

복소 유사응력함수에 의한 타원 강체함유물을 내포하는 크리프재료의 응력해석

이 강 용* · 김 중 성**

(1997년 7월 18일 접수)

Stress Analysis of Creep Material Containing Elliptical Rigid Inclusion by Complex Pseudo-Stress Function

Kang Yong Lee and Jong Sung Kim

Key Words : Creep Material(크리프재료), Complex Pseudo-Stress Function(복소 유사응력함수), Elliptical Rigid Inclusion(타원 강체함유물), Stress Analysis(응력해석)

Abstract

The analysis model is the power law creep material containing an elliptical rigid inclusion subjected to the arbitrarily directional stress on infinite boundary. The stress analysis is performed using the conformal mapping function and complex pseudo-stress function. The stress distributions near an elliptical rigid inclusion are obtained with various ellipse shapes, strain hardening exponents and directions of applied stress.

1. 서 론

크리프거동은 적어도 두세기 전부터 논의되어지기 시작했는데 해석의 난해함으로 연구 대상에서 한동안 제외되었다. 그러나 에너지설비(power plant), 우주항공엔진과 화학반응로(chemical reactor) 등의 효율과 출력 증대를 위해 작동온도와 작동압력이 증가되어졌고, 이로 인하여 크리프변형을 일으키게 되어 그 해석의 중요성이 증가되어졌다.

Power law 크리프재료의 응력해석에 대해 연구한 기존의 연구를 살펴보면 다음과 같다. Hoff⁽¹⁾는 power law 크리프거동을 하는 기둥, 판과 박판의 안정성(stability) 문제에 대해 연구하였다. Rozenblum⁽²⁾은 얇은 박판(shell)의 크리프거동에 대한 개략화된 응력방정식을 개발하였다. Spence⁽³⁾는 유

연 곡선파이프(smooth curved pipe)가 굽힘상태에 있을때 크리프해석을 수행하였다. Mukherjee⁽⁴⁾는 경계요소법(boundary element method)을 이용하여 급속의 크리프변형에 대해 연구하였다. Lee와 Gong⁽⁵⁾은 단순인장(simple tension) 또는 순수전단(pure shear) 응력이 외부 무한경계에서 작용하고, power law 크리프거동을 하는 무한체에 원형모양의 강체함유물이 있을때의 응력분포를 유사응력함수(pseudo-stress function)를 이용하여 결정하였다. Lee와 Smith⁽⁶⁾는 단순인장이 외부 무한경계에서 작용하고, power law 크리프거동을 하는 무한체에 원형구멍이 존재하는데 구멍 표면에 걸쳐서 응력이 작용하지 않는 경우에 대하여 응력분포를 유사응력함수를 이용하여 결정하였다.

그러나 타원 형상의 강체함유물이 포함되어 있는 power law 크리프 무한체에 대한 응력의 엄밀해(closed solution)에 대한 기존의 연구는 찾아볼수 없다. 따라서 본 논문에서는 복소변수, 등각사상

*회원, 연세대학교 기계공학과

**회원, 한국전력기술(주) 전력기술개발연구소

함수와 복소 유사응력함수를 이용하여 무한경계에서 임의 방향의 응력이 작용하는 다원 강체함유물을 내포하는 power law 크릴재료 무한체에 대해 타원 강체함유물 주위의 응력분포를 엄밀해로 결정하고자 한다.

2. 복소 유사응력함수와 등각사상함수

2.1 복소 유사응력함수

Lee와 Gong⁽⁵⁾이 power law 크릴재료에 대해 개발한 아래의 식들이 본 연구에서 사용된다.

정상상태에서의 크릴재료에 대한 구성방정식은 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = \sigma_o \bar{\epsilon}^m \quad (1)$$

여기서, $\bar{\sigma}$ 는 유효응력(effective stress), $\bar{\epsilon}$ 는 유효변형률(effective strain) rate, m 은 변형률 rate 경화지수(strain rate hardening exponent), σ_o 은 강도계수(strength coefficient)로서 응력 \times 시간 m 의 단위를 가진다.

