 약

디지털 통신 시스템의 경우, 대역 제한된 채널 특성에 의한 인접 신호 간섭을 제거하기 위하여 적응 등화 기법이 널리 이용된다. 유용한 적응 등화 기법 중에서, 비선형성과 구현의 용이함 때문에 채널 왜곡을 효율적으로 해결할 수 있는 신경회로망이 기존 시스템의 대안으로 많이 제안되어 왔다. 그러나, 개발된 복소 신경회로망 학습 알고리즘이나 복소 활성화 함수 등의 부족으로 인하여, 응용의 대부분이 실수 채널 모델과  $\{-1, 1\}$  신호등으로 제한되어 왔다. 이 논문에서는, 적절한 복소 활성화 함수가 지녀야 할 중요한 특성들에 대하여 논의한 후, 어떤 임의의 M-ary QAM 신호도 다룰 수 있는 새로운 복소 활성화 함수를 제안한다. 그리고, 제안한 복소 활성화 함수의 비선형 변환을 겪은 후, 함수 입력의 실수부와 허수부가 결합 가우스 분포를 가질 경우, 그들의 상관 계수값이 감소함을 증명한다. 또한, 제안한 복소 활성화 함수를 채택한 복소 다층 퍼셉트론을 이용하여 M-ary QAM 신호를 위한 비선형 적응 등화기를 제안하고, 간단한 실험을 통해 제안한 시스템의 효율성을 보인다. 기존의 LMS 등화기와 비교할 때, 제안된 시스템은 채널 왜곡이 비선형일 경우 BER 상에 있어서 더욱 두드러진 성능 향상을 보인다.

### Abstract

For decreasing intersymbol interference (ISI) due to band-limited channels in digital communication, the uses of equalization techniques are necessary. Among the useful adaptive equalization techniques, because of their ease of implementation and nonlinear capabilities, the neural networks have been used as an alternative for effectively dealing with the channel distortion. In this paper, a complex-valued multilayer perceptron is proposed as a nonlinear adaptive equalizer. After the important properties that a suitable complex-valued activation function must possess are discussed, a new complex-valued activation function is developed for the proposed schemes to deal with M-ary QAM signals of any constellation sizes. It has been further proven that by the nonlinear transformation of the proposed function, the correlation coefficient between the real and imaginary parts of input data decreases when they are jointly Gaussian random variables. Lastly, the effectiveness of the proposed scheme is demonstrated by simulations. The proposed scheme provides, compared with the linear equalizer using the least mean squares (LMS) algorithm, an interesting improvement concerning Bit Error Rate (BER) when channel distortions are nonlinear.

\* 正會員, 延世大學校 電子工學科  
(Dept. of Electronic Eng. Yonsei University)

이루어 졌음(과제 번호: 01-E-0840).

接受日字: 1997年8月30日, 수정완료일: 1998年1月3日

※ 이 연구는 96년도 학술진흥재단의 연구비 지원하에

## I. 서론

통신 채널의 인접 신호 간섭(intersymbol interference; ISI)은 주파수 대역의 효율적인 이용과 성능 향상에 장애가 되는 주된 제한 요소이다. 그래서, 채널 상의 ISI와 잡음에 의하여 왜곡된 전송 신호를 복원하기 위해 적응 등화기의 이용이 필요하다. 적응 등화를 위하여 LMS (least mean squares) 알고리즘이나 RLS (recursive least squares) 알고리즘 등과 같은 많은 적응 알고리즘이 개발되어 왔다. 그러나, 이와 같이 출력이 입력들의 선형 함수인 선형 적응 등화 알고리즘의 이용은 때때로 성공적이지 못하다. 그 결과, 비선형 적응 등화 기법이 요구되었고, 또한 많은 기법들이 개발되고 있다.

신경회로망(neural networks)은 임의의 비선형 입력 출력 사상을 근사화 할 수 있는 시스템이다. 이미 이루어진 많은 연구는 신경회로망의 뛰어난 사상 능력을 포함하여 많은 장점을 보여 주고 있다<sup>[1-6]</sup>. 최근, 여러 저자들이 간단한 FIR 채널 모델이나 비선형 위성 채널을 위한 적응 등화기로서 신경회로망을 효율적으로 활용하였다<sup>[7-11]</sup>. 이와 같이 적응 등화 기법에 기존의 선형 여파기 대신 적용된 신경회로망이 두드러진 성능 향상을 얻고 있음에도 불구하고 신경회로망의 등화 기법에 대한 응용은 실수 채널 모델과 이진 신호  $\{-1, 1\}$ , 또는  $\{-1, 0, 1\}$ 의 값을 가지는 신호등에 한정되어 왔다. 이는 복소 신호를 위한 신경회로망 학습 알고리즘이나 복소 활성화 함수(complex-valued activation function) 개발의 어려움이 주된 이유이다. 그러므로, 디지털 통신 시스템에서 널리 쓰이는 복소 채널 모델이나, 대역 효율이 뛰어난 복소 신호인 M-ary QAM (quadrature amplitude-modulation) 신호와 같은 고차원 성상도(constellation)를 가진 신호를 다룰 수 있는 복소 신경회로망 등화기 및 복소 활성화 함수의 개발이 매우 절실히 요구된다.

일부 저자들은 이미 복소 신경회로망의 유용성에 대하여 인지하였다. 복소 역전파 알고리즘(complex backpropagation algorithm)은 이미 여러 저자들의 해 독립적으로 개발되었다<sup>[12-14, 15]</sup>. 또한, 복소 재귀 신경회로망을 위한 학습 알고리즘도 제시되었다<sup>[16]</sup>. 그러나, 그들의 논문에서는 임의의 크기의 성상도를 가진 신호를 다룰 수 있는 복소 활성화 함수에 대한 언급이 없었다. Chang 등은 그들의 논문 [17]에서 복

소 QAM 신호를 다룰 수 있는 신경회로망 등화기를 제안하였다. 그러나, 그들은 하나의 복소 신경회로망이 아닌 두 개의 실수 신경회로망을 이용하였으며, 또한 QAM 신호를 위하여 이진 신호 표시법을 사용하였다. 그 결과, 신호 성상도가 커짐에 따라 신경회로망의 복잡도 역시 증가하여야 했다.

이 논문에서는, M-ary QAM 신호와 같은 임의의 다단계 출력값을 가지는 이차원 복소 신호를 다룰 수 있는 다포화 출력 영역(multi-saturated output region)을 가진 복소 활성화 함수를 제안한다. 그리고, 제안한 복소 활성화 함수의 특성을 입력간의 상관 계수 관점에서 분석한다. 또한, 제안한 복소 활성화 함수의 응용으로써 M-ary QAM 신호를 위한 복소 신경회로망 등화기를 제안한다. 제안한 시스템은 기존의 선형 FIR(finite-duration impulse response) 여파기 구조 대신, 일반화된 FIR 여파기라고 할 수 있는 복소 다층 퍼셉트론(complex-valued multilayer perceptron)을 이용한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2 장에서는 복소 신경회로망 사용의 필요성과 복소 역전파 알고리즘 등에 대하여 논의한다. 제 3 장에서는 적절한 복소 활성화 함수가 가져야 할 중요한 특성에 대하여 논의한 후, 새로운 복소 활성화 함수를 제안한다. 그리고, 제안한 활성화 함수의 비선형 특성을 이해하기 위하여 함수의 입력 출력간의 상관 계수의 변화가 유도된다. 제 4 장에서는 제 3 장에서 제안한 복소 활성화 함수를 이용하여 M-ary QAM 신호를 위한 비선형 신경망 적응 등화기를 구성하고, 제안한 신경망 적응 등화기의 효율성을 확인할 수 있는 간단한 실험 결과가 선형 및 비선형 채널하에서 기존 선형 LMS 등화기와 비교하여 주어진다. 끝으로 제 6 장은 결론이다.

## II. 복소 신경회로망과 복소 역전파 알고리즘

### 1. 복소 신경회로망

신경회로망은, 임의의 비선형 함수를 학습하고 근사화 할 수 있는 사상 능력, 결함에 대한 내약력(fault tolerance), 적응 신호 처리에 적합한 구조등과 같은 여러 가지 장점 때문에, 비선형 왜곡과 같은 기존의 선형 적응 여파기들이 다루기 힘든 신호 처리 관련 문제를 해결하기 위하여 사용되어 좋은 연구 결과를 얻

고 있다<sup>[1-6, 18-20]</sup>. 그러나 앞에서 언급한 것처럼 응용 범위를 넓히기 위해선, 디지털 통신 시스템에서 널리 이용되는 복소 채널 모델과 복소 신호를 다룰 수 있는 복소 신경회로망 학습 알고리즘 및 복소 활성화 함수에 대한 연구의 필요성이 계속 제기되어 왔다.

