

스펙트럴 영역분할 격자 삽입법을 이용한 채널유동의 큰 에디 모사

강 상 모*

(1997년 2월 27일 접수)

Large-Eddy Simulation of Channel Flow Using a Spectral Domain-Decomposition Grid-Embedding Technique

Sangmo Kang

Key Words : Spectral Domain-Decomposition Method (스펙트럴 영역분할법), Grid-Embedding (격자삽입), NonConforming (비적합), Large-Eddy Simulation (큰 에디 모사)

Abstract

One of the main unresolved issues in large-eddy simulation (LES) of wall-bounded turbulent flows is the requirement of high spatial resolution in the near-wall region, especially in the spanwise direction. Such high resolution required in the near-wall region is generally used throughout the computational domain, making simulations of high Reynolds number, complex-geometry flows prohibitive. A grid-embedding strategy using a nonconforming spectral domain-decomposition method is proposed to address this limitation. This method provides an efficient way of clustering grid points in the near-wall region with spectral accuracy. LES of transitional and turbulent channel flow has been performed to evaluate the proposed grid-embedding technique. The computational domain is divided into three subdomains to resolve the near-wall regions in the spanwise direction. Spectral patching collocation methods are used for the grid-embedding and appropriate conditions are suggested for the interface matching. Results of LES using the grid-embedding strategy are promising compared to LES of global spectral method and direct numerical simulation. Overall, the results show that the spectral domain-decomposition grid-embedding technique provides an efficient method for resolving the near-wall region in LES of complex flows of engineering interest, allowing significant savings in the computational CPU and memory.

기호설명

h : 채널의 반폭

l : 부영역의 길이

M, N, P : 격자 해상도

S : 부영역의 수

t : 시간

U_0, U_m : 초기 층류유동의 중심속도 및 체적속도

u_r : 완전 발달된 난류유동의 벽 전단속도

u, v, w, u : 속도

x, y, z, x : 위치 좌표

Γ : 내부경계

Ω : 전체계산영역

* 서울대학교 정밀기계설계공통연구소

α, β : 기본 주파수
 ν, ν_t, ν_T : 동, 에디 및 난류 점성계수
 τ_{ij} : 아격자 응력
 τ_w : 벽 전단응력
 $\partial\Omega$: 전체경계

상첨자

∇ : Fourier 계수
 $-$: LES 필터
 $+$: 벽 좌표
 $'$: 섭동량

하첨자

i : 벡터 인덱스 (1, 2, 3)
 s : 부영역

무차원 수

Re, Re_τ : 레이놀즈수 $U_0 h/\nu$ 및 $u_\tau h/\nu$
 C_f : 마찰계수 $2\tau_w/\rho U_m^2$

기 타

$\langle \cdot \rangle$: 수평면상의 공간평균

1. 서 론

매우 높은 레이놀즈수와 복잡한 형상의 벽경계를 가지는 난류유동을 해석하는데 최근에 큰 에디 모사(large-eddy simulation: LES) 기법이 각광을 받고 있다. LES는 큰 에디의 운동을 필터가 적용된 Navier-Stokes 방정식으로부터 직접 풀고, 작은 에디의 운동을 적절한 아격자 모델(subgrid-scale model)을 통하여 방정식에 반영하는 해석법이다. 따라서, LES를 적용하게 되면 직접 수치모사(direct numerical simulation: DNS)에 비하여 필요한 계산량이 대폭 줄기 때문에, 매우 높은 레이놀즈수의 유동에 대한 해석이 가능하게 된다. 그동안 벽경계 난류유동 해석에 대한 LES는 많은 발전이 있었으나, 좀더 복잡한 유동에 LES를 적용하기 위해서는 아직 해결해야 할 사항들이 많이 있다.

벽경계 유동의 LES 해석에서 주요 미해결 사항 중 하나는 벽근접 영역(near-wall region)의 취급이다. 대부분의 난류가 이 영역에서 생성되기 때문에 벽근접 영역의 정확한 취급은 LES 해석에서 매

우 중요하다. 그 어려움은 벽경계 유동에서 난류생성과 밀접한 관련이 있는 작은 줄무늬(streaky) 구조가 벽근접 영역에 존재한다는 잘 알려진 사실에 기인한다. 그러나, LES에 사용되는 대부분의 아격자 모델은 큰 에디에서 생성된 난류가 사용된 격자 크기의 에디에서 소산된다는 가정 하에 제안되었기 때문에 정확성이 떨어진다. 따라서, 벽경계 유동을 정확히 예측하기 위해서는 벽근접 영역에서, 특히 횡방향(spanwise)으로 높은 격자 해상도가 필요하다. 현재, 이러한 벽근접 영역($z^+ < 100$)에서 필요한 격자 해상도는 DNS와 거의 유사하다. 벽근접 영역에서 높은 격자 해상도가 필요함에도 불구하고 벽으로부터 떨어진 곳에서는 좀더 낮은 격자 해상도를 적용할 수 있다. 그러나, 지금까지의 LES 계산에서는 벽근접 영역에 필요한 횡방향으로의 높은 해상도는 계산영역 전체에 적용되기 때문에, 복잡한 형상과 높은 레이놀즈수의 유동에 대한 해석은 많은 계산량으로 인하여 거의 불가능하게 되었다.

만약에 벽근접 영역에서는 높은 해상도의 격자계를, 벽으로부터 떨어진 영역에서는 낮은 해상도의 격자계를 복합적으로 사용하여 LES를 수행한다면 위의 문제점들은 어느 정도 해결될 수 있다. 그러한 기법을 격자 삽입법(grid-embedding technique)이라 하며, 이 방법에서는 계산영역을 몇 개의 부영역(subdomain)으로 분할하고 각 부영역에서 서로 다른 격자계를 적용한다. 이때, 부영역 사이에 내부경계(interface)가 생기는데, 그 내부경계의 적절한 취급은 격자 삽입법에 매우 중요하다.