평면변형률 상태에서의 응력성분 σ_{ij} 와 변형률 rate 성분 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} (\sigma_{ij} + \sigma_p \delta_{ij}) \quad (2)$$

여기서, $\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}}$, σ_p 는 팽창응력(dilatational stress)이고, δ_{ij} 는 Kronecker delta이다.

Kolosoff 응력함수⁽⁷⁾ $\phi(z)$, $\psi(z)$ 들과 변위 rate 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\dot{u} + iv = K(m) [\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \quad (3)$$

여기서, $K(m) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sigma_o}\right)^{1/m}$, z 는 복소변수이고 (-)은 복소공액(complex conjugate)이다.

복소 유사응력함수 Λ 와 변형률 rate 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -\dot{\epsilon}_y = -K(m) \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= -iK(m) \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \{ \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) \}$ 이다.

복소 유사응력함수 Λ 와 응력성분식 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 4 \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right)^{(m-1)/2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \quad (5)$$

복소 유사응력함수 Λ 와 팽창응력 σ_p 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sigma_x + \sigma_y \\ &= 4 \int \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right)^{(m-1)/2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \right\} dz \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right)^{(m-1)/2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right\} d\bar{z} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

식 (6)을 임의의 적분경로 C_1 에 대해 극좌표 (r, θ) 로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_p(\beta_2) - \sigma_p(\beta_1) &= 4 \left(\frac{1}{2} \right)^m I_r - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^m I_\theta \\ &= 4 \left(\frac{1}{4} \right)^m \int_{C_1} \eta^{m-1} \left[\left\{ \left(m \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right) \cos(\Delta + 2\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\eta \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \sin(\Delta + 2\theta) \right\} dr \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left(\eta \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \cos(\Delta + 2\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(m \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right) \sin(\Delta + 2\theta) \right\} r d\theta \right] \quad (7) \end{aligned}$$

여기서,

$$\eta = |\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)| = \sqrt{Re^2 + Im^2} \quad (8)$$

$$\Delta = \tan^{-1} \frac{Im}{Re} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \\ &= \frac{1}{2} \{ \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) + z\overline{\phi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \{ \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) - z\overline{\phi''(z)} - \overline{\psi'(z)} \} \quad (11) \end{aligned}$$

여기서, β_1 과 β_2 는 z -평면상의 임의의 두 지점을 의미한다.

무한 power law 크릴재료에 대해 Kolosoff 응력함수 $\phi(z)$ 와 $\psi(z)$ 는 다음과 같다.

$$\phi(z) = \{ -(X + iY) / 2^{1-m} c_1(m) (m+3) \pi \} \ln z + \phi^*(z)$$

$$\psi(z) = \{ (X - iY) / 2^{1-m} c_1(m) (m+3) \pi \} \ln z + \psi^*(z) \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \phi^*(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \\ \psi^*(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n z^n \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 X 와 Y 는 외력(external force), $c_1(m)$ 은 변형률 rate 경화지수 m 의 함수이고, a_n, a'_n 은 결정하여야 할 복소계수이다.

2.2 등각사상법

Fig. 1에서 보는 바와 같이 등각사상함수 $\omega(\zeta)$ 에 의해서 z 복소 평면상의 임의의 폐곡선 Γ 와 그 외부영역 E 는 ζ 복소 평면상의 단위원 Γ' 와 그 외부영역 E' 로 변화된다.

3. 응력해석

해석하고자 하는 모델은 Fig. 2와 같이 power law 크립재료로 구성된 무한체에 변위 rate가 영인 함유물 표면을 가지는 타원형상의 강체 함유물이 존재하고 무한체의 외부 경계에서 임의 방향의 응력이 작용하는 경우이다. 여기서, a 는 타원의 장축 길이이고, b 는 타원의 단축 길이이다.

Fig. 2에서 보는 바와 같이 x 축에 대해 임의의 각도 γ 로 무한경계에서 작용하는 응력 σ 에 응력 변환식을 이용하면 다음 식을 얻는다.

$$\sigma_y = \sigma \sin^2 \gamma$$

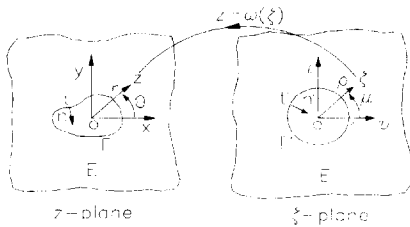


Fig. 1 Conformal mapping.

