大韓數學敎育學會 論文集 第 8 卷 第 2 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. VIII, No.2, 651-662. December 1998

컴퓨터를 이용한 수학적 표현에 관한 연구

류 희 찬* · 조 완 영**

1. 서 론

수학교육의 목표는 수학적으로 사고하는 것이고 수학적 사고의 본질은 문제를 해결하는 활동이라 할 수 있다(우정호, 1998). 문제해결 과정을 통해 우리는 일상생활, 직업생활, 다른 학문의 연구 등에서 나타나는 다양한 상황을 해석하고 이해한다. 이러한 수학의 유용성의 의미는 다양하다. 수학은 생활과 과학의 도구로서 유용할 뿐만 아니라 지력을 도야하고 합리성을 개발하는 도야제로서도 유용하다. 따라서, 수학의 유용성은 수학교육의 중요한 목표이며 학교수학에서 이를 강조해야 한다.

상황과 현상을 조직하고 구조화하고 이해하는 과정에서 수학의 유용성을 경험하고 인식할 수 있다. 상황과 현상을 조직화하는 과정이 수학화 또는 수학적 모델링이다. 여기에는 또 다른 수학의 양면성이 있다. 하나는 수학화 과정으로서의 수학이고 다른 하나는 수학화 결과로서의 수학이다. 프로이덴탈은 수학을 연역적인 체계의 완성된 산물로서의 기성수학과 그 완성된 산물에 이르기까지의 인간의 활동으로서의 실행수학 두 가지로 구분하고 있다(박교식, 1998). 후자의 관점에서의 수학은 인간의 경험 이전에 완성된 형태로 존재하는 정적인 것이 아니라, 경험적이며 역동적이고 인간들의 사고와 의사소통과정이 내포되어 있다.

전통적인 학교수학에서는 과정으로서의 수학보다 이미 완성된 결과로서의 수학을 강조해 오고 있으며, 수학교육에서의 문제는 여기에서 비롯된다. 기호화되고 추상화된 결과로서의 기성수학을 강조하게 되면 상황이나 현상에 관련된 여러 가지 의미가 소홀히 되거나 사라지고 학생들의 정신적 표상은 약해질 수밖에 없다. 또한 상황과 현상을 표현하는 과정을 소홀히 함으로써 현상과 상황을 해석하고 이해하는 도구로서의 수학을 인식하지 못하는 결과를 초래한다. 따라서, 학생들은 수학의 유용성을 경험할 수 없으며 결국은 수학이 지적으로 무미건조하고 의미가 없는 과목으로 생각하게 된다.

수학화 과정은 상황과 현상을 수학적인 모델로 번역하는 과정이다. 상황과 현상을 기호를 포함하여 여러 가지로 표현하고 결국 추상화된다. 표현은 수학화 과정에서 중요한 역할을 한다. 어떤 수학적 개념을 표현할 때 그 표현은 상황이나 현상과 관련된 함축적인 정보와 의미를 담고 있으며, 수학의 학습과 사고에 매우 중요하다(Dreyfus, 1991). 함수와 같은 수학적 대상이나 과정에 대하여 이야기하거나 생각할 때 자신이 갖고 있는 대상이나 과정의 정신적 표상을 떠올린다. 수학을 잘하려면 상황과 표현 사이의 관련성은 물론 수학적 표현 사이의 연결을 강화할 필요가 있다.

* 한국교원대학교
** 청주농고

어떤 수학 개념에 대한 여러 가지 표현을 이해하는 것만으로는 문제상황을 해결할 때 개념을 유연하게 활용할 수 없다. 표현사이를 번역해야 하는 문제가 발생한다. 문장제나 상황을 표현하는 과정에서나 표현과 표현 사이를 바꿀 때, 번역이 필요하며 이 과정에서 인지적인 어려움이 발생한다. 번역하고자 하는 두 표현 체계에서의 여러 가지 변형 활동을 하고 그 활동 결과들을 다시 조절해야 하는 문제가 생긴다(Kaput, 1992).

지필환경으로는 이러한 표현에서의 문제를 해결하는 데 한계가 있다. 우선 공간적인 배려를 할 수 없고 역동적 과정을 보여주기 어려우며, 표현 체계 사이의 번역에서 발생한 인지적인 문제를 해결하기 어렵다는 점이다. 또한 지필환경에서는 상황이 문장제로 제시되고 있지만 학생들은 문장제를 실제상황과 관련시키기 어렵다. 이러한 지필환경의 한계를 컴퓨터를 이용하여 극복하려는 시도들이 최근 증가하고 있다(Kaput, 1992, 1998; Nemirovsky, 1996; 장경윤, 1998).