지금까지 대부분의 격자 삽입법은 유한차분법 또는 유한체적법과 함께 적용되었다.^(1,2) 이러한 격자 삽입법은 특정 영역에 높은 해상도를 적용할 필요가 있거나 복잡한 형상을 가지는 유동에 매우 유용한 방법으로 알려져 있다. 그럼에도 불구하고, 내부경계를 통한 부영역사이의 정확한 정보전달을 위하여 내부경계 조건의 취급방법을 더욱 개선할 필요가 있었다. 최근에 Kravchenko 등⁽³⁾은 채널 난류유동의 DNS와 LES 해석을 위하여 지구 삽입법(zonal embedding technique)을 개발하였다. 그 연구에서는, 내부경계에서 필요한 매우 정확한 조건, 즉 스펙트랄 내삽법을 적용하기 위하여 두 균일(homogeneous)방향으로는 Fourier 스펙트랄법을, 벽수직(wall-normal)방향으로는 B-spline 기 초함수를 가지는 Galerkin법을 각각 적용하였다. 그 방법을 통하여 내부경계에서 정보전달의 연속성

과 정확성을 유지할 수 있으며, 또한 복잡한 유동을 해석하는데 계산비용을 절감할 수 있었다. 그러나, 그 방법은 벽수직방향으로 낮은 차수의 B-spline 법, 즉 비스펙트랄법을 적용하였기 때문에 이산화 오차(discretization error) 문제를 아직 안고 있다. 일반적으로 LES에서 이산화나 앨리어징(aliasing)에 의해 발생하는 수치오차는 아격자 응력항에 비하여 매우 작아야 된다. Ghosal⁽⁴⁾과 Kravchenko 등⁽⁵⁾은 난류유동의 LES 해석과 관련된 수치오차에 대한 연구를 수행하였고, 낮은 정확도를 가지는 유한차분법을 적용할 때 그 수치오차가 아격자 응력항과 거의 비슷하다고 보고하였다. 이어, 스펙트랄법이나 매우 높은 정확도의 유한차분법을 적절한 디앨리어징(dealiasing) 과정과 함께 적용해야만 그 오차문제를 해결할 수 있다고 주장하였다.

본 연구에서 벽경계유동의 LES 해석을 위하여 벽근접 영역에 높은 격자 해상도를 적용하기 위한 효율적인 방법으로 비적합 스펙트랄 영역분할법(nonconforming spectral domain-decomposition method)을 이용한 격자 삽입법을 제안하고자 한다. 이 방법은 계산영역을 몇 개의 부영역으로 나누고, 이어 각 부영역내에서 지배방정식을 풀고 동시에 각 내부경계에 적절한 접합조건을 만족시키는 개념이다.⁽⁶⁾ 따라서 이 방법은 모든 방향에 대하여 스펙트랄 정확도를 가지기 때문에 이산화 오차를 줄일 수 있고 아울러 내부경계에서 높은 정확성과 연속성을 유지할 수 있다. Henderson 등⁽⁷⁾은 원통유동과 리브렛(riblet)유동의 DNS 해석에 스펙트랄 격자 삽입법을 적용하였으며, 이 때 균일방향에 Fourier 스펙트랄법을 그리고 양 비균일방향에 스펙트랄 요소법을 각각 채택하였다. 그러나, 이는 좀더 복잡한 LES 해석이 아닌 DNS 해석에만 적용되었다.

본 논문에서는 천이와 난류상태의 채널유동에 대한 LES 해석을 수행하여 벽경계유동의 LES 해석을 위해 제안된 격자 삽입법의 성능을 평가하였다. 격자삽입을 위하여 Orszag⁽⁸⁾이 처음 제안하고 이어 Zanolli⁽⁹⁾와 Funaro 등⁽¹⁰⁾이 개발한 스펙트랄 패칭 콜로케이션 선법(spectral patching collocation method)을 사용하였다. 여기에서, 비적합 영역분할 환경에서 수렴성과 용이성 때문에 스펙트랄 요소법과 같은 변분법(variational method) 대신에 패칭법을 적용하였다. 한편 아격자 모델로는

Germano 등⁽¹¹⁾과 Lilly⁽¹²⁾가 제안한 동적 Smagorinsky 모델(dynamic Smagorinsky model)을 채택하였다. 본 논문에서 제안된 격자 삽입법이 비록 간단한 채널유동에 적용되었지만 좀 더 복잡한 벽경계 난류유동의 해석으로 쉽게 확장이 가능하다.

2. 수치 해법

해석된 채널유동은 주 유동방향(x 또는 x_1)과 횡방향(y 또는 x_2)으로 주기적이며, 벽수직방향(z 또는 x_3)으로 $2h$ 떨어진 두 벽을 가진다. 주기방향으로의 계산영역 크기는 $L_x/h=2\pi/\alpha$ 와 $L_y/h=2\pi/\beta$ 이며, 이때 α 와 β 는 각각 해당 기본 주파수이다. 각 방향에 해당하는 속도성분은 (u, v, w) 또는 (u_1, u_2, u_3) 으로 표시된다. 그리고, $z/h=\pm 1$ 에 위치한 양 벽에 점착(no-slip)조건이 부과되며, 유동은 일정유량 조건을 만족한다.

2.1 지배 방정식

LES에서 큰 에디의 유동장 \bar{u}_i 는 필터가 적용된 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식을 해석하여 얻어진다. LES를 위한 지배방정식은 전체계산영역을 Ω 라 표시할 때 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{P}}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

이때, 아격자 응력 τ_{ij} 는 $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ 에 의해 정의되며 물리적으로는 큰 에디 유동장에 대한 작은 에디 유동장의 영향을 나타낸다. 그러나, 아격자 응력 τ_{ij} 는 모든 크기의 에디에 대한 정보를 필요로 하기 때문에 모델화 되어야 한다.

지금까지 개발된 대부분의 아격자 모델은 일반적으로 다음과 같이 표시된다.

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (3)$$

이때, ν_t 는 에디 점성계수라 정의되며, 보통 $\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}|^{1/2}$ 로 표시된다. 여기서 C_s 는 Smagorinsky 모델상수이고, $\bar{\Delta}$ 는 LES 필터폭이며, \bar{S}_{ij} 는 $\bar{S}_{ij} = 1/2(\partial \bar{u}_i / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_i)$ 으로 정의되는 필터화된 스트레인 율이다. 식 (3)을 식 (1)에

대입하고 비선형항을 회전형 (rotational form) 으로 표시하면, LES를 위한 필터화된 지배방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = H_i - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + G_i \quad (4)$$

이때, 각 변수는 다음과 같다.

$$H_i = (\bar{u} \times \bar{\omega})_i \quad (5)$$

$$G_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

또한, $\nu_T = \nu + \nu_i$ 는 난류 점성계수이며, $\bar{\Pi}$ 와 $\bar{\omega} = \Delta \times \bar{u}$ 는 각각 필터화된 수정압력과 와도 (vorticity) 이다.

2.2 시간상 및 공간상 이산화 과정

시간상 이산화를 위하여 필터화된 Navier-Stokes 방정식 및 연속 방정식을 3단계 분할법⁽¹³⁾을 적용하여 시간상에서 적분하였다. 이 방법은 균일 수평면상의 난류 점성계수 평균량을 암시적으로 (implicitly) 그리고 그 평균량에 대한 변이량을 명시적으로 (explicitly) 취급하는 것으로, 각 해석단계는 다음과 같다.