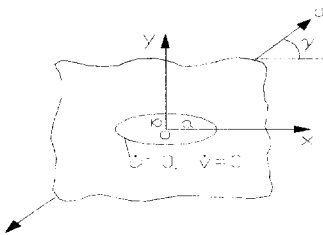


Fig. 2 The elliptical rigid inclusion buried in the infinite power law creep material body subjected to the arbitrarily directional stress.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \cos^2 \gamma \\ \sigma_{xy} &= \sigma \sin \gamma \cos \gamma \quad (z = \infty) \end{aligned} \quad (14)$$

해석 모델에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} : \text{유한한 값 (무한 경계면)} \quad (15)$$

$$X=0, Y=0 \quad (\text{강체함유물 표면}) \quad (16)$$

$$\dot{u}=0, \dot{v}=0 \quad (\text{강체함유물 표면}) \quad (17)$$

함유물이 타원형상인 경우 등각사상함수⁽⁷⁾는 다음과 같다.

$$z = \omega(\zeta) = C \left(\zeta + \frac{D}{\zeta} \right) \quad (18)$$

여기서, $C = \frac{a+b}{2}$ 이고, $D = \frac{a-b}{a+b}$ 이다.

함유물의 표면에는 어떠한 외력도 작용하지 않으므로 식 (12)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \\ \psi(z) &= \psi^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n z^n \end{aligned} \quad (19)$$

식 (18)을 식 (19)에 대입한후 ζ 에 대한 다항식 (polynomial series)으로 전개하면 다음과 같은 식이 도출된다.

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n \\ \psi(\zeta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b'_n \zeta^n \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, b_n, b'_n 은 결정하여야 할 복소계수이다.

식 (5)의 양변에 $\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty}$ 을 취하고 무한체의 외부 경계에서 응력은 유한하다는 경계조건식 (15)를 이용하면 n 은 $-\infty$ 에서 1까지 이어야 한다. 따라서 식 (20)을 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\phi(\zeta) = b_1 \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n = b_1 \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} \quad (21)$$

$$\psi(\zeta) = b'_1 \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} b'_n \zeta^n = b'_1 \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{\zeta^n} \quad (22)$$

함유물의 표면에서 변위 rate는 영이라는 경계조건식 (17)과 식 (3)으로부터 다음과 같은 식이 도출된다.

$$\begin{aligned} \dot{u} + i\dot{v}|_{\zeta\bar{\zeta}=1} &= K(m) [\phi(z) - z\phi'(z) - \overline{\psi(z)}]_{\zeta\bar{\zeta}=1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)으로부터 $\psi(\zeta)$ 에 대해 정리한 결과식에 식 (18)과 (21)을 대입하고 $\zeta\bar{\zeta}=1$ 을 이용하여 정

리한후 ζ 을 ξ 로 변환시키고, $\frac{1}{\xi-\zeta}$ 을 곱한후 Cauchy 적분⁽⁸⁾을 수행한후 양변을 계수 비교하면 다음과 같다. 여기서, Cauchy 적분방법을 사용하면 해석영역내에서 해석함수만을 도출해 주므로 식 (23)에 식 (21)과 (22)를 직접대입후 계수비교를 통해 결정하는 것보다 간단하게 계수들 사이의 관계식들을 결정할수 있다.

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha'_0 \quad (24)$$

$$\bar{\alpha}_1 - b_1 D = b'_1 \quad (25)$$

$$\bar{\alpha}_n = 0, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (26)$$

식 (26)을 이용하고 α_0 는 응력값과 변위 rate 값에 아무런 영향을 주지 못하는 복소계수라는 점을 고려하면 식 (21)은 다음과 같다.

$$\phi(\zeta) = b_1 \zeta + \frac{\alpha_1}{\zeta} \quad (27)$$

식 (23)으로부터 $\phi(\zeta)$ 에 대해 정리한 결과식에 식 (18)과 (27)을 대입하면 다음 식을 얻을수 있다.