컴퓨터는 수학에서의 문제의 성격과 수학자가 수학을 탐구하기 위해 사용하는 방법을 변화시키고 있다. 컴퓨터의 빠른 계산처리와 시각적 대상의 다양한 조작능력은 수학자들이 수학적 대상을 탐구하며 시뮬레이션할 수 있는 실험실 환경을 제공한다(류희찬, 1998). 이러한 컴퓨터의 기능은 지필환경과 구체물의 한계를 극복하면서 다양하고 조작이 가능한 표현을 제공할 수 있다.

따라서, 본 연구에서는 먼저, 문헌 연구를 통하여 수학적 표현에서 상황의 중요성을 살펴보고, 상황과 표현의 관계를 분석한 다음, 상황과 표현, 표현과 표현 사이의 역동적인 연결에서 컴퓨터의 수학교육적 가능성을 탐색해 보고자 한다.

II. 상황과 표현

학생들은 수학적 개념을 이해하는 것은 물론 사용할 수 있어야 하며 학교에서 학생들은 수학이 이용되는 경험을 해야 한다. 그러나, 고도의 수학적 지식과 사고가 요구되는 활동에 참여하고 있는 사람들조차 자신의 전문 활동 또는 일상활동에서 수학이 이용되고 있다는 사실을 깨닫지 못하고 있다. 이러한 원인을 학생들이 실제로 수학을 이용해 보는 경험의 부족, 즉 상황 또는 현상을 수학화하는 경험의 부족에서 찾을 수 있다. 따라서 수학화의 경험을 통해, 수학이 자신의 경험세계를 이해하고 해석하는 과정에서 인간이 만들어 낸 인간 활동의 결과라는 사실을 학생들이 경험할 수 있도록 해야 한다. 현상을 수학화하는 과정에서 중요한 것은 수학화 대상으로서의 상황과 상황을 수학화하는 과정에서 요구되는 상황의 수학적 표현, 그리고 이들 사이의 연결이다. 본 절에서는 표현에서 상황의 중요성을 강조하는 상황인지론자들의 관점과 Nunes, et al(1993)이 브라질에서 수행한 연구를 분석한 다음 상황과 표현 사이의 관계를 고찰한다.

1. 상황의 중요성

인지과학자들의 측면에서 보면 인지란 사고와 이해를 기호적 체계를 만들고 조작하는 추상적인 과정으로 인간의 머리 속에서 이루어지는 정신적인 활동이다. 이러한 과정에서 환경을 기호적이고 정신적인 표상으로 개념화하고 의미를 부여할 수 있다는 것이 전통적인 인지론자들의 입장이다. 그러나 인간의 정신적 구조와 능력을 기호적 표현에 터한 컴퓨터 모델과 같은 구조로 구현하려는 이들의 입장은 인간들 사이의 상호작용 및 환경과의 상호작용

과 같은 사회적 측면을 소홀히 하는 결과를 초래하였다(박성선, 1998).

Scribner(1984)는 이론적 사고와 실제적 사고는 서로 다른 형태의 사고라는 입장에서, 교실은 학생들이 실제적 상황이 결여된 이론적인 지식만을 가지고 실험을 하는 실험실적 환경이라고 비판하고 있다. 이러한 상황에서 학생들은 교과서에 제시된 이론적인 지식을 자신의 지식 구조에 추상적인 기호로 저장하였다가 나중에 직면하는 실제적인 상황에서 그 지식을 재생하여 적용하여야 하지만 실제로는 성공하기 어렵다는 것이 그의 주장이다. 상황인지론은 전통적인 학습을 통하여 획득한 지식을 다른 상황으로 적용할 수 없는 이러한 문제점을 해결하기 위해 도입된 것이다(St. Julien, 1992, 1994).

지식이 상황과의 상호작용 과정에서 구성된다는 상황인지론자들의 주장은 Lave(1988)의 연구에서 잘 드러난다. 그녀는 슈퍼마켓에서 물건을 사는 사람이 슈퍼마켓 상황에서는 거의 100% 정확하게 계산을 수행하면서도 '동일한' 문제를 지필환경에서 수행했을 때는 성공률이 2/3수준으로 낮아졌음을 관찰하고는 다음과 같은 주장을 하였다.

> 가능한 환경 속에서 개인이 할 수 있는 활동들은 ……쇼핑의 과정과 무엇을 살 것인가에 대한 사는 사람의 기대에 대한 구조에 달려 있다. 야채를 사는 활동의 상황은 이들 두 종류의 구조 사이의 관계를 개념화한 것이다. 즉, 활동을 하는 사람과 구조화된 상황 사이의 관계를 규정한 것이다(p. 152)(박성선, 1998에서 재인용)

Lave의 주장은 상황 자체가 문제를 만들고 상황에서의 풀이를 구성한다는 것이다. 여기서 주목할 것은 사람들은 활동 과정에서 풀이를 구성하고 이러한 풀이들은 활동에 의해 구조화된다는 것이다. 사람들이 전통적인 의미에서의 학교수학이라 할 수 있는 계산 방법을 피하는 것은 학교수학으로서의 계산이 너무 어려워서가 아니라 슈퍼마켓 쇼핑의 실제에도 그 나름대로의 방법과 의미를 형성하는 메카니즘이 존재하기 때문이라 할 수 있다(Noss & Hoyles, 1996).