1) 비선형 단계 :

$$\frac{\bar{u}_i^* - \bar{u}_i^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} H_i^n - \frac{1}{2} H_i^{n-1} \quad (7)$$

2) 압력 단계 :

$$\frac{\bar{u}_i^{**} - \bar{u}_i^*}{\Delta t} = - \frac{\partial \bar{\Pi}^{n+1}}{\partial x_i} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{**}}{\partial x_i} = 0$$

3) 점성 단계 :

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^{**}}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \nu_T^n \rangle \frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_j} \right) + F_i^n \quad (9)$$

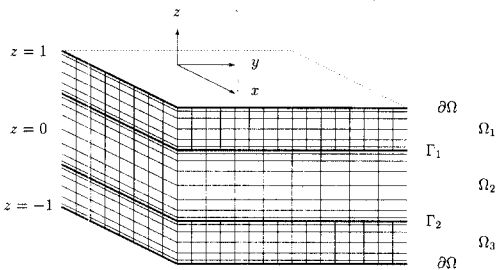


Fig. 1 Domain-decomposition of the computational domain in a channel (case of $S=3$).

$$F_i^n = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu_T^n - \langle \nu_T^n \rangle) \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} \right) + G_i^n$$

여기서, n 과 $\langle \cdot \rangle$ 은 시간단계와 $x-y$ 균일 수평 면상에 대한 공간평균을 각각 나타낸다.

격자 삽입법을 적용하기 위하여 Fig. 1과 같이 전체계산영역 Ω 를 z 방향으로 서로 겹치지 않는 몇 개의 부영역 $\Omega_s (s=1, 2, \dots, S)$ 으로 분할한다. Ω_s 와 Ω_{s+1} 사이의 내부경계는 $\Gamma_s (s=1, 2, \dots, S-1)$ 로, 전체경계는 $\partial\Omega$ 로 각각 표시된다. 여기서, x 방향으로 모든 부영역에 같은 격자수 M 을 적용하였으나, y 와 z 방향으로서는 각 부영역에 서로 다른 격자수 N_s 와 P_s 를 각각 적용하였다. 따라서, 각 부영역에서의 속도장 $\bar{u}_{i,s}$ 는 x 와 y 방향으로 Fourier 급수 확장을 이용하여 다음과 같이 전개된다.

$$\bar{u}_{i,s}(x, y, z, t) = \sum_{|m| \leq M} \sum_{|n| \leq N_s} \tilde{u}_{i,s}(m, n, z, t) \exp(imx + in\beta y) \quad (10)$$

이때, 책 기호는 Fourier 계수를 나타낸다. 각 부영역에서의 속도장 $\tilde{u}_{i,s}$ 는 z 방향으로 Chebyshev 급수 확장을 이용하여 전개된다.

입력 단계 (8)에서 \bar{u} 에 (보통 사용되는 $\bar{\Pi}$ 대신에) 대한 하나의 Poisson 식과 점성 단계 (9)에서 \bar{u} 에 대한 세 개의 Helmholtz 식들을 적절한 경계 조건과 함께 매 시간단계마다 풀어야 한다. 결과적으로 Navier-Stokes 방정식의 해는 각 Fourier 모드 (m, n) 에서 일련의 Poisson 또는 Helmholtz 식들에 대한 해의 집합에 해당된다. 그 식은 일반적인 형태로 다음과 같이 표현된다.

$$L\tilde{u}_i \equiv \frac{d}{dz} \left(q \frac{d}{dz} \right) \tilde{u}_i + \gamma \tilde{u}_i = f_i \text{ in } \Omega \quad (11)$$

$$\tilde{u}_i = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

이때, \tilde{u}_i 는 풀어야 될 속도이며 (지수 m, n 을 생략한 후), $q(z)$ 와 $f_i(z)$ 는 변수이며, γ 는 (음의) 상수이다. 본 연구에서는 이차 상미분 방정식 (11)을 풀기 위해 스펙트럴 팻칭 콜로케이션법을 이용하였다.

2.3 내부경계 조건의 취급

방정식 (11)을 위한 스펙트럴 팻칭법에 적용될 내부경계 조건은 물리적 공간에서 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$\bar{u}_{i,s} = \bar{u}_{i,s+1} \text{ on } \Gamma_s \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{i,s}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{u}_{i,s+1}}{\partial z} \text{ on } \Gamma_s \quad (13)$$

그러나, 내부경계에 접하고 있는 두 부영역에서의 해상도가 서로 다르기 때문에 그 내부경계에서는 격자점이 서로 완전히 일치하지는 않는다. 따라서 내부경계내 모든 격자점에서 내부경계 조건인 식 (12)와 (13)을 동시에 그리고 정확하게 만족하기가 실제 불가능하다.⁽¹¹⁾ 따라서, 그 조건들은 적절한 내부경계 조건으로 수정되어야 한다. 본 논문에서는, 내부경계 조건을 정확하게 만족되어야 할 조건과 스펙트랄 정확도를 유지하는 범위내에서 근사적으로 만족되어야 할 조건으로 구분하였으며, 그 기준은 다음과 같다: 즉, 내부경계에서 최소한 전단응력과 수직속도의 연속성은 정확하게 만족되어야 한다. Piomelli 등⁽¹⁴⁾은 벽경계 유동에서 경계층과 비경계층의 상호작용을 취급하는데, 위의 개념을 도입하여 채널유동의 LES를 성공적으로 수행한 예가 있다. 수식으로 표시하면, 본 논문에서 제안된 내부경계조건은 다음과 같다.

$$\tau_{13,s} = \tau_{13,s+1} \text{ on } \Gamma_s \quad (14)$$

$$\tau_{23,s} = \tau_{13,s+1} \text{ on } \Gamma_s \quad (15)$$

$$\tilde{u}_{3,s} = \tilde{u}_{3,s+1} \text{ on } \Gamma_s \quad (16)$$

위의 조건으로부터 속도에 대한 내부경계 조건을 쉽게 유도할 수 있다. 내부경계 Γ_s 에 이웃하고 있는 두 부영역 사이에 $N_s > N_{s+1}$ 라고 가정하면, 속도에 대한 내부경계 조건은 Fourier 공간에서 모드별로 다음과 같다.

$0 \leq n \leq N_{s+1}$ 에 대하여,

$$\tilde{u}_{i,s}(m, n, z_b, t) = \tilde{u}_{i,s+1}(m, n, z_b, t) \text{ for } i=1, 2, 3 \quad (17)$$

$$\frac{d\tilde{u}_{i,s}(m, n, z_b, t)}{dz} = \frac{d\tilde{u}_{i,s+1}(m, n, z_b, t)}{dz} \text{ for } i=1, 2, 3 \quad (18)$$

$N_{s+1} < n \leq N_s$ 에 대하여,

$$\frac{d\tilde{u}_{i,s}(m, n, z_b, t)}{dz} = 0 \text{ for } i=1, 2 \quad (19)$$

$$\tilde{u}_{i,s}(m, n, z_b, t) = 0 \text{ for } i=3 \quad (20)$$

이때, z_b 는 내부경계의 벽수직방향의 좌표를 나타낸다. 모드 $0 \leq n \leq N_{s+1}$ 에서 조건 (17)과 (18)은 스펙트랄 패칭법을 이용하여 부과되며, 반면에 모드 $N_{s+1} < n \leq N_s$ 에서 조건 (19)와 (20)은 기존의 경계조건을 통하여 부과된다.