한편, 신경회로망은 신호의 재귀 여부에 따라 재귀 신호가 없는 신경회로망(feedforward neural network; FNN)과 재귀 신경회로망(recurrent neural network; RNN)으로 나뉜다. FNN은 일반화된 비선형 FIR 여파기이고, RNN은 일반화된 비선형 IIR 여파기이다. IIR 여파기는 적절히 고안되지 않는다면, 역전과 (feedback) 성분에 의해서 여파기가 진동(oscillation)하여 안정적이지 않게 된다. 이런 종류의 동작은 안정성이 중요시 되는 적응 여파와 같은 응용에서는 명확히 부정적이다<sup>[18]</sup>. 그러므로, 이 논문에서는 FNN의 대표적 예인 복소 다층 퍼셉트론을 선택하여 사용한다.

복소 다층 퍼셉트론은 동일한 여러 개의 복소값 처리 소자(complex-valued processing elements; CPE)들로 구성된 하나 이상의 층(layer)으로 구성되며, 각 CPE들은 한 층에서 다른 층으로 입력 데이터의 정보를 저장하는 매개체인 가중치(weight)에 의해 연결되어 있다. 하나의 은닉층을 가진 복소 다층 퍼셉트론의 예가 그림 1에 나타나 있다. 이때 각 CPE는 그림 2에 나타난 것처럼 복소 신호를 위한 비선형 활성화 함수를 가진 적응 선형 컴바이너(combiner)이다. 여기서  $X$  와  $W$  는 다음과 같이 정의되는 복소 벡터이다.

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$$

$$= [x_{1,R}, \dots, x_{N,R}]^T + j[x_{1,I}, \dots, x_{N,I}]^T \quad (1)$$

$$W = [W_1, W_2, \dots, W_N]^T$$

$$= [w_{1,R}, \dots, w_{N,R}]^T + j[w_{1,I}, \dots, w_{N,I}]^T, \quad (2)$$

그리고,  $O$  는 다음식에 의해 정의되는 복소 출력값이다.

$$O = o_R + jo_I$$

$$= F(X^T W)$$

$$= f_R(\{X^T W\}_R) + jf_I(\{X^T W\}_I) \quad (3)$$

식 (3)에서,  $R$ 과  $I$ 는 각각 실수부와 허수부를 뜻하고, 식 (4)에 나타난 것처럼,  $F(\cdot)$ 는 어떤 임의의 복소

활성 함수를, 그리고  $f_R$  or  $f_I(\cdot)$ 는 임의의 실수 함수를 의미한다.

$$F(X) = f_R(X_R) + jf_I(X_I) \quad (4)$$

이와 같은 복소 다층 퍼셉트론을 학습시킬 경우, 두 개의 요소, 즉 크기와 위상을 가진 복소 데이터는 다음의 두 가지 방법으로 다룰 수 있다.

- 1) 신경회로망의 가중치들이 실수 역전파 알고리즘에 따라 실수부와 허수부가 따로 갱신된다.
- 2) 신경회로망의 가중치들이 복소수 값을 가지고 복소 역전파 알고리즘에 의해 동시에 갱신된다.

사실, 위의 두 가지 접근 방식은 동일한 결과를 가져올 수 있다. 그러나, 일반적으로 하나의 복소 다층 퍼셉트론이 두 개의 실수 다층 퍼셉트론 보다 더욱 효율적인 구조이다. 이와 같은 결과는 이미 많은 연구자들이 예상했거나 증명하였다<sup>[8, 14, 21]</sup>. 또한, Horowitz와 Senne는 복소 LMS 알고리즘이 실수 LMS 알고리즘보다 더욱 안정적이며, 평균 지승 오차의 수렴 속도가 거의 두 배 빠르다는 것을 증명하였다<sup>[28]</sup>.

## 2. 복소 역전파 알고리즘

복소 역전파 알고리즘은 이미 많은 연구가들에 의해 제안되었다<sup>[12-15]</sup>. 그러므로 여기서는 입력 노드가  $N$  개,  $L$ 개의 뉴런을 가진 하나의 은닉층, 그리고 하나의 출력 뉴런을 가진 복소 다층 퍼셉트론이 식 (4)에 의해 정의된 복소 활성화 함수를 사용할 경우에 대하여 간단히 기술하기로 한다.

$X_p$ 를 복소 다층 퍼셉트론의 복소 입력 벡터라고 하고,  $O_p$ 를 복소 출력값이라고 하면, 출력 뉴런의 오차는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta_p = \delta_{p,R} + j\delta_{p,I}$$

$$= \hat{O}_p - O_p \quad (5)$$

식 (5)의  $\hat{O}_p$ 는 판정이 내려진 심벌이고,  $O_p = F^o(NEI_p^o)$ 이다. 은닉층의 한 뉴런에 대한 총입력값(net-input value)은 다음 식에 의해 정의된다.

$$NEI_{ni}^h = \sum_{i=1}^N W_{ni}^h X_i + \theta_i^h$$

$$= net_{ni,R}^h + jnet_{ni,I}^h \quad (6)$$

식 (6)에서  $W_{ni}^h$ 는  $i$ 번째 입력 노드에서  $j$ 번째 은닉 뉴

런으로의 연결에 해당하는 복소 가중치이고,  $\theta_j^o$ 는 바이어스 항이며, 위 첨자  $h$ 는 은닉층을 의미한다.

출력 뉴런에 대한 총입력값(net-input value)은 다음과 같이 표현된다.

$$NET_p^o = \sum_{j=1}^L W_j^o I_{pj} + \theta^o \quad (7)$$

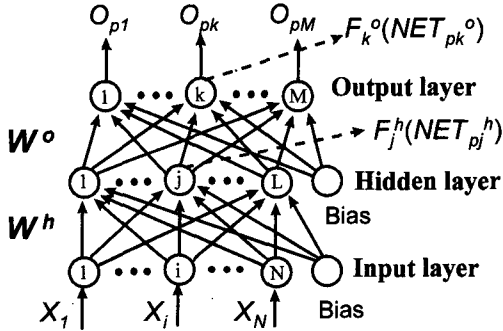


그림 1. 하나의 은닉층을 가진 복소 다층 퍼셉트론  
Fig. 1. A complex-valued multilayer perceptron with a single hidden layer.

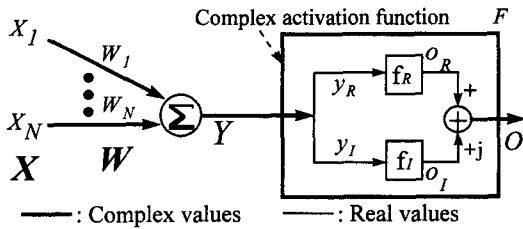


그림 2. 복소값 신호를 위한 처리 소자  
Fig. 2. A complex-valued processing element (CPE).

표 1. 복소 역전파 알고리즘의 가중치 학습식

Table 1. The complex backpropagation algorithm.

은닉층 가중치 학습식	$\begin{cases} W_j^o(p+1) = W_j^o(p) + \eta \delta_p^o I_{pj}^* \\ \delta_p^o = f_R^o(\text{net}_{pj}^o) \delta_{pj}^o + j f_I^o(\text{net}_{pj}^o) \delta_{pj}^o \end{cases} \quad (8)$
출력층 가중치 학습식	$\begin{cases} W_{ji}^o(p+1) = W_{ji}^o(p) + \eta \delta_p^o X_{ji}^* \\ \delta_{pj}^o = f_R^o(\text{net}_{pj}^o) \text{Re}\{W_{pj}^o\} + j f_I^o(\text{net}_{pj}^o) \text{Im}\{W_{pj}^o\} \end{cases} \quad (9)$

식 (7)의  $W_j^o$ 는  $j$ 번째 은닉 뉴런에서 출력 뉴런으로의 연결에 해당하는 복소 가중치이고, 위 첨자  $o$ 는 출력층을 의미하며,  $I_{pj} = F_j^h(NEP_{pj}^h)$ 이다. 이상의 식들을 바탕으로 복소 역전파 알고리즘을 정리하면 표 1과 같

다. 여기서 \*는 켈레 복소수를 의미한다.