$$\phi(\zeta) = \frac{\bar{b}_1}{\zeta} + \bar{\alpha}_1 \zeta - \frac{1+D\zeta^2}{\zeta^2-D} \left(b_1 \zeta - \frac{\alpha_1}{\zeta} \right) \quad (28)$$

식 (5)의 양변에 $\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty}$ 을 취하고 식 (18), (27)과 (28)을 대입하고 경계조건식 (14)와 식 (25)를 이용하면 다음과 같은 계수 결과식을 얻는다.

$$\begin{aligned} b'_{1x} &= -2^{\frac{m-2}{m}} \sigma^{\frac{1}{m}} C \cos 2\gamma \\ b'_{1y} &= 2^{\frac{m-2}{m}} \sigma^{\frac{1}{m}} C \sin 2\gamma \end{aligned} \quad (29)$$

여기서, b'_{1x} 와 b'_{1y} 는 각각 b'_1 의 실수부와 허수부이다.

식 (6)의 양변에 $\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty}$ 을 취하고 식 (18), (27)과 (28)을 대입하고 정리한후 경계조건식 (14)와 식 (29)를 이용하여 b_1 에 대해 정리하면 다음 식을 얻을수 있다.

$$b_1 = \frac{2^{\frac{m-2}{m}} \sigma^{\frac{1}{m}} C}{m+1} \quad (30)$$

식 (25)에 식 (29)와 (30)을 대입하여 실수부와 허수부로 분류하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_{1x} &= b'_{1x} + b_1 D = 2^{\frac{m-2}{m}} \sigma^{\frac{1}{m}} C \left(\frac{D}{m+1} - \cos 2\gamma \right) \\ \alpha_{1y} &= -b'_{1y} = -2^{\frac{m-2}{m}} \sigma^{\frac{1}{m}} C \sin 2\gamma \end{aligned} \quad (31)$$

여기서, α_{1x} 와 α_{1y} 는 각각 α_1 의 실수부와 허수부이다.

식 (18)로부터 ζ 는 z 의 함으로 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\zeta = \frac{1}{2C} (z + \sqrt{z^2 - 4C^2 D}) \quad (32)$$

식 (32)를 이용하여 식 (27)과 (28)을 z 의 함수 꼴로 변환시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{b_1}{2C} (z + \sqrt{z^2 - 4C^2 D}) + \frac{2C\alpha_1}{z + \sqrt{z^2 - 4C^2 D}} \\ \phi(z) &= \frac{\bar{\alpha}_1 - Db_1}{2C} (z + \sqrt{z^2 - 4C^2 D}) \\ &\quad + \frac{2CD(\alpha_1 - Db_1)}{z + \sqrt{z^2 - 4C^2 D}} \\ &\quad + \frac{4C^3(1+D^2)(\alpha_1 - Db_1)}{\sqrt{z^2 - 4C^2 D} (z + \sqrt{z^2 - 4C^2 D})^2} \end{aligned} \quad (33)$$

식 (7)의 β_2 지점의 좌표를 (r, θ) 로 설정하고 β_1 의 지점을 (∞, θ) 로 설정하고 경계조건 식 (14)를 이용한후 식 (33)을 대입한 뱁창응력의 결과식과 식 (5)에 식 (33)을 대입하여 극좌표계로 나타낸 결과식으로부터 각 응력성분식이 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \sigma_x(r, \theta) &= \frac{\sigma}{2} + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^m \int_{\infty, \theta=\theta}^r \eta^{m-3} \cdot \\ &\quad \left[Re^2 \left\{ \left(m \frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{m}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} + \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \right. \\ &\quad \left. + (m-1) ReIm \left\{ \left(\frac{\partial Im}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial Re}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \right. \\ &\quad \left. + Im^2 \left\{ \left(\frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{m}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(m \frac{\partial Im}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \right] dr \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^m \eta^{m-1} Re \\ \sigma_y(r, \theta) &= \frac{\sigma}{2} + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^m \int_{\infty, \theta=\theta}^r \eta^{m-3} \cdot \\ &\quad \left[Re^2 \left\{ \left(m \frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{m}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} + \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \right. \\ &\quad \left. + (m-1) ReIm \left\{ \left(\frac{\partial Im}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial Re}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta}\right) \sin 2\theta \Big\} \\ & + Im^2 \left\{ \left(\frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{m}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta}\right) \cos 2\theta \right. \\ & \left. - \left(m \frac{\partial Im}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta}\right) \sin 2\theta \right\} dr \\ & + 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \eta^{m-1} Re \\ \sigma_{xy}(r, \theta) = & 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \eta^{m-1} Im \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, Re 과 Im 는 식 (10)과 (11)에 식 (33)을 대입하여 결정한 식이며, 식 (34)의 r 에 대한 정적분은 특이적분방법중 하나인 Chebyshev polynomial⁽⁹⁾을 이용한 수치적분방법을 사용하였다.