3. 해석 방법

3.1 직접 해석법

압력단계에서는 식 (11)의 q 가 상수이므로 Israeli 등⁽¹⁵⁾에 의해 제안된 직접 패칭법이 적용되었다. 여기서 식 (11)은 다음과 같이 단순화 된다.

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{w} - \lambda^2 \tilde{w} = g(z) \text{ on } z \in [-1, 1] \quad (21)$$

$$\tilde{w} = 0 \text{ at } z = \pm 1$$

이어, 전체계산영역이 임의의 길이를 가지는 S 개의 부영역들로 나누어진다고 가정한다. Fig. 2는 직접 패칭법을 위한 격자제와 좌표를 보여준다.

식 (21)의 전해(overall solution) \tilde{w} 는 각 부영역에서의 전해 \tilde{w}_s 의 합집합(\cup)이며, 각 부영역의 전해 \tilde{w}_s 는 제차해(homogeneous solution) \tilde{w}_s^h 와 특수해(particular solution) \tilde{w}_s^p 의 합으로 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \bigcup_{s=1}^S \tilde{w}_s \\ \tilde{w}_s &= \tilde{w}_s^h + \tilde{w}_s^p \end{aligned} \quad (22)$$

각 부영역에서 특수해 \tilde{w}_s^p 를 먼저 풀게되며, 이를 위해 내부경계 Γ_s 에서 임의의 경계조건이 필요한데, 여기서는 $\tilde{w}_s^p = 0$ 이 채택되었다. 이때, 콜로케이션 대각법(collocation diagonalization method)⁽¹⁶⁾을 이용하여 특수해는 쉽게 풀어진다. 따라서, 전

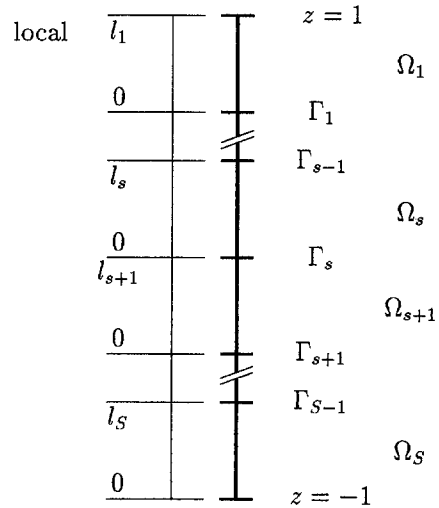


Fig. 2 An illustration of grid system for the direct patching method in any Fourier mode (m, n) with common interfaces.

채영역에서의 특수해 $\tilde{w}^p = \bigcup_{s=1}^S \tilde{w}_s^p$ 와 그의 일차 미분 $d\tilde{w}_s^p/dz$ 는 내부경계 Γ_s 에서 불연속이 된다.

각 부영역의 제차해 \tilde{w}_s^h 는 해석적으로 다음과과 같이 얻어진다.

$$\tilde{w}_s^h = A_s e^{\lambda(z_s - l_s)} + B_s e^{-\lambda z_s} \text{ on } z_s \in [0, l_s] \quad (23)$$

이때, A_s 와 B_s 는 내부경계 Γ_s 에서 연속조건 (17)과 (18)이 만족될 수 있도록 결정되는 매개변수이다. 식 (22)와 (23)을 연속조건과 결합하면 다음과과 같은 식이 얻어진다.

$$A_{s+1} = A_s e^{-\lambda l_s} + \phi_s, \quad B_s = B_{s+1} e^{-\lambda l_{s+1}} + \psi_s \quad (24)$$

이때,

$$\phi_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_s'}{\lambda} + \delta_s \right) \psi_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_s'}{\lambda} - \delta_s \right)$$

$$\delta_s = \tilde{w}_s^p(0) - \tilde{w}_{s+1}^p(l_{s+1})$$

$$\delta_s' = \frac{d}{dz} \tilde{w}_s^p(0) - \frac{d}{dz} \tilde{w}_{s+1}^p(l_{s+1})$$

이다. 뿐만 아니라, 전체 경계조건을 적용하면 다음과 같은 조건이 추가로 얻어진다.

$$A_1 + B_1 e^{-\lambda l_1} = \phi_0, \quad A_S e^{-\lambda l_S} + B_S = \psi_S \quad (26)$$

이때, $\phi_0 = -\tilde{w}_1^p(l_1)$ 이고 $\psi_S = -\tilde{w}_S^p(0)$ 이다. 따라서, 매개변수 A_s 와 B_s 에 대한 식 (24)와 (26)을 동시에 계산하면 최종적으로 식 (21)의 해를 구할 수 있다. 이때 매개변수를 위한 식은 순환 준이중 대각행렬(cyclic quasi-bidiagonal matrix) 형태가 되며, 예를 들어 $S=3$ 의 경우에는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 \\ -E_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \end{bmatrix}$$

이때, $E_s \equiv e^{-\lambda l_s}$ 이다.

3.2 반복 해석법

점성단계에서는 식 (11)의 q 가 상수가 아니기

때문에 반복 팻칭법이 적용되었다. 이 경우, 처음 Zanolli⁽⁹⁾가 제안하고 이어 Funaro 등⁽¹⁰⁾이 개발한 소위 Dirichlet-Neumann법을 적용하였다. 이 방법은 홀수 번째의 부영역에 Dirichlet 경계치 문제를, 짝수 번째의 부영역에 Neumann 경계치 문제를 차례로 설정하고 반복적으로 해석하는 방법이다. 내부경계 조건 (17)과 (18)을 만족하는 식 (11)을 풀기 위한 Dirichlet-Neumann법은 다음과 같이 정의된다.