### III. 복소 활성화 함수

1. 적절한 복소 활성화 함수가 가져야 할 특성

실수 영역이 복소수 영역으로 확장될 때 적절한 복소 활성화 함수  $F(Z)$ 가 지나야 할 일련의 성질 때문에 활성화 함수의 선택과 관련된 많은 문제가 존재한다. 어떤 복소 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$F(Z) = f_R(z_R, z_I) + j f_I(z_R, z_I) \quad (10)$$

Georgiou와 Koutsougeras는 적절한 복소 활성화 함수  $F(Z)$ 가 지나야 할 다섯 가지 특질들을 제안하였다 [부록 I].

$F(Z)$ 가 선형이면 복소 다층 퍼셉트론을 사용하는 이득이 없기 때문에 P1은 타당하다. Liouville<sup>[22]</sup>의 이론을 근거로, P2가 필수적이라면 상수 함수는 적절치 못하므로 P3도 사실이다. 그러나, P2와 P3는,  $F(Z)$ 가 어떤 열린 집합(open set)  $S$  내에서 해석적(analytic)이라는 조건하에서 복소 활성화 함수가 가져야 할 적절한 특질이다<sup>[22]</sup>. 그렇지만, 자연 과학 및 공학에서 직면하는 대부분의 함수는 해석적이지 못하다. 그러므로, 적절한 특질을 가지는 해석적 복소 활성화 함수를 찾기는 힘들다. 그러나, 여파기 디자인을 최적화하기 위하여 찾아야 하는 것은 비용 함수(cost function)의 도함수가 아니라 경사도(gradient)이므로, 복소 활성화 함수가 반드시 해석적일 필요는 없다. 그러므로, 수정된 조건을 다음과 같이 제안한다.

**제안:** 만일 비용 함수가 실수값을 가지는 스칼라 (scalar) 함수라면, 적절한 복소 활성화 함수  $F(Z)$ 는 반드시 다음의 일차 편미분을 가져야 한다.

$$\frac{\partial f_R(z_R, z_I)}{\partial z_R}, \frac{\partial f_R(z_R, z_I)}{\partial z_I}, \frac{\partial f_I(z_R, z_I)}{\partial z_R}, \frac{\partial f_I(z_R, z_I)}{\partial z_I}. \quad (11)$$

**제안**의 증명은 다음의 **정의**와 **정리1**, 그리고 사슬 규칙(chain rule)에 의해 바로 유도된다.

**정의1** [23]: 계수 가중치 벡터가  $\nabla J$ 의  $k$ 번째 요소는 식 (12)에 의해 표현된다.  $W$ 인 어떤 선형 횡단(transversal) 여파기의 오차 성능 표면(error-performance surface)을 정의하는 실수 비용 함수  $J$ 에 대하여,

$$\nabla_k J = \frac{\partial J}{\partial w_{k,R}} + j \frac{\partial J}{\partial w_{k,I}}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

식 (12)의  $w_{k,R}$ 과  $w_{k,I}$ 는 벡터  $W$ 의  $k$ 번째 요소인  $W_k$ 의 실수 및 허수부를 나타낸다.

**정리1** [22]:  $f(P)=f(x, y, z)$ 를 연속적인 일차 편미분을 가진 임의의 스칼라 함수라고 하자. 이때,  $grad f$ 는 존재하며, 그것의 길이와 방향은 공간에서 직교 좌표(cartesian coordinates)의 특별한 선택에 대하여 독립적이다. 어떤 임의의 점  $P$ 에서  $grad f$ 는 영 벡터가 아니라면 점  $P$ 에서 함수  $f$ 의 최대 증가 방향을 가진다.

한편, 식 (12)에 주어진 정의가 사실이기 위해서는  $J$ 가 반드시 실수값이어야 한다는 점에 주목하여야 한다.

**제안1의 계**: 어떤 복소수의 절대값에 의해 정의된 함수이지만 비해석적인 비용 함수  $J$ 에 대하여, 복소 활성 함수  $F(Z)$ 가 식 (11)에 정의되어 있는 연속적인 일차 편미분을 가지기만 한다면,  $grad J$ 가 찾아진다.

위의 계에 의하여, 어떤 비용 함수  $J$ 가 예측 오차 (estimation error)의 절대값에 의해 정의되고 복소 다층 퍼셉트론의 복소 활성 함수가 연속적인 일차 편미분을 가진다면,  $grad J$ 가 찾아질 수 있다는 사실을 알 수 있다.

한편, 복소 다층 퍼셉트론의 가중치가 편미분에 비례하여 갱신되므로, 식 (11)의 편미분들이 가질 수 있는 값은 경계가 있어야 한다. 그러므로, P4도 역시 사실이다. 그러나, 채널 등화와 같은 특별한 응용 분야에서 유용할 다음의 특성들 C1-C3를 만족하면서 경계 (bound)를 가진 복소 활성 함수를 개발하는 일은 매우 어렵기 때문에, P2는 엄격(tight)한 조건이다.

- C1.  $f_R(\cdot)$ 와  $f_I(\cdot)$ 는 동일한 출력 영역을 가져야 한다. 통신 시스템의 왜곡되지 않은 복소 신호들은 대부분 실수 및 허수축에 대하여 동일한 분포를 가진다.
- C2.  $f_R(\cdot)$ 와  $f_I(\cdot)$ 는 실수 및 허수축에 대하여 대칭적이어야 한다. 통신 시스템에서 대부분, 왜곡되지 않은 복소 신호들의 실수부 및 허수부는 실수 및 허수축에 대하여 대칭적으로 분포되어 있다.
- C3.  $f_R(\cdot)$ 와  $f_I(\cdot)$ 의 출력 영역은 응용에서 사용되는 신호값들에 따라 포화(saturation)되는

것이 바람직하다. 유사하게, 양극 신호가 이용될 때, S자 형태의 포화 특성을 가지는 실수 시그모이드(sigmoid) 함수가 가장 널리 이용된다. 포화 특성은 신경회로망을 잡음에 강하게 해준다.

만일  $f_R(\cdot)$ 와  $f_I(\cdot)$ 의 출력 특성이 동일하지 않다면, 신경회로망의 가중치는 신호의 실수부나 허수부 중 어느 한쪽으로 편중된 학습을 겪게 될 것이다. 그리고, 활성 함수의 실질적인 구현시에 특이점(singular point)은 피해야 하므로, 다음과 같이 완화된 조건을 제안한다.

**제안2**: 어떤 경계를 가진 집합(bounded set)  $S$  내의 모든 복소수  $Z$ 에 대하여, 어떤 적절한 복소 활성 함수  $F(Z)$ 는 특이성(singularities), 특별히 극점(pole)을 가지지 말아야 하며 동시에 경계를 가져야 한다.

위의 제안은  $F(Z)$ 를 사용하는 시스템이 BIBO (bounded-input bounded-output) 관점에서 안정적이라는 사실을 의미한다. 여기서, 특이성의 모든 주변은 반드시 그 함수가 해석적인 어떤 한점을 가져야 하기 때문에, 열린 집합  $S$  안에서 해석적이지 못한  $F(Z)$ 가 특이성을 가지지 않는다는 것을 뜻함을 주목하여야 한다. 그 결과, 무엇보다도 함수  $F(Z)$ 는 적절한 복소 활성 함수가 되기 위하여 반드시  $S$  내의 모든 점들에서 연속적이어야 한다.

한편, P5도 다음의 제안에서 나타났듯이 예외가 있으므로 엄격한 조건이라고 할 수 있다.