4. 결과 및 고찰

강체함유물의 형상이 단위원이면서 무한체의 외부 경계에서 수직응력만이 작용하는 경우, 즉 γ 가 90°인 경우인 경우 식 (10)과 (11)에 식 (33)을 대입한 결과식 Re 과 Im 은 다음과 같이 변화된다.

$$\begin{aligned} Re = & -2 \frac{m-2}{m} \sigma_m^1 \left\{ \left(\frac{3}{r^4} - \frac{2}{r^2}\right) \cos 4\theta - 1 \right\}, \\ Im = & 2 \frac{m-2}{m} \sigma_m^1 \left(\frac{3}{r^4} - \frac{2}{r^2}\right) \sin 4\theta \end{aligned} \quad (35)$$

식 (35)는 Lee와 Gong⁽⁵⁾의 결과와 동일하다. 또한 식 (35)를 σ_x , σ_y , σ_{xy} 에 대한 식 (34)에 대입하면 그 결과는 Lee와 Gong⁽⁵⁾의 결과와 일치한다.

Fig. 3은 m 이 0.5, a 가 1, γ 가 45°, ρ 가 1.0001인 경우, 무차원화된 팽창응력을 b 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다. Fig. 3으로부터 타원이

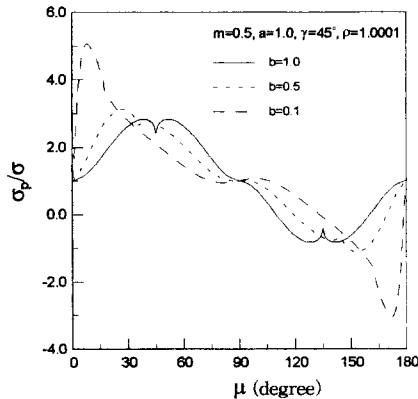


Fig. 3 σ_n/σ vs. μ for various b values.

납작해 질수록 b 가 1인 경우와 비교시 μ 가 0°와 45°인 지점들 사이, 135°와 180°인 지점들 사이의 영역들에서의 팽창응력이 각각 급격히 증가하고 감소하며, μ 가 45°와 90°인 지점들 사이, 90°와 135°인 지점들 사이의 영역들에서의 팽창응력이 각각 서서히 감소하고 증가함을 알 수 있다. 이것은 타원이 납작해 질수록 단위원인 경우와 비교시 μ 가 90°인 지점 부근에서의 곡률이 점점 작아져서 수직응력에 대한 응력집중효과가 점점 작아지고 μ 가 90°인 지점에서 0°와 180°인 지점들 쪽으로 이동시 곡률이 점점 커져서 수직응력에 대한 응력집중효과가 점점 커지기 때문이다.

Fig. 4는 m 이 0.5, a 가 1, γ 가 45°, ρ 가 1.0001인 경우, 무차원화된 유효응력을 b 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다. 여기서, $\bar{\sigma}$ 는 유효응력이다. Fig. 4로부터 타원형상이 납작해 질수록 μ 가 90°인 지점부근의 유효응력은 감소하나 μ 가 0°와 180°인 지점들에서는 점점 커지는 최대값을 가지고

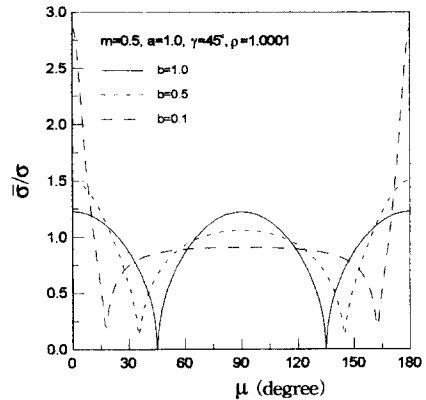


Fig. 4 $\bar{\sigma}/\sigma$ vs. μ for various b values.