홀수 번째의 부영역에서,

$$\Pi_a(L \tilde{u}_{i,s}^n - f_{i,s}) = 0 \text{ in } \Omega_s \quad (28)$$

$$\tilde{u}_{i,s}^n = 0 \text{ on } \Omega_s \cap \partial\Omega \quad (29)$$

$$\tilde{u}_{i,s}^n = \lambda^n \text{ on } \Gamma_s \cup \Gamma_{s-1} \quad (30)$$

짝수 번째의 부영역에서,

$$\Pi_a(L \tilde{u}_{i,s}^n - f_{i,s}) = 0 \text{ in } \Omega_s \quad (31)$$

$$\tilde{u}_{i,s}^n = 0 \text{ on } \Omega_s \cap \partial\Omega \quad (32)$$

$$\frac{d \tilde{u}_{i,s}^n}{dz} = \frac{d \tilde{u}_{i,s+1}^n}{dz} \text{ on } \Gamma_s \quad (33)$$

$$\frac{d \tilde{u}_{i,s}^n}{dz} = \frac{d \tilde{u}_{i,s-1}^n}{dz} \text{ on } \Gamma_{s-1} \quad (34)$$

이때, Π_a 는 각 부영역에서의 공간상 이산화된 식을 의미한다. n 은 부영역 반복수이며, $n \geq 1$ 에 대해서 λ^{n+1} 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} &= \theta_n \tilde{u}_{i,s-1}^n + (1 - \theta_n) \lambda^n \text{ on } \Gamma_{s-1} \\ &\theta_n \tilde{u}_{i,s+1}^n + (1 - \theta_n) \lambda^n \text{ on } \Gamma_s \end{aligned} \quad (35)$$

θ_n 은 수렴을 가속화하기 위한 완화변수이며, 본 연구에서는 최소오차 접근법(minimum error approach)⁽¹⁰⁾을 이용하여 얻어진다. 반복 팻칭법의 수렴기준은 다음과 같다.

$$\max_{s=1, \dots, S-1} \{ \|e_{i,s}^n\|_{\infty, \Gamma_s}, \|e_{i,s+1}^n\|_{\infty, \Gamma_s} \} \leq \delta \quad (36)$$

이때, $e_{i,s}^n \equiv \tilde{u}_{i,s}^n - \tilde{u}_{i,s}^{n-1}$ 이고, $\|\cdot\|_{\infty}$ 는 최대 절대크기이며, δ 는 수렴기준이다. 각 부영역에서 이산화된 경계치 문제 (28)과 (31)은 선정지 최소잔류법(preconditioned minimum residual method)⁽⁶⁾을 이용하여 푼다.

4. 결과 및 토의

본 연구에서 제안된 격자 삽입법을 평가하기 위하여 Tollmien-Schlichting 파형의 채널유동 내 전개과정을 해석하고, 이어 천이와 난류영역을 가지

는 채널유동에 대한 LES를 수행하였다.

4.1 Tollmien-Schlichting 파형의 채널유동 내 전 개과정

Orr-Sommerfeld 식으로부터 구한 가장 불안정한 고유 파형을 가지는 미세 교란을 층류 채널유동에 부과하면 그 교란은 선형적으로 성장하게 된다. 제안된 스펙트랄 영역분할법에 의해 예측된 Tollmien-Schlichting 파형의 채널유동 내 전개과정을 이론 성장률에 의해 계산된 결과와 비교하였다. 계산의 초기조건은 다음과 같다.

$$u(x, y, z, 0) = \text{Real}\{u_0(z) + \varepsilon u_{3D}^+(z) e^{i(ax+\beta y)}\} \quad (37)$$

이때, $u_0 = (1 - z^2, 0, 0)$ U_0 는 초기 층류유동의 평균 속도이며, U_0 는 이때의 중심속도이다.

u_{3D}^+ 는 $Re = U_0 h / \nu = 5000$ 과 $\alpha = \beta = 1.25$ 를 가지는 채널에서 가장 불안정한 고유 함수이며, ε 은 교란이 평균유동에 대하여 5×10^{-7} 의 에너지를 가지도록 선택되었다. 따라서, 위의 조건으로부터 계산된 이론 속도장은 다음과 같다.

$$u(x, y, z, t) = \text{Real}\{u_0(z) + \varepsilon u_{3D}^+(z) e^{i(ax+\beta y - \omega t)}\} \quad (38)$$

이때, (복소수의) 주파수 $\omega = (1.1940, -0.054808)$ 이다.

본 시험은 부영역 수와 z 방향의 해상도를 차례로 변화시키며 수행되었다. 사용된 격자계는 Table 1에 요약되었으며, 비교는 $tU_0/h = 0.1$ 에서 이루어졌다. Fig. 3은 양 속도장으로부터 구한 L_2 절대오차 ρ 를 보여준다. 결과에 따르면, 절대오차가 해상도에 따라 기하학적으로 감소하기 때문에 제안된 스펙트랄 영역분할법은 스펙트랄 정확도를 가진다. 뿐만 아니라, 부영역의 수가 증가하면 절대오차는 증가하나 스펙트랄 정확도는 전체적으로 유지되었다.

4.2 채널유동의 LES

이어, 천이 및 난류의 채널유동에 대한 LES를 수행하여 본 연구에서 제안된 격자 삽입법을 평가하였다. 해석된 채널유동은 전절에서와 같은 레이놀즈수 $Re = 5000$ 과 기본 주파수 $\alpha = \beta = 1.25$ 를 가진다. 이는 완전 발달된 난류상태에서의 벽 전단속도 u_τ 를 기준으로 하는 레이놀즈수 $Re_\tau = u_\tau h / \nu \approx$

Table 1 Summary of the grid systems in the z direction for the test of the accuracy of the spectral domain-decomposition method: number of subdomains (S), lengths of subdomains ($l_s : l_1/\dots/l_s$), effective resolution ($P = \sum_s (P_s - 1)$), grid resolutions ($P_s : P_1/\dots/P_s$), and grid spacings at the walls (Δz_w) and at the centerline (Δz_c).

S	l_s	P	P_s	Δz_w	Δz_c
1	2	16	17	0.0192	0.195
		32	33	0.048	0.098
		64	65	0.0012	0.049
3	0.4/1.2/0.4	16	5/9/5	0.586	0.230
		32	9/17/9	0.0152	0.117
		64	17/33/17	0.0038	0.059
7	0.10/0.28/ 0.40/0.44/0.40 /0.28/0.10	28	5/5/5/5/5/5	0.0145	0.157
		56	9/9/9/9/9/9	0.0038	0.085
		112	17/17/17/17/17/17	0.0010	0.043

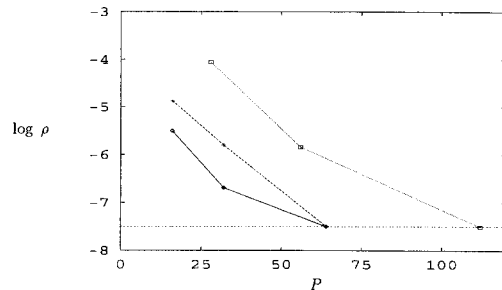


Fig. 3 Test of the accuracy of the spectral domain-decomposition method: the logarithms of the L_2 error norms with regard to the resolution on different sets of subdomains. \circ —, $S = 1$; $- + -$, $S = 3$; $\dots \square \dots$, $S = 7$. For reference, the line \dots denotes a machine precision.

210에 해당된다. 초기조건은 교란이 중첩된 층류유동이며 다음과 같다.

$$u(x, y, z, 0) = \text{Real}\{u_0(z) + \varepsilon_{2D} u_{2D}(z) + \frac{1}{2} \varepsilon_{3D} (u_{3D}^+(z) e^{i(ax+\beta y)} + u_{3D}^-(z) e^{i(ax-\beta y)})\} \quad (39)$$

이때, $u_{2D}(z)$ 와 $u_{3D}^\pm(z)$ 는 각각 Orr-Sommerfeld 식으로부터 구한 2차 및 3차의 가장 불안정한 고유

함수이며, ϵ_{2D} 와 ϵ_{3D} 는 각각 0.1과 0.05이다.