**제안3**: 만일  $(\partial f_R / \partial z_R)(\partial f_I / \partial z_I) = (\partial f_I / \partial z_R)(\partial f_R / \partial z_I)$  이라면,  $F(Z)$ 는 다음의 식 (13)과 (14)의 경우들을 제외하면 적절한 복소 활성 함수가 될 수 없다.

$$\frac{\partial f_R}{\partial z_R} \delta_{pk,R} + \frac{\partial f_I}{\partial z_R} \delta_{pk,I} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial f_R}{\partial z_I} \delta_{pk,R} + \frac{\partial f_I}{\partial z_I} \delta_{pk,I} = 0. \quad (14)$$

증명:  $X_i \neq (0, 0)$ 와 예측 오차  $\delta_{pk} \neq (0, 0)$ 를 가정한다. 원래의 논문 [13]에서 행해진 증명을 바탕으로, 다음의 식들이 동시에 성립하지 않을 경우 가중치 갱신은 일어나지 않는다.

$$\frac{\partial f_R}{\partial z_R} \sigma_{pk,R} + \frac{\partial f_I}{\partial z_R} \sigma_{pk,I} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_R}{\partial z_i} \sigma_{pk,R} + \frac{\partial f_I}{\partial z_i} \sigma_{pk,I} = 0 \quad (16)$$

그러나,  $(\partial f_R / \partial z_R)(\partial f_I / \partial z_I) = (\partial f_I / \partial z_R)(\partial f_R / \partial z_I)$  일 때 구할 수 있다. 지라도, dpk의 실수부 또는 허수부 중 어느 한쪽에 대하여 가중치 갱신이 일어난다. 즉, 식 (13)과 (14)의 경우에는 가중치 갱신이 일어난다. 그 외의 경우에는, 식 (15)와 (16)의 의미가 있는 해는 오직 계수 행렬이 영일 때, 즉 식 (15)와 (16) 중의 어느 하나만 사실이 아니라면, 비록 이상의 토의를 근거로, 적절한 복소 활성 함수  $F(Z)$ 는 다음의 조건을 만족시켜야 할 것이다.

**F1.**  $F(Z)$ 는  $z_R$ 와  $z_I$ 에 대하여 비선형이어야 한다.

**F2.** 시스템의 안정성을 위하여,  $F(Z)$ 는 경계 (bound)를 가진 집합 S내의 모든 복소수 Z에 대하여 특이성을 가지지 말아야 하며, 또한 경계를 가져야 한다. 만일  $F(Z)$ 가 비해석적이라면, 무엇보다도 우선  $F(Z)$ 는 S내의 모든 Z에 대하여 연속적이어야 한다.

**F3.**  $F(Z)$ 는 연속적이며 경계를 가진 식 (11)의 일차 편미분을 가져야 한다.

**F4.**  $(\partial f_R / \partial z_R)(\partial f_I / \partial z_I) \neq (\partial f_I / \partial z_R)(\partial f_R / \partial z_I)$ . 그렇지 않다면, 식 (13)과 (14) 중 적어도 어느 하나가 만족되어야 한다.

2. 새로운 복소 활성 함수

일반적으로 활성 함수는 기존의 선형 시스템과 신경 회로망을 구분해주는 비선형성 때문에 매우 중요하다<sup>[6]</sup>. 이들 함수의 선택은 출력값을 어떻게 표현하고자 하느냐에 의존한다. 실험에서 사용할 QAM 신호는 크기와 위상을 가진 이차원 신호이다. 이차원 양극 (bipolar) 신호를 위한 복소 활성 함수는 여러 저지들에 의해 개발되었으나, 그들의 함수는 다양한 크기와 위상을 가진 M-ary QAM 신호에는 사용하기 힘들다 [12-14, 24].

이제 새로운 복소 활성 함수를 다음과 같이 제안한다.

$$F(Z) = f(z_R) + jf(z_I) \quad (17)$$

식 (17)에서  $f(\cdot)$ 는 다음식에 의하여 정의되는 실수 함수이다.

$$f(x) = x + \alpha \sin(\pi x) \quad (18)$$

식 (18)에서 비선형성의 정도를 결정하는 경사 변수  $\alpha$ 는 임의의 실수 상수이다. 비록 비해석적일지라도, 제안된 함수  $F(Z)$ 는 위에서 제시된 특질 F1-F4뿐만 아니라, 유용한 특성인 C1-C3도 만족시킨다. 또한 제안한 함수는 임의의 성장도를 가진 QAM신호를 다룰 수 있다. 만일  $\alpha=0$ 이라면,  $F(Z)$ 는 선형 함수가 된다. 그림 3은  $\alpha$ 를 변화시킬 경우의  $f(\cdot)$ 의 비선형성을 보여준다. 선형 여파기의 경우처럼, 불필요한 함수의 양쪽 끝을 제거한 후, 우리에게 관심있는 영역만 구현하면 된다. 이 함수의 출력이 보이고 있는 다포화 (multi-saturation) 특성은 신호 크기가 불연속적인 M-ary QAM 신호에 적합하다. 또한, S자 형태의 포화 특성은 큰  $\Delta x$ 에  $\Delta y$ 가 작기 때문에 신경회로망을 잡음에 강하게 해준다. 이 함수의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = 1 + \alpha \pi \cos(\pi x) \quad (19)$$

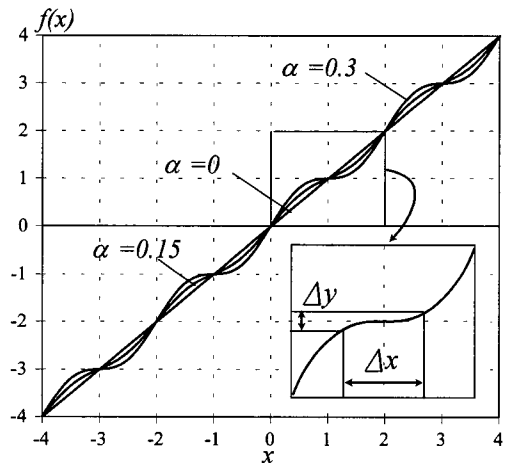


그림 3.  $f(x)$ 의 입출력 특성  
Fig. 3. Input-output characteristic of  $f(x)$ .

그림 4 처럼,  $f(\cdot)$ 는 모든 점에서 미분가능하며, 그것의 도함수는  $1 - \pi \alpha < f'(x) < 1 + \pi \alpha$  내로 경계를 가진다. 그 결과,  $F(Z)$ 는 F1-F3를 만족시킨다. F4를 만족시키기 위하여  $f(x)$ 는 모든  $x$ 에 대하여 영이 아니어야 한다. 즉 다음의 부등식이 만족 되어야 한다.

$$f'(x) = 1 + \alpha \pi \cos(\pi x) > 0 \quad \text{for all } x \quad (20)$$

$$0 < \alpha < 1/\pi \approx 0.318 \quad (21)$$

위의 조건하에, 예측 오차는 영이 아니며, 가중치 갱신이 보장된다.

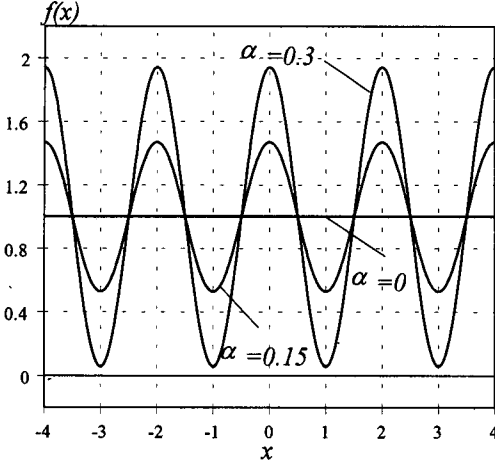


그림 4.  $f(x)$ 의 도함수  
Fig. 4. The derivative of  $f(x)$ .

사실, 제단식 단조 증가 곡선의 더욱 일반적인 형태는 무한개의 시그모이드 함수들의 합으로 구현될 수 있다. 그러나, 얻어진 함수는 지나치게 복잡하다.

### 3. 제안된 복소 활성 함수의 상관에 관한 비선형 영향

제안한 활성 함수는  $\sin(\cdot)$ 에 의하여 야기된 비선형성을 가지고 있다. 제안한 함수의 비선형성을 이해하기 위하여, 특별히 제안한 활성 함수의 입력과 출력 사이의 상관(correlation) 관계의 변화를 살펴본다.

이를 위하여, 그림 2에 나타나 있는 CPE를 고려한다. 이 CPE가  $N$ 개의 입력 노드를 가지고 있고, 제안된 복소 활성 함수를 사용한다고 하자. 제 2 장에서 언급한 것처럼, CPE는 두 개의 실수 PE로 볼 수 있다. 즉,

$$y_R = [ X_{R^T} \mid X_{I^T} ] \begin{bmatrix} -\frac{W_R}{W_I} \\ -\frac{W_I}{W_I} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$y_I = [ X_{R^T} \mid X_{I^T} ] \begin{bmatrix} \frac{W_R}{W_I} \\ -\frac{W_I}{W_I} \end{bmatrix} \quad (23)$$

위의 식 (22)와 (23)은 식 (18)에 의하여 정의된 실수 함수  $f(\cdot)$ 에 의하여 비선형적 변환을 겪는다.