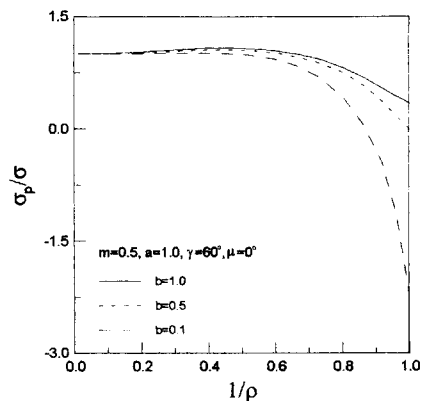


Fig. 5 σ_p/σ vs. $1/\rho$ for various b values.

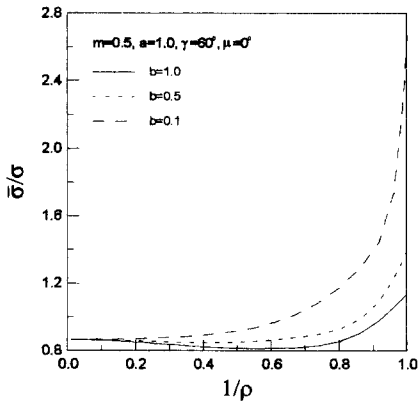


Fig. 6 $\bar{\sigma}/\sigma$ vs. $1/\rho$ for various b values.

유효응력의 최소값이 점점 μ 가 0° 와 180° 인 지점들 쪽으로 이동되어진다. 이것은 타원형상이 납작해질수록 μ 가 0° 와 180° 인 지점들 부근의 곡률이 커져서 응력집중이 증가되어지기 때문이다.

Fig. 5와 6은 m 이 0.5, a 가 1, γ 가 60° , μ 가 0° 인 경우, 무차원화된 팽창응력과 유효응력을 b 의 값에 따라서 $1/\rho$ 에 대해 나타내고 있다. Fig. 5와 6으로부터 타원 표면으로 근접할수록 팽창응력이 감소하고 유효응력이 급격히 증가하고 b 가 감소할수록 팽창응력이 작아지는 정도와 유효응력이 증가하는 정도는 커짐을 알 수 있다. 이것은 타원 표면으로 근접할수록 표면곡률에 의한 응력집중 영향을 보다 많이 받을 뿐만 아니라 b 가 감소할수록 μ 가 0° 인 지점의 곡률이 점점 증가하기 때문이다.

Fig. 7은 a 가 1, b 가 0.5, γ 가 45° , ρ 가 1.0001인 경우, 무차원화된 팽창응력성분을 m 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다. Fig. 7로부터 m 이 감소할수록 μ 가 0° 와 90° 인 지점들 사이, 90° 와 180° 인 지점들 사이의 영역들에서의 팽창응력들은 각각 감소하고 증가함을 알 수 있고 m 이 감소할수록 μ 가 36° 와 144° 인 지점들 부근에서의 팽창응력이 각각 감소하고 증가하는 정도가 인근 지점들 영역에서 보다 점점 증가함을 알 수 있다. 이것은 m 이 감소할수록 변형률 rate의 크기변화에 대한 응력크기의 민감도가 감소하고 작용각도가 45° 이어서 식 (34)의 적분항안에 μ 가 45° 와 135° 인 타원 표면 지점에서 특이점의 세기가 커지기 때문이다.