격자삽입 LES를 수행하는데, 전 계산영역을 z 방향으로 각각 $0.4+1.2+0.4=2$ 의 길이를 가지는 3개의 부영역($S=3$)으로 나누었으며, 벽근접 영역에 높은 횡방향 해상도인 $16 \times 64 \times 17$ 을 그리고 중심 영역에 낮은 해상도인 $16 \times 32 \times 33$ 을 각각 적용하였다. 각 부영역 길이는 $l_1^+ \approx 85$, $l_2^+ \approx 250$ 그리고 $l_3^+ \approx 85$ 로, 벽근처의 부영역($s=1, 3$)은 주요 경계층($z^+ < 100$)이 포함되도록 조정되었다. 여기서, 내부경계에서 이웃하고 있는 두 부영역에 사용된 횡방향의 격자 해상도의 비는 2가 선택되었다. 사용된 아격자 모델은 Fourier 컷오프필터를 이용한 동적 Smagorinsky 모델이다. 필터폭 $\bar{\Delta}_i$ 는 균일방향으로 디엘리에이징을 위하여 실제 격자크기의 3/2배가 되도록 택하였으며, 따라서 벽근접 영역에서 $\bar{\Delta}_x^+ \approx 100$ 과 $\bar{\Delta}_y^+ \approx 25$ 가 되었다. 벽수직방향에는 필터를 적용하지 않았다.⁽¹¹⁾

격자삽입 LES 결과는 같은 유동에 대하여 필터화된 DNS 결과와 단일격자를 이용한 LES 결과와 비교되었다. DNS⁽¹⁷⁾를 수행할 때 $64 \times 128 \times 129$ 의 해상도와 디엘리에이징을 위한 소위 2/3 법칙을 적용하였다. 이는 $\Delta_x^+ \approx 25$, $\Delta_y^+ \approx 12.5$ 와 $\Delta_z^+ \approx 0.064 \sim 5.20$ 의 유효 격자크기에 해당된다. 단일격자 LES를 수행할 때 벽근접 영역과 같은 경우($16 \times 64 \times 65$)와 중심 영역과 같은 경우($16 \times 32 \times 65$)의 두가지 횡방향 격자 해상도를 적용하였으며, 본 장에서는 편의상 전자를 단일격자 LES(고)로 그리고 후자를 단일격자 LES(저)로 각각 표기하였다.

Fig. 4는 평균 벽 전단응력 $\langle \tau_w \rangle$ 의 전개과정을 보여준다. 격자삽입 LES에 의해 예측된 천이의 개시와 전단응력의 최고점뿐만 아니라 난류영역에서

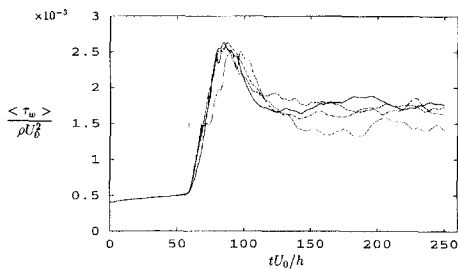


Fig. 4 Time evolution of the wall-shear stress in transitional channel flow with $Re=5000$: —, DNS; ---, grid-embedding LES; -·-, fine global LES; ····, coarse global LES.

의 응력수준은 전체 격자수가 더 많은 단일격자 LES(고)와 잘 일치하였다. 한편, 완전 발달된 난류영역($tU_b/h > 160$)에서 마찰계수 $C_f = 2\tau_w / (\rho U_b^2)$ (이때 U_m 은 체적속도)는 7.8×10^{-3} 으로 단일격자 LES(고)의 예측치인 7.6×10^{-3} 과 유사하였다. 참고로, DNS⁽¹⁸⁾와 Dean⁽¹⁹⁾의 예측치는 8.1×10^{-3} 이다. 반면에, 단일격자 LES에서 횡방향의 해상도를 낮추면 최고점의 위치가 지연되고 응력수준이 낮아지는 등 결과가 크게 악화된다. 이는 격자 삽입법이 벽경계 유동을 예측하는데 적은 격자수에도 불구하고 매우 성공적임을 의미한다.

Fig. 5는 평균 유동속도 $\langle \bar{u} \rangle$ 를 벽좌표를 기준으로 나타냈으며, DNS 결과로부터 얻어진 벽법칙 ($u^+ = 2.5 \ln z^+ + 5.1$)과 비교되었다. 여기서 소개된 난류 통계량은 균일방향에 대한 공간평균과 완전 발달된 난류영역에 대한 시간평균을 각각 수행하여 계산되었으며, 무차원화는 각 경우에서 계산된 벽 전단속도(wall-shear velocity)에 의해 이루어졌다. 격자삽입 LES에 의해 예측된 평균 유동속도는 단일격자 LES(고) 결과와 전체적으로 잘 일

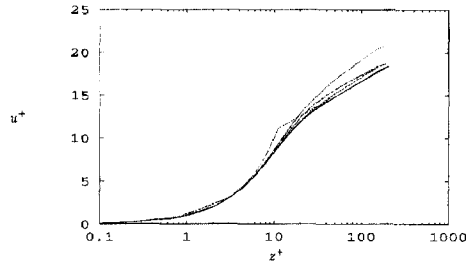


Fig. 5 Mean velocity profile in fully developed turbulent channel flow with $Re=5000$: —, DNS; ---, grid-embedding LES; -·-, fine global LES; ····, coarse global LES; ···· ····, wall law ($2.5 \ln z^+ + 5.1$)

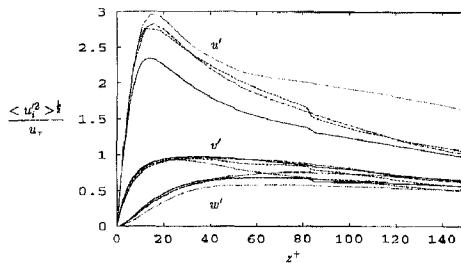


Fig. 6 Turbulence intensities in fully-developed turbulent channel flow with $Re=5000$: —, DNS; ---, grid-embedding LES; -·-, fine global LES; ····, coarse global LES.