중앙 극한 이론(the central limit theorem)에 의

하여, 가중치가 곱해진 후의 합  $y_R$  와  $y_I$ 는, 입력들이나 가중치들이 무작위로 값을 가지게 된다면 근사적으로 결합 가우스(jointly Gaussian) 변수가 된다<sup>[25]</sup>. 평균이  $m_R$ 과  $m_I$ 인 두 개의 결합 가우스 랜덤 변수  $y_R$  과  $y_I$ 는 다음식 비선형적 변환에 의하여  $o_R$ 과  $o_I$ 가 된다.

$$o_R = y_R + \alpha \sin(\pi y_R) \quad (24)$$

$$o_I = y_I + \alpha \sin(\pi y_I) \quad (25)$$

이때,  $y_R$ 과  $y_I$ 의 결합 확률 밀도 함수(Probability Density Function)는 다음 식과 같다

$$f(y_R, y_I) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(y_R-m_R)^2}{\sigma_{y_R}^2} - 2r\frac{(y_R-m_R)(y_I-m_I)}{\sigma_{y_R}\sigma_{y_I}} + \frac{(y_I-m_I)^2}{\sigma_{y_I}^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_{y_R}\cdot\sigma_{y_I}\sqrt{1-r^2}} \quad (26)$$

위 식에서  $r = \text{Cor}(y_R, y_I)$ 이고, 이것은  $y_R$ 과  $y_I$  사이의 상관 계수이다.

$o_R$ 과  $o_I$  사이의 상관 계수는 정의에 의하여 다음과 같다.

$$\text{Cor}(o_R, o_I) = \frac{E[o_R \cdot o_I] - E[o_R] \cdot E[o_I]}{\sigma_{o_R} \cdot \sigma_{o_I}} \quad (27)$$

이때, 부록 II에서 구해진 위의 상관 계수를 분석해 보면 다음과 같다.

**Case 1 ( $r=0$ ) :**  $r=0$ 일 때,  $y_R$ 과  $y_I$ 는 비상관 관계, 즉 상호 독립적이다. 그 결과,  $o_R$ 과  $o_I$ 도 역시 상호 독립이 되고,  $\text{Cor}(o_R, o_I)=0$ 이 될 것이다. 이 결과는 얻어진 식 (부-16)과 잘 일치한다.

**Case 2 ( $r \neq 0$  and  $\alpha=0$ ) :**  $\alpha=0$ 일 때,  $f(\cdot)$ 는 선형 함수가 된다. 그 결과, 변환 후의 상관 계수의 값은 변하지 않을 것이다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$\text{Cor}(o_R, o_I) = \text{Cor}(y_R, y_I). \quad (28)$$

예상과 같이, 이 결과는 구해진 식 (부-16)과 잘 일치한다.

**Case 3 ( $r \neq 0$  and  $\alpha \neq 0$ ) :** 이 경우에는  $y_R$ 과  $y_I$ 사이에 상관 관계가 존재하며,  $y_R$ 과  $y_I$ 는 제안된 복소 활성 함수에 의하여 비선형적 변

환을 겪게 된다. 이때,  $r$ 과  $\text{Cor}(o_R, o_I)$  사이의 비교를 위하여,  $\text{Cor}(o_R, o_I)$ 의 엄격한 분석이 어렵기 때문에 약간의 근사화가 필요하다.  $x$ 가 무한대로 갈 때  $\exp[-x]$ 는 '0'으로 접근한다는 사실과  $|r| \leq 1$ , 그리고 다음의 부등식 (29)가 성립한다는 사실을 이용하면, 식 (30)-(33)과 같은 근사화가 가능하다.

$$\begin{aligned} \sigma_{y_R}^2 + \sigma_{y_I}^2 \pm 2\sigma_{y_R}\sigma_{y_I}r &= (\sigma_{y_R} + \sigma_{y_I})^2 - 2(1 \pm r)\sigma_{y_R}\sigma_{y_I} \\ &\geq 2(1 \pm r)\sigma_{y_R}\sigma_{y_I} \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$M \approx \sigma_{y_R}\sigma_{y_I}r, \quad (30)$$

$$N \approx 0, \quad (31)$$

$$\sigma_{o_R}^2 \approx \sigma_{y_R}^2 + a^2/2, \quad (32)$$

$$\sigma_{o_I}^2 \approx \sigma_{y_I}^2 + a^2/2, \quad (33)$$

이때, 채널을 통과하여 전송되는 신호는 잡음을 가지게 되므로, 일반성의 해침 없이  $\sigma_{o_R}^2$ 와  $\sigma_{o_I}^2$ 이 '0.1'보다 충분히 크다고 가정하였다. 그 결과,  $\text{Cor}(o_R, o_I)$ 는 다음 식과 같이 근사화 된다.

$$\text{Cor}(o_R, o_I) \cong \frac{\sigma_{o_R}\sigma_{o_I} \cdot r}{\sqrt{\sigma_{y_R}^2 + a^2/2}\sqrt{\sigma_{y_I}^2 + a^2/2}}, \quad (34)$$

또한, 임의의 실수값인 양수  $a$ 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$|r| - |\text{Cor}(o_R, o_I)| = |r| \left( 1 - \frac{\sigma_{o_R}\sigma_{o_I}}{\sqrt{\sigma_{y_R}^2 + a^2/2}\sqrt{\sigma_{y_I}^2 + a^2/2}} \right) > 0 \quad (35)$$

즉,  $|\text{Cor}(o_R, o_I)|$ 는  $|r|$ 보다 더 작은 값을 가지게 된다.

고찰: 위에서 언급된 모든 경우에 근거하여,  $|\text{Cor}(o_R, o_I)|$ 는  $f(\cdot)$ 이 선형일 때 최대값  $|r|$ 을 가지고,  $f(\cdot)$ 이 비선형일 때 (즉,  $a$ 가 양수일 때) 항상  $|r|$ 보다 작은 값을 가짐을 알 수 있다. 그러므로, 제안한 복소 활성화 함수의 비선형성에 의하여, 그 함수의 출력의 실수부와 허수부가 서로 더욱 독립적으로 됨을 알 수 있다. 그리고 그 결과로써, 제안한 활성화 함수를 사용하는 복소 다층 퍼셉트론의 은닉 뉴런들 사이의 불필요한 정보(information redundancy)가 감소하리라는 추측

을 할 수 있다. 사실, 비슷한 결과가 실수 다층 퍼셉트론의 경우에서 얻어진 예가 있다. 논문 [26]에서 저자들은 실수 시그모이드 함수를 사용하는 실수 다층 퍼셉트론을 비선형 백색화 여파기(nonlinear whitening filter)의 특별한 경우로 간주하였다.

#### IV. 실험 및 고찰

이 장에서는 제안된 복소 활성화 함수가 실질적인 문제 해결 시에 잘 동작하는가를 확인하기 위하여, 제안된 복소 활성화 함수를 채택한 복소 다층 퍼셉트론을 이용하여 임의의 M-ary QAM 신호를 위한 비선형 적응 등화기를 구성한다.

실험을 위한 블럭도가 그림 5에 나타나 있다. 제안된 비선형 적응 등화기(CBPE)와 기존의 LMS 알고리즘에 의하여 학습되는 복소 선형 적응 등화기(CLMSE)와의 성능은 평균 자승 오차(mean square error)와 등화기 출력단에서의 비트 오류 확률(bit error rate)의 관점에서 비교된다. 사용된 복소 활성화 함수의 경사 변수  $a$ 는 출력층의 뉴런의 경우 0.3을, 은닉층의 뉴런들의 경우 0.1을 사용하였다. 이들 값은 복소 다층 퍼셉트론이 가지게 될 비선형성의 정도와 학습의 용이성등을 고려하여 실험을 통하여 결정되었다. 만일,  $a$ 값을 크게 잡으면 복소 다층 퍼셉트론의 비선형성이 증가하기 때문에 CBPE의 성능은 향상되나, 학습 속도가 떨어 지는 단점이 발생하게 된다.