Fig. 8은 a 가 1, b 가 0.5, γ 가 45° , ρ 가 1.0001인 경우, 무차원화된 유효응력을 m 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다. Fig. 8로부터 m 이 감소할수록 μ 가 0° 와 30° 인 지점들 사이, 150° 와 180°

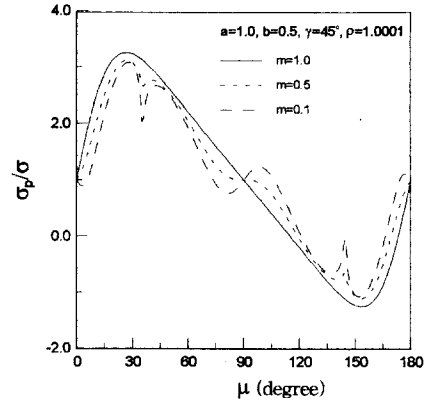


Fig. 7 σ_p/σ vs. μ for various m values.

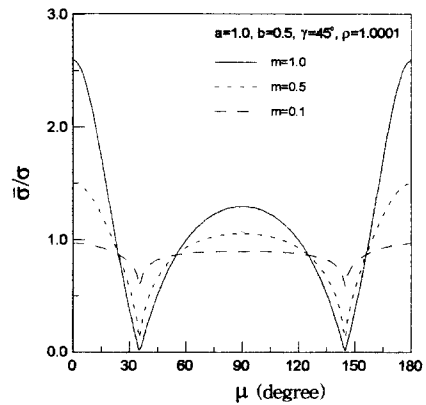


Fig. 8 $\bar{\sigma}/\sigma$ vs. μ for various m values.

인 지점들 사이의 영역들에서의 유효응력은 크게 감소하고 μ 가 50° 와 130° 인 지점들 사이의 영역에서의 유효응력은 작게 감소하며, 유효응력의 최대/최소 편차도 감소하는 경향이 있다. 이것은 Fig. 7의 경우와 동일한 이유 때문이다.

Fig. 9는 m 이 0.5, a 가 1, b 가 0.5, ρ 가 1.0001인 경우, 무차원화된 팽창응력성분을 γ 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다. Fig. 9로부터 작용각도가 0° 와 90° 인 경우 작용각도가 45° 인 경우와는 달리 μ 가 0° 와 180° 인 지점들 부근에서 팽창응력의 기울기가 급격하고 이들 지점에서의 팽창응력의 절대값은 μ 가 90° 인 지점의 팽창응력의 절대값보다 큰 값을 가진다. 이것은 μ 가 0° 와 180° 인 지점들 부근에서 곡률이 커서 응력집중효과가 클 뿐만 아니라 작용각도가 0° 인 경우 μ 가 0° 와 180° 인 지점들의 수직응력에 작용응력이 직접적으로 미치는 영향이 지배적이고 작용각도가 90° 인 경우 μ 가

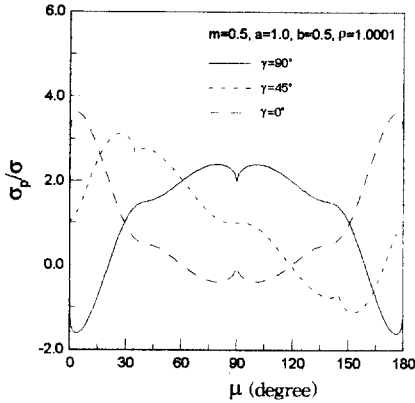


Fig. 9 σ_p/σ vs. μ for various γ values.

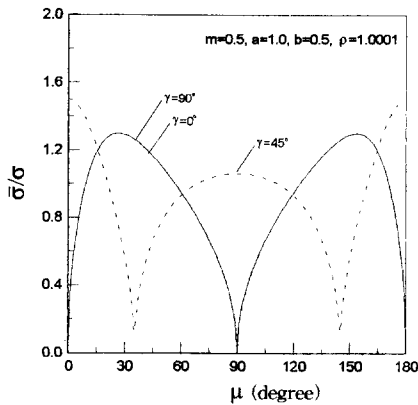


Fig. 10 $\bar{\sigma}/\sigma$ vs. μ for various γ values.

0°와 180°인 지점들의 수직응력에 작용응력에 의해 유도된 상반된 특성을 가지는 응력이 미치는 영향이 지배적이기 때문이다.