치하였다. 게다가, 격자 삽입법에 의해 예측된 속도분포는 단일격자처럼 내부경계($z^+ \approx 85$) 부근에서 속도분포의 왜곡이 발생하지 않았다. Fig. 6과 7은 각각 평균 난류강도 $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ 와 평균 레이놀즈 전단응력 $\langle -u'w' \rangle$ 을 보여주며, 이때 $u'_i = \bar{u}_i - \langle \bar{u}_i \rangle$ 이다. 마찬가지로 격자삽입 LES 결과는 DNS 결과에 비하여 단일격자 LES(고) 결과와 잘 일치하였다. 여기서, 격자삽입의 경우 내부경계에서의 해상도 변화에 따른 영향을 살펴볼 필요가 있다. 실제로 내부경계에서 난류강도의 점프가 나타나는데, 특히 유동방향으로 가장 크게 나타난다. 그러한 점프는 각 부영역에 다른 필터조건이 적용되기 때문에 발생하며 이는 필터화된 DNS 결과에서도 역시 발견된다. 그러나, 해상도 변화로부터 생길 수 있는 통계량의 왜곡은 물론 발견되지 않았다. 특히 벽경계 유동에서 중요한 벽근접 영역에서의 난류 통계량들은 서로 잘 일치하였다. 단일격자 LES에서 해상도를 낮추면 결과가 역시 악화되었다.

격자 삽입법의 주요 장점은 전체적으로 적은 격자수에 불구하고 벽근접 영역에서 유동구조를 적절히 예측할 수 있는 능력이다. 이점 상관계수(two-point correlation)는 벽경계 난류유동의 벽근접 영역에서 유동구조를 고찰하는데 일반적으로 사용된다. Fig. 8과 9는 횡방향으로 떨어진 점들에 대해 $z^+ = 10$ 에서 유동속도와 벽수직속도를 기준으로 하는 이점 상관계수 R_{uu} 와 R_{ww} 를 보여준다. 그림에서 보듯이, 격자 삽입법에 의해 예측된 상관계수의 전체적인 경향, 평균 줄무늬간격 그리고 유동방향의 와류구조(streamwise vortical structure)의 크기 등이 단일격자 LES(고)의 결과와 서로 잘 일치하였다.

지금까지의 결과는 격자 삽입법을 이용한 LES 결과가 벽근접 영역에서는 같은 해상도를 지나 전체적으로는 더 많은 격자를 필요로 하는 단일격자 LES의 결과와 잘 일치하는 등, 격자 삽입법이 난류 통계량과 유동구조를 정확하게 예측할 수 있음을 보여주었다. 그러나, 격자 삽입법에서 LES 성공에 매우 중요한 내부경계 조건을 취급하는데 몇 가지 언급할 사항이 있다. 여기서 사용된 비적합 스펙트럴 영역분할 격자 삽입법에서 계산 오차는 대체적으로 두 가지 요인에 의해 발생될 수 있다. 하나의 오차 원인은 내부경계에서 속도와 그의 일차미분을 제외한 고차미분의 연속성이 보장되지 않기 때문일 수 있다. 또 다른 원인은 각 부영역에

서로 다른 필터조건을 적용함으로써 생기는 난류 점성계수의 불연속성 때문이며 이는 수치적 불안정성을 야기할 수 있다. 본 연구에서는 이 어려움을 피하기 위하여 이웃하고 있는 두 부영역에 딸린 3점에 대해 공간평균을 수행하여 내부경계에서의 난

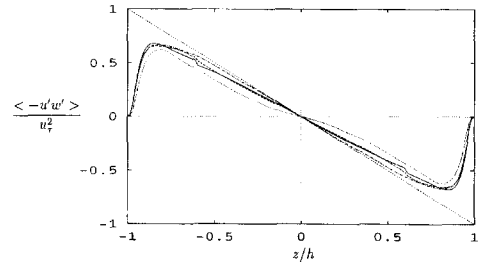


Fig. 7 Reynolds shear stress in fully-developed turbulent channel flow with $Re=5000$: —, DNS; ---, grid-embedding LES; - · - fine global LES; ···, coarse global LES.

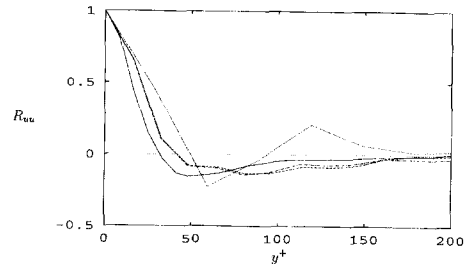


Fig. 8 Spanwise two-point correlations based on the streamwise velocity at $z^+=10$ in fully-developed turbulent channel flow with $Re=5000$: —, DNS; ---, grid-embedding LES; - · - fine global LES; ···, coarse global LES.

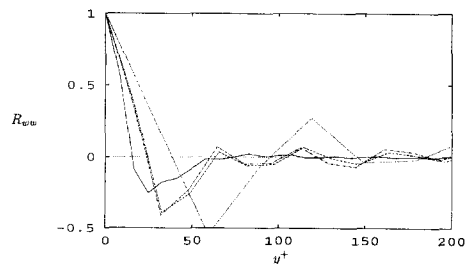


Fig. 9 Spanwise two-point correlations based on the wall-normal velocity at $z^+=10$ in fully-developed turbulent channel flow with $Re=5000$: —, DNS; ---, grid-embedding LES; - · - fine global LES; ···, coarse global LES.

류 점성계수의 연속성을 확보하였다. 이러한 오차 요인에도 불구하고 격자삽입 LES 결과는 단일격자 LES(고) 결과와 잘 일치하였으며, 특히 내부경계에서 의미 있는 정확도 손실은 발견되지 않았다.

게다가, 격자 삽입법을 이용한 LES를 단일격자 LES(고)와 CPU 시간으로 비교하고 평가되어야 한다. 완전 발달된 난류영역에서 LES를 수행한 결과, 격자 삽입 LES에 필요한 시간중분당 CPU 시간은 단일격자 LES(고)에 대하여 약 60% 수준이다. 스펙트럴 격자 삽입법을 이용한 LES 해석은 크게 각 부영역에서의 해석과 부영역끼리의 반복으로 구성되며, 그 반복수는 각 영역의 격자수와 부영역의 수에 거의 관계가 없다.⁽²⁰⁾ 또한, 격자 삽입법에서 CPU 시간은 최대 격자수를 가지는 부영역에서의 해석에 강하게 의존하며, 따라서 결과적으로 CPU 시간의 절감을 얻을 수 있다. 유사한 결과는 Kravchenko 등⁽³⁾의 연구에서도 발견되며, 그는 높은 레이놀즈수를 가지는 유동을 해석하는데 절감효과가 더욱 커진다는 사실을 보여 주었다. 그러나, 스펙트럴 영역분할법은 z 방향으로 Chebyshev 다항식이 사용되므로 같은 CFL 값을 유지하기 위해 더 많은 시간중분수를 필요로 한다. 이는 CPU 시간의 절감효과를 약간 약화시킬 수 있으나, 그러한 제약은 각 부영역에서 사상(mapping) 등을 이용하여 어느 정도 완화시킬 수 있다.