실험에 이용된 선형 채널의 Z-변환 식은 다음과 같다.<sup>[27]</sup>

$$\begin{aligned} H(z) &= (0.0485 + j0.0194) + (0.0573 + j0.0253)z^{-1} \\ &+ (0.0786 + j0.0282)z^{-2} + (0.0874 + j0.0447)z^{-3} \\ &+ (0.9222 + j0.3031)z^{-4} + (0.1427 + j0.0349)z^{-5} \\ &+ (0.0835 + j0.0157)z^{-6} + (0.0621 + j0.0078)z^{-7} \\ &+ (0.0359 + j0.0049)z^{-8} + (0.0214 + j0.0019)z^{-9} \end{aligned} \quad (36)$$

위의 선형 채널 상에서의 CBPE와 CLMSE사이의 평균 자승 오차 비교가 그림 6에 나타나 있다. 이 그림에서 CBPE(15, 15, 1),  $h=0.0003$ 라는 지시어가 붙은 성능 곡선은 15개의 입력 노드와 15개의 은닉 뉴런, 그리고 하나의 출력 뉴런을 가진 복소 다층 퍼셉트론을 사용한 CBPE가 학습 상수 0.0003을 사용한



경우를 뜻한다. 그리고, CLMSE (15),  $m=0.0001$  라는 지시어가 붙은 성능 곡선은 15개의 입력 노드를 가진 복소 선형 여파기를 사용한 CLMSE가 학습 상수 0.0001을 사용한 경우를 뜻한다. 노드 수와 학습 상수들의 값들은 많은 실험을 통하여 결정되었다. 그림 6에서 알 수 있듯이 CBPE의 평균 자승 오차가 CLMSE의 평균 자승 오차 보다 안정된 상태에서 더욱 작은 값을 가짐을 알 수 있다.

그림 7와 그림 8은 CLMSE와 CBPE에 의해 등화가 된 후의 64-QAM 신호의 성상도를 보여주고 있다. CBPE에 의한 성상도가 CLMSE에 의한 성상도 보다 훨씬 조밀하게 모여있음을 알 수 있다. 즉, CBPE의 평균 자승 오차가 CLMSE의 평균 자승 오차 보다 더욱 작게 된다. 그리고 그 결과로써, CBPE가 잡음과 ISI에 의해 왜곡된 신호를 더욱 잘 복원할 수 있다. 이상의 결과는 16-, 32-QAM 신호의 경우에서도 동일하게 관측되었다.

CBPE의 성능상의 우월성을 더욱 잘 알 수 있기 위해서는 비선형 채널하에서 실험이 이루어져야 할 것이다. 위성 채널과 같은 비선형 채널을 모델링하기 위한 많은 방법이 제시되고 있는데, 이들 모델은 신호의 위상과 크기 상의 비선형적 왜곡 현상을 표현하기 위한 다양한 식들로 구성된다. 그러나, 비선형 채널들의 왜곡 현상을 자세히 모델링하기는 다소 복잡하기 때문에, 제안한 시스템들이 신호에 가해진 비선형적 왜곡을 어떻게 해결하는가를 알아 보고자 할 경우에는 일반적으로 간단한 고차 방정식을 이용하여 비선형적 왜곡 현상을 모델링한다. 그러므로 본 실험에서도 다음의 식 (37)의 삼차 방정식을 사용하여 앞의 실험에서 사용한 선형 채널에 비선형적 크기 왜곡을 가해 주었다<sup>[29]</sup>.

$$\tilde{r}_k = 0.5r_k + 0.3r_k^2 + 0.1r_k^3 \quad (37)$$

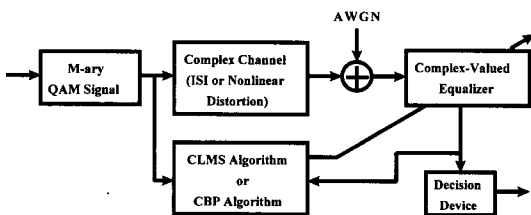


그림 5. 실험을 위한 블럭도  
Fig. 5. The block diagram for simulation.

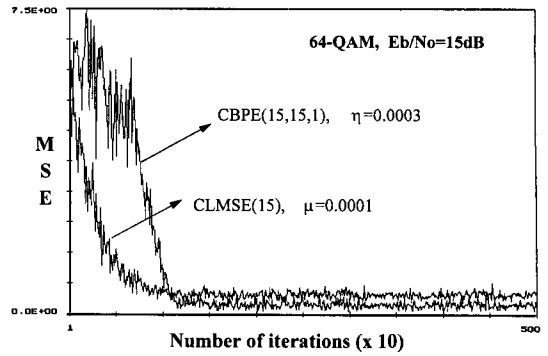


그림 6. CLMSE와 CBPE 사이의 평균 자승 오차 비교  
Fig. 6. MSE comparison between the CLMSE and the CBPE.

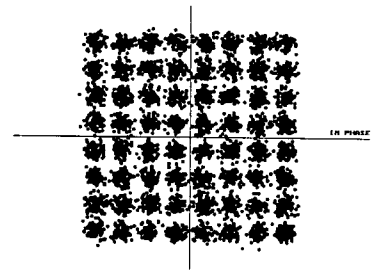


그림 7. CLMSE를 통과한 64-QAM 신호의 성상도  
Fig. 7. The constellation of the 64-QAM after the CLMSE.

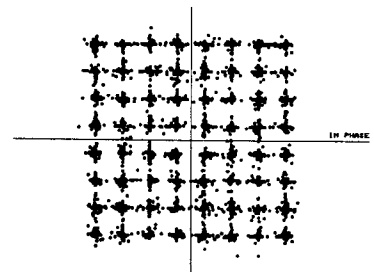


그림 8. CBPE를 통과한 64-QAM 신호의 성상도  
Fig. 8. The constellation of the 64-QAM after the CBPE.

식 (37)에서  $\tilde{r}_k$ 는 식 (36)에 의해 주어졌던 선형 채널의 출력이다. 이와 같은 비선형 채널하에서의 실험에서도 앞의 선형 채널과 마찬가지로 CBPE가 성상도 상에서 더욱 조밀하게 신호를 등화 해줌을 관측할 수 있었고, 그 결과 역시 평균 자승 오차 상에서도 더욱 작은 값을 가졌다. 그림 9에 나타난 것처럼 CBPE와 CLMSE의 평균 자승 오차 차이가 선형 채널의 경우보다 훨씬 컸음을 알 수 있다.

그림 10은 비선형 채널 왜곡이 존재할 경우의 CBPE와 CLMSE의 성능 차이를 보여 주고 있다. CBPE는 CLMSE 보다 10-4의 비트 오류 확률상에서 약 3.5 dB의 성능 이득을 보인다. 선형 여파기 구조는 오직 선형 채널 왜곡만을 보상 할 수 있기 때문에, 이와 같은 결과는 당연한 현상이라고 할 수 있다.

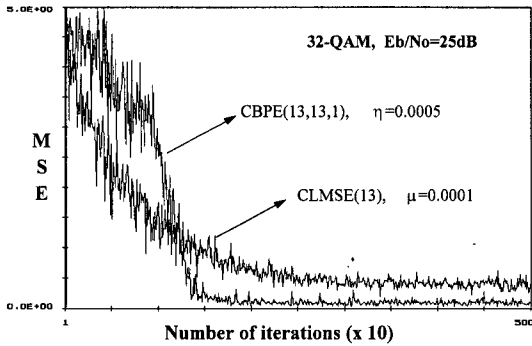


그림 9. 비선형 채널하에서의 CLMSE와 CBPE 사이의 평균 자승 오차 비교

Fig. 9. MSE comparison between the CLMSE and the CBPE under the nonlinear channel.

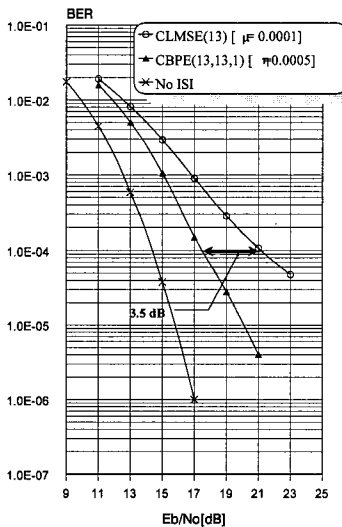


그림 10. 비선형 채널하에서의 CBPE와 CLMSE의 비트 오류 확률 비교

Fig. 10. Bit error rate versus Eb/No when the nonlinear distortion exists (32-QAM).