Fig. 10은 m 이 0.5, a 가 1, b 가 0.5, ρ 가 1.0001인 경우, 무차원화된 유효응력을 γ 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다. Fig. 10으로부터 작용 각도가 0°, 45°와 90°인 경우 유효응력은 μ 가 90°인 직선에 대해 대칭이다. 이것은 x 축과 y 축에 대해 강체함유물의 형상이 좌우 상하대칭이어서 μ 가 90°인 지점을 기준으로 반대방향으로 동일한 각도만큼 떨어진 지점들의 곡률이 같기 때문이다. 작용각도에 무관하게 μ 가 0°와 180°인 지점들 부근의 유효응력이 μ 가 90°인 지점부근의 유효응력보다 크다. 이것은 타원의 곡률이 μ 가 0°와 180°인 지점들 부근보다 μ 가 90°인 지점 부근에서 작기 때문이다. 작용각도가 0°와 90°인 경우 유효응력은 서로 동일한 곡선임을 알 수 있다.

5. 결 론

무한경계에서 임의 방향의 응력이 작용하는 타원 강체함유물을 포함하는 무한 power law 크릴재료의 응력해석을 복소 유사응력함수를 이용하여 수행하였으며 그 결과는 다음과 같다.

(1) 본 연구의 타당성을 검증하기 위해 타원형상 변수를 조정하여 기존의 결과식들과 비교하였을 때 동일하다.

(2) 타원이 납작해질수록 타원좌표계의 동심각도 μ 가 0°와 180°이면서 타원 표면에 인접한 부분에서의 응력의 절대값은 급격하게 증가하나 μ 가 90°이면서 타원 표면에 인접한 부분에서의 응력의 절대값은 서서히 감소한다.

(3) 타원이 납작해질수록 타원 표면에 근접함에 따른 응력의 증감정도가 증가한다.

(4) 변형률 rate 강화지수가 증가할수록 타원 표면에 인접한 부분에서 μ 에 따른 응력분포중 응력의 최대값과 최소값은 각각 증가하고 감소하여 응력의 최대/최소 편차도 증가한다.

(5) 작용각도의 변화에 따라 타원 표면에 인접한 부분에서 μ 에 따른 응력분포중 응력의 최대값과 최소값이 발생하는 지점이 변화하고 타원 표면에 인접한 부분에서 μ 에 따른 응력분포의 대칭양상이 변화한다.

후 기

이 논문은 1995년도 한국학술진흥재단의 공모과제 "Complex pseudo stress function을 이용한 power law creep material의 균열해석" 연구비에 의하여 연구되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Hoff, N. J., 1954, "Approximate Analysis of Structures in the Presence of Moderately Large Creep Deformations," *Quart. Appl. Math.*, Vol. 12, pp. 49~55.
- (2) Rozenblium, V. I., 1963, "Approximate Equations of Creep of Thin Shells," *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 17, pp. 217~225.
- (3) Spence, J., 1973, "Creep Analysis of Smooth

- Curved Pipes under In-Plane Bending," *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 15, pp. 252~265.
- (4) Mukherjee, S., 1982, "Time-Dependent Inelastic Deformation of Metals by Boundary Element Methods," *Developments in Boundary Element Methods-II*, Banerjee, P. K. and Shaw, R. P. (eds.), Applied Science Publishers, Barking, Essex, UK, pp. 111~142.
- (5) Lee, Y. S. and Gong, H., 1987, "Application of Complex Variables and Pseudo-Stress Function to Power Law Materials and Stress Analysis of Single Rigid Inclusion in Power-Law Materials Subjected to Simple Tension and Pure Shear," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol. 29, pp. 669~694.
- (6) Lee, Y. S. and Smith, L. C., 1988, "Analysis of a Power-Law Material Containing a Single Hole Subjected to a Uniaxial Tensile Stress Using the Complex Pseudo-Stress Function," *Trans. of ASME, J. of Appl. Mech.*, Vol. 55, pp. 267~274.
- (7) Muskhelishvili, N. I., 1954, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff International Publishing.
- (8) Kreyszig, E., 1983, *Advanced Engineering Mathematics*, Fifth edition, John Wiley & Sons, Inc.
- (9) Abramowitz M. and Stegun I. A., 1970, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York.