5. 요약과 결론

벽경계 난류유동에 대한 LES 해석에서 주요 미해결 사항 중 하나는 벽근접 영역에서 필요한 높은 해상도 문제이다. 대부분의 난류가 벽근접 영역에서 발생되기 때문에 이 영역의 정확한 취급은 복잡한 벽경계 유동의 LES 해석에 매우 중요하다. 따라서, 벽경계 유동을 정확히 해석하기 위해서는 벽근접 영역에서, 특히 횡방향으로 높은 해상도를 필요로 한다. 현재 벽근접 영역($z^+ < 100$)에 필요한 해상도 조건은 거의 DNS 경우와 유사하다. 그러나, 지금까지의 LES 계산에서는 벽근접 영역에 필요한 높은 해상도가 보통 전 계산영역에 사용되기 때문에 높은 레이놀즈수와 복잡한 형상을 가지는 유동의 해석은 거의 불가능하게 되었다. 본 연구에서는 이러한 한계를 극복하기 위하여 비적합 스펙트럴 영역분할법을 이용한 격자 삽입법을 제안하였다. 이는 벽근접 영역에서 높은 해상도를 가지며

벽으로부터 떨어진 곳에서는 낮은 해상도를 갖게 하는 효율적인 방법으로, CPU나 기억용량과 같은 계산비용의 절감효과를 가져온다. 뿐만 아니라, 이 방법은 모든 방향에 대해 스펙트럴 정확도를 가지므로 LES에 필요한 주요 조건 중 하나인 이산화 오차를 줄일 수 있다.

본 연구에서 레이놀즈수 $Re=5000$ 을 가지는 천이와 난류상태인 채널유동에 대한 LES 해석을 수행하였다. 벽근접 영역에 높은 해상도를 부여하기 위해 z 방향으로 3개의 부영역으로 나누었다. Orszag(8)이 제안한 스펙트럴 팻칭 콜로케이션법이 비적합 스펙트럴 영역분할법을 구현하는 방법으로 사용되었다. 또한, 각 내부경계에서의 접합조건은 Israeli 등⁽¹⁵⁾이 제안한 직접 팻칭법과 Zanolli⁽⁹⁾가 제안한 반복 팻칭법에 의해 만족되었다.

격자 삽입법을 이용한 LES의 결과를 DNS 결과와 일반 스펙트럴법을 이용한 단일격자 LES의 결과와 비교되었다. 격자삽입 LES 결과는 벽근접 영역에서와 같은 해상도를 가지는 단일격자 LES 결과와 잘 일치하였으며, 중심 영역과 같은 해상도를 가지는 단일격자 LES 결과보다 매우 좋았다. 격자 삽입법에서는 부영역에 서로 다른 격자 해상도가 적용되는데, 이에 따른 의미있는 정확도 손실은 발견되지 않았다. 전체적으로 이러한 결과는 비적합 스펙트럴 분할영역법을 이용한 격자 삽입법이 벽경계 유동에 대한 LES를 수행할 때 적은 계산비용으로 좀 더 정확한 결과를 얻는데 매우 유용한 방법을 보여준다. 본 연구는 공학적으로 관심 있는 복잡한 유동의 계산에서 LES의 유용성을 더욱 높일 수 있는 계기가 될 수 있다.

후 기

본 연구는 과학기술부 창의적 연구진흥사업(난류 제어 연구단)의 지원에 의하여 이루어졌으며, 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Kallinderis, Y., 1992, "Numerical Treatment of Grid Interfaces for Viscous Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 98, pp. 129~144.
- (2) Rai, M. M. and Moin, P., 1993, "Direct Numerical Simulation of Transition and Turbulence in a

- Spatially Evolving Boundary Layer," *J. Comput. Phys.*, Vol. 109, pp. 169~192.
- (3) Kravchenko, A. G., Moin, P., and Moser, R., 1996, "Zonal Embedded Grids for Numerical Simulations of Wall-Bounded Turbulent Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 127, pp. 412~423.
- (4) Ghosal, S. G., 1996, "An Analysis of Numerical Errors in Large Eddy Simulations of Turbulence," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 187~206.
- (5) Kravchenko, A. G. and Moin, P., 1997, "On the Effect of Numerical Errors in Large Eddy Simulations of Turbulent Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 131, pp. 310~322.
- (6) Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., and Zang, T. A., 1988, "Spectral Methods in Fluid Dynamics," Springer-Verlag.
- (7) Henderson, R. D. and Karniadakis, G. E., 1995, "Unstructured Spectral Element Methods for Simulation of Turbulent Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 122, pp. 191~217.
- (8) Orszag, S. A., 1980, "Spectral Methods for Problems in Complex Geometries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 37, pp. 70~92.
- (9) Zanolli, P., 1987, "Domain Decomposition Algorithms for Spectral Methods," *Calcolo*, Vol. 24, pp. 201~240.
- (10) Funaro, D., Quarteroni, A., and Zanolli, P., 1988, "An Iterative Procedure with Interface Relaxation for Domain Decomposition Methods," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 25, pp. 1213~1236.
- (11) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., and Cabot, W. H., 1991, "A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, pp. 1760~1765.
- (12) Lilly, D. K., 1992, "A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method," *Phys. Fluids A*, Vol. 4, pp. 633~635.
- (13) Yakhot, A., Orszag, S. A., Yakhot, V., and Israeli, M., 1989, "Renormalization Group Formulation of Large-eddy Simulations," *J. Sci. Comput.*, Vol. 4, pp. 139~158.
- (14) Piomelli, U., Ferziger, J., Moin, P., and Kim, J., 1989, "New Approximate Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations of Wall-Bounded Flows," *Phys. Fluids A*, Vol. 1, pp. 1061~1068.
- (15) Israeli, M., Vozovoi, L., and Averbuch, A., 1993, "Spectral Multidomain Technique with Local Fourier basis," *J. Sci. Comput.*, Vol. 8, pp. 135~149.
- (16) Haidvogel, D. B. and Zang, T. A., 1979, "The Accurate solution of Poisson's Equation by Expansion in Chebyshev Polynomials," *J. Comput. Phys.*, Vol. 30, pp. 167~180.
- (17) Domaradzki, J. A., 1990, "An analytic Green's Functions Method in Pseudo-Spectral Navier-Stokes Solvers for Boundary Layer and Channel Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 88, pp. 232~242.
- (18) Kang, S., 1996, "A spectral Domain-Decomposition Method for LES of Turbulence in Wall-Bounded Flows," Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.
- (19) Dean, R. B., 1978, "Reynolds Number Dependence of Skin Friction and Other Bulk Flow Variables in Two-Dimensional Rectangular Duct Flow," *Trans. ASME I: J. Fluids Engng.*, Vol. 100, pp. 215~223.
- (20) Zampieri, E., 1989, "Iterative Methods for Domain Decomposition Using Spectral Tau and Collocation Approximation," *Calcolo*, Vol. 26, pp. 61~91.