V. 결론

이 논문에서는, 적절한 복소 활성화 함수가 가져야 할

중요한 특성들에 대하여 살펴본 후, 어떤 임의의 M-ary QAM 신호도 다룰 수 있게 해주는 새로운 복소 활성화 함수를 제안하였다. 제안한 복소 활성화 함수는 경사 변수를 조절함에 따라 비선형성의 정도를 조절할 수 있으며, 제안한 복소 활성화 함수의 비선형 변환을 겪은 후, 함수 입력의 실수부와 허수부가 결합 가우스 분포를 가질 경우, 그들의 상관 계수값이 감소함을 증명하였다.

한편, 제안한 복소 활성화 함수의 유용성을 확인하기 위하여 그 함수를 채용한 복소 다층 퍼셉트론을 사용한 비선형 적응 등화기를 구성하였다. 제안된 비선형 적응 등화기는 경사 변수를 조절함에 의해 수렴 속도를 향상시키거나 성능을 개선 할 수 있다. 또한, 제안한 비선형 적응 등화기는 임의의 M-ary QAM 신호에 대하여 등화기로서 잘 동작함과 동시에 기존의 선형 적응 등화기 보다 평균 자승 오차상에서 더 나은 성능을 보임을 실험을 통하여 확인하였다. 특히, 제안한 비선형 적응 등화기는 채널에 비선형 왜곡이 존재할 경우 기존의 선형 등화기에 대하여 두드러진 성능 향상을 보였다.

부록 I

Georgiou와 Koutsougeras는 적절한 복소 활성화 함수  $F(Z)$ 가 지녀야 할 다섯 가지 특질들을 제안하였다 [13].

- P1.  $F(Z)$ 는  $z_R$ 와  $z_I$ 에 대하여 비선형이어야 한다.
- P2.  $F(Z)$ 는 경계(bound)를 가져야 한다.
- P3.  $F(Z)$ 는 entire 함수가 아니어야 한다.
- P4. 편미분들이 존재하여야 하고, 그들의 값은 경계를 가져야 한다.
- P5.  $(\partial f_R / \partial z_R)(\partial f_I / \partial z_I) \neq (\partial f_I / \partial z_R)(\partial f_R / \partial z_I)$

부록 II

다음의 부정 적분은 잉여(residues)에 의하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\int_0^{\infty} \cos(bx) e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp[-b^2 / (4a)]. \quad (부-1)$$

만일  $y_R - m_R = t$ 라고 하고, 식 (부-1)를 이용하면,

다음의 식을 얻게 된다.

$$E[o_R] = E[y_R] + \frac{\alpha \cos(\pi m_R)}{\sqrt{2\pi\sigma_{y_R}}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi t) \exp[-t^2/(2\sigma_{y_R}^2)] dt + \frac{\alpha \sin(\pi m_R)}{\sqrt{2\pi\sigma_{y_R}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi t) \exp[-t^2/(2\sigma_{y_R}^2)] dt = m_R + \alpha \sin(\pi m_R) \exp(-\pi^2 \sigma_{y_R}^2 / 2). \quad (\text{부록-2})$$

다음 식 역시 유사한 계산을 통하여 얻을 수 있다.

$$E[o_I] = m_I + \alpha \sin(\pi m_I) \exp(-\pi^2 \sigma_{y_I}^2 / 2). \quad (\text{부-3})$$

$\sigma_R$ 의 분산을 구하기 위하여, 식 (부-1)과 (부-4)를 이용하고, 기함수 성질을 이용하면,  $E[o_R^2]$ 의 값을 식 (부-5)처럼 쉽게 구할 수 있다.

$$\int_0^{\infty} \sin(A\sqrt{t})e^{-t} dt = \frac{A\sqrt{\pi}}{2} \exp(-A^2/4), \quad (\text{부-4})$$

$$E[o_R^2] = \sigma_{y_R}^2 + m_R^2 + \frac{\alpha^2}{2} [1 - \cos(2\pi m_R) \exp(-2\pi^2 \sigma_{y_R}^2)] + 2\alpha [\pi \sigma_{y_R}^2 \cos(\pi m_R) + m_R \sin(\pi m_R)] \exp(-\pi^2 \sigma_{y_R}^2 / 2). \quad (\text{부-5})$$

다음 식도 유사한 계산 과정을 거친 후 구할 수 있다.

$$E[o_I^2] = \sigma_{y_I}^2 + m_I^2 + \frac{\alpha^2}{2} [1 - \cos(2\pi m_I) \exp(-2\pi^2 \sigma_{y_I}^2)] + 2\alpha [\pi \sigma_{y_I}^2 \cos(\pi m_I) + m_I \sin(\pi m_I)] \exp(-\pi^2 \sigma_{y_I}^2 / 2). \quad (\text{부-6})$$

이제  $E[o_R \cdot o_I]$ 의  $y_R - m_R = w$ 와  $y_I - m_I = z$ 라고 가정하면 다음 식을 얻을 수 있다. 값을 구하기 위하여,

$$E[o_R \cdot o_I] = E[w \cdot z] + m_I E[w] + m_R E[z] + m_R m_I + \alpha E[w \cdot \sin\{\pi(z + m_I)\}] + \alpha E[z \cdot \sin\{\pi(w + m_R)\}] + \alpha m_R E[\sin\{\pi(z + m_I)\}] + \alpha m_I E[\sin\{\pi(w + m_R)\}] + \alpha^2 E[\sin\{\pi(w + m_R)\} \cdot \sin\{\pi(z + m_I)\}] \quad (\text{부-7})$$

이때  $w$ 과  $z$ 의 결합 PDF는 다음의 식과 같이 표현된다.

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_{y_R} \cdot \sigma_{y_I} \sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{w^2}{\sigma_{y_R}^2} - 2r \frac{w \cdot z}{\sigma_{y_R} \sigma_{y_I}} + \frac{z^2}{\sigma_{y_I}^2} \right]\right\} \quad (\text{부-8})$$

이때 위 식에서  $E[w] = E[z] = 0$ 이  $E[w \cdot z] = \sigma_{y_R} \sigma_{y_I} \cdot r$ 이다.

식 (부-1)를 이용하면, 다음 식들을 구할 수 있다.

$$\alpha E[w \cdot \sin\{\pi(z + m_I)\}] = \alpha \pi \cos(\pi m_I) \sigma_{y_R} \sigma_{y_I} r \exp[-\pi^2 \sigma_{y_I}^2 / 2] \quad (\text{부-9})$$

$$\alpha E[z \cdot \sin\{\pi(w + m_R)\}] = \alpha \pi \cos(\pi m_R) \sigma_{y_R} \sigma_{y_I} r \exp[-\pi^2 \sigma_{y_R}^2 / 2] \quad (\text{부-10})$$

$$\alpha m_R E[\sin\{\pi(z + m_I)\}] = \alpha m_R \sin(\pi m_I) \exp[-\pi^2 \sigma_{y_I}^2 / 2] \quad (\text{부-11})$$

$$\alpha m_I E[\sin\{\pi(w + m_R)\}] = \alpha m_I \sin(\pi m_R) \exp[-\pi^2 \sigma_{y_R}^2 / 2] \quad (\text{부-12})$$

$$\alpha^2 E[\sin(\pi(w + m_R)) \cdot \sin(\pi(z + m_I))] = -\frac{C}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(\pi + B)z + (m_I + m_R)\pi] f_z(z) dz + \frac{C}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(\pi - B)z + (m_I - m_R)\pi] f_z(z) dz \quad (\text{부-13})$$

위의 식 (부-9)-(부-13)와 다음의 식 (부-14)를 연립하면, 식 (부-15)를 얻을 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos[(\pi \pm B)z + (m_I \pm m_R)\pi] f_z(z) dz = \cos[(m_R \pm m_I)\pi] \cdot \exp[-\sigma_{y_I}^2 (\pi \pm B)^2 / 2] \quad (\text{부-14})$$

여기서,  $B = \pi \sigma_{y_R} r / \sigma_{y_I}$ ,  $C = \alpha^2 \exp[-\pi^2 (1-r^2) \sigma_{y_R}^2 / 2]$ 이다.

$$E[o_R \cdot o_I] = \sigma_{y_R} \sigma_{y_I} r + m_R m_I + \pi \alpha \cos(\pi m_I) \sigma_{y_R} \sigma_{y_I} r \exp[-\pi^2 \sigma_{y_I}^2 / 2] + \pi \alpha \cos(\pi m_R) \sigma_{y_R} \sigma_{y_I} r \exp[-\pi^2 \sigma_{y_R}^2 / 2] + m_R \alpha \sin(\pi m_I) \exp[-\pi^2 \sigma_{y_I}^2 / 2] + m_I \alpha \sin(\pi m_R) \exp[-\pi^2 \sigma_{y_R}^2 / 2] + \frac{\alpha^2}{2} \exp[-\pi^2 (\sigma_{y_R}^2 + \sigma_{y_I}^2) / 2] \times [\cos[(m_R - m_I)\pi] \exp(\pi^2 \sigma_{y_R} \sigma_{y_I} r) - \cos[(m_R + m_I)\pi] \exp(-\pi^2 \sigma_{y_R} \sigma_{y_I} r)] \quad (\text{부-15})$$

계산의 편의를 위하여, 일반성을 해치지 않고,  $m_R$ 과  $m_I$ 는 M-ary QAM 신호의 경우처럼 {..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...}의 값을 가진다고 가정하고, 식 (2),(3), (15)를 이용하면,  $Cor(o_R, o_I)$ 는 다음 식으로 표현된다

$$Cor(o_R, o_I) = \frac{M+N}{\sigma_{o_R} \cdot \sigma_{o_I}} \quad (\text{부-16})$$

여기서,

$$\sigma_{o_r} = \sqrt{\sigma_{y_r}^2(1 - 2\pi\alpha \cdot \exp[-\pi^2\sigma_{y_r}^2/2]) + \frac{\alpha^2}{2}(1 - \exp[-2\pi^2\sigma_{y_r}^2])}$$

(부-17)

$$\sigma_{o_i} = \sqrt{\sigma_{y_i}^2(1 - 2\pi\alpha \cdot \exp[-\pi^2\sigma_{y_i}^2/2]) + \frac{\alpha^2}{2}(1 - \exp[-2\pi^2\sigma_{y_i}^2])}$$

(부-18)

$$M = \sigma_{o_r}\sigma_{o_i}r[1 - \pi\alpha(\exp[-\pi^2\sigma_{y_r}^2/2] + \exp[-\pi^2\sigma_{y_i}^2/2])]$$

(부-19)

$$N = \frac{\alpha^2}{2} \exp[-\pi^2(\sigma_{y_r}^2 + \sigma_{y_i}^2)/2](\exp[\pi^2\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}r] - \exp[-\pi^2\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}r])$$

(부-20)

식 (부-17)-(부-20)을 살펴보면, 구해진  $Cor(o_R, o_I)$  이 입력의 평균인  $m_R$ 과  $m_I$ 의 값에 대하여 독립적이라는 것을 알 수 있다.

### 참 고 문 헌

[ 1 ] R. Hecht-Nielsen, Kolmogorovs mapping neural network existence theorem, *Proc. IEEE ICNN*, pp. III 11-13, 1988.

[ 2 ] B. Irie and S. Miyake, Capabilities of three-layered perceptrons, *Proc. IEEE ICNN*, pp. I 641-648, 1988.

[ 3 ] M. Arai, Mapping abilities of three-layer neural networks, *Proc. IEEE IJCNN*, Washington D. C., pp. 419-423, June 18-22, 1989.

[ 4 ] K. Funahasi, On the approximate realization of continuous mappings by neural networks, *Neural Networks*, vol. 2, pp. 183-192, 1989.

[ 5 ] N. J. Nilsson, *Learning Machines*, McGraw-Hill, 1965.

[ 6 ] J. A. Freeman and D. M. Skapura, *Neural Networks : Algorithm and Programming Techniques*, Addison Wesley, 1991.

[ 7 ] G. J. Gibson, S. Siu and C. F. N. Cowan, Application of multilayer perceptrons as adaptive channel equalizers, *Proc. IEEE ICASSP*, Glasgow, Scotland, pp. 1183-1186, May 23-26, 1989.

[ 8 ] P. Balay and J. Palicot, Equalization of nonlinear perturbations by a multilayer perceptron in satellite channel trans-

mission, *Proc. IEEE GROBECOM*, San Francisco, pp. 22-26, 1994.

[ 9 ] K. A. Al-Mashouq and I. S. Reed, The use of neural nets to combine equalization with decoding for severe intersymbol interference channels, *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 5, no. 6, pp. 982-988, Nov. 1994.

[ 10 ] C. W. You and D. S. Hong, Neural convolutional decoders in the satellite channel, *Proc. IEEE ICNN*, Perth, Australia, pp. 443-448, June 1995.

[ 11 ] J. H. Cho, C. W. You, and D. S. Hong, The neural decision feedback equalizer for the nonlinear digital magnetic recording channel, *Proc. IEEE ICC*, Dallas, pp. 573-576, June 1996.

[ 12 ] H. Leung and S. Haykin, The complex backpropagation algorithm, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 39, no. 9, pp. 2101-2104, Sep. 1991.

[ 13 ] G. M. Georgiou and C. Koutsougeras, Complex domain backpropagation, *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II*, vol. 39, no. 5, pp. 330-334, May 1992.

[ 14 ] N. Benvenuto and F. Piazza, On the complex backpropagation algorithm, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, no. 4, pp. 967-969, April 1992.

[ 15 ] C. W. You and D. S. Hong, Adaptive equalization using the complex backpropagation algorithm, *Proc. IEEE ICNN*, Washington D. C., pp. IV 2136-2141, June 2-6, 1996.

[ 16 ] G. Kechriototic, E. Zervas, and E. S. Manolakos, Using recurrent neural networks for adaptive communication channel equalization, *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 5, no. 2, pp. 267-278, March 1994.

[ 17 ] P. R. Chang, B. F. Yeh, and C. C. Chang, Adaptive packet equalization for indoor radio channel using multilayer neural networks, *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, vol. 43, no. 3, pp. 773-780, August 1994.

[18] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, 1986.

[19] A. Lapeda and R. Farber, How neural nets work?, *Preprint la-ur-88-418*, Los Alamos Nat. Lab., Los Alamos, NM, 1988.

[20] O. K. Ersoy and D. S. Hong, Parallel, self-organizing, hierarchical neural networks-II, *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 2, no. 2, pp. 218-227, April 1993.

[21] N. Benvenuto, M. Marchesi, F. Piazza and A. Uncini, A comparison between real and complex-valued neural networks in communication applications, *Proc. Int. Conf. Artificial Neural Networks*, Espoo, Finland, pp. 1177-1180, June 1991.

[22] D. W. Trim, *Introduction to Complex Analysis and Its Applications*, PWS Publishing Company, 1996.

[23] B. Widrow, J. McCool, and M. Ball, The complex LMS algorithm, *Proc. IEEE*, vol. 63, pp. 719-720, 1995.

[24] N. Benvenuto, M. Marchesi, F. Piazza, and A. Uncini, Nonlinear satellite radio links equalized using blind neural networks, *Proc. IEEE ICASSP*, Toronto, pp. 1521-1524, May 1991.

[25] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Third Edition New York, McGraw-Hill, 1991.

[26] S. H. Oh and Y. Lee, Effect of nonlinear transformation on correlation between weighted sums in multilayer perceptron, *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 5, no. 3, pp. 508-510, May 1994.

[27] E. Biglieri, D. Divsalar, P. J. McLane, and M. K. Simon, *Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications*, Macmillan, 1991.

[28] L. L. Horowitz and K. D. Senne, Performance advantages of complex LMS for controlling narrow-band adaptive arrays, *IEEE Trans. on Acous. Speech Signal Process.*, vol. ASSP-29, pp. 722-736, 1981.

[29] G. J. Gibson, S. Siu and C. F. N. Cowan, Application of multilayer perceptrons as adaptive channel equalizers, *Proc. IEEE ICASSP*, Glasgow, Scotland, pp. 1183-1186, May 23-26, 1989.

저 자 소 개

劉 哲 雨(正會員) 第 33卷 A編 第 4號 參照  
 현재 연세대학교 전자공학과 박사과  
 정 재학

洪 大 植(正會員) 第 33卷 A編 第 4號 參照  
 현재 연세대학교 전자공학과 부교수  
 재직