Nunes, et al(1993)은 거리수학과 학교수학에 관한 연구에서 이러한 수행에서의 차이를 거리수학의 구두 표현과 학교수학에서의 기록에 의한 표현 사이의 차이로 설명하고 있다. 지필환경에서의 표현이 상황의 의미를 소홀히 하고 문맥적 규칙에 집중을 하는 반면, 거리수학의 구두 표현은 문맥적 규칙을 덜 강조하고 상황의 의미에 초점을 두는 것이 수행에서의 차이를 가져온다는 것이다. 직육면체의 대각선의 길이를 재는 목수의 방법이 아주 간단한 반면, 학교수학에서 직육면체의 대각선의 길이는 피타고라스의 정리를 이용할 수 있는 능력을 요구한다는 사실도 이러한 맥락에서 해석할 수 있다. 목수의 방법은 수학적인 구조에 의존하지 않고 주어진 상황을 이용한 것이다.

상황은 인간의 사고와 인지에 매우 중요한 역할을 하고, 따라서 수학수업은 실제적으로 유의미한 상황적 경험을 통하여 이루어져야 하며, 학습자는 그 상황 내에서 능동적인 동참자로 상황화될 필요가 있다는 주장은 수학의 유용성이라는 측면에서 수학교육적 의미가 있다. 이들의 입장에 따르면, 학습자들과 관련된 상황을 제공하여 의미 있는 수학활동이 수학교실에서 이루어질 수 있도록 해야한다.

2. 상황과 표현의 문제

상황인지론자들의 입장은 상황이나 현상을 수학화하는 과정에서, 수학화의 결과인 수학적 개념을 개념이 구성되는 상황과 분리해서 생각하지 않는 것이다. 전통적인 입장은 물리적인

현상이나 상황을 수학화하는 과정의 주요 초점을 기호적 표현을 통한 일반화와 추상화에 두고 있다. 후자의 입장에서는 수학화되는 상황과 수학화의 결과인 개념은 분리될 수밖에 없다. 고등수학으로 갈수록 일반화와 추상화는 점점 정교해지고 발달한다. 학생들이 수학을 특히, 고등수학을 어려워하는 이유를 수학의 일반성와 추상성에서 찾을 수 있다. 대부분의 연구는 일반화와 추상화의 문제를 인지적인 문제로 해결해 왔다. 그러나 상황인지론자들에 따르면 이러한 어려움은 인지적인 문제만이 아니라 일반화와 추상화가 상황과 유리되고 상황의 의미를 유지하지 못했기 때문이다.

상황인지론자들의 입장에서 표현은 상황을 추상화하기 위한 표현이 아니라 문제 상황에 내재되어 있는 표현으로 설명할 수 있다. Nunes, et al(1993)은 Vergnaud의 개념에 관한 이론을 이용하여 표현 문제를 논의하고 있다. 수학적 개념은 개념에 의미를 부여하는 일련의 상황, 개념의 본질적인 관계에 의해 구성되는 일련의 공통요소, 개념의 표현에 이용되는 일련의 기호가 포함되어 있다. 하나의 표현은 개념의 특징 중 일부만을 포함하며 다른 요소들은 고려하기 어렵다. 다양한 표현으로 상황을 나타내는 것이 중요하다. 전통적인 추상화에서의 문제는 기호에 의한 표현을 중시함으로써 상황의 의미를 표현에 담아내지 못하고 개념의 추상성만을 강조하는 데 있다. 구체물 자체도 구체적이고 조작이 가능하다는 점에서 가치가 있지만 결국은 인위적인 하나의 표현으로 수학적 체계와는 다른 요소들을 가질 수 있고 상황의 의미를 모두 포함할 수 없다는 점에서 한계가 있다.

여기서 중요한 딜레마가 생긴다. 수학의 중요한 특징인 추상화를 무시하고 수학을 생각할 수 있는가? Nunes, et al(1993)은 추상화의 문제를 거리수학에서의 실천적 쉐마의 유연성과 일반성으로 설명하고 있다. 거리수학은 실제 상황에 특수한 활동, 방법, 상황을 이해하는 사람들이 실천하는 수학이라 할 수 있다. 그는 사람들은 상황의 요소들을 관련시켜 상황을 표현하지만 그럼에도 불구하고 보다 일반적인 방법으로 발전시킬 수 있다는 것이다. 덧셈에 관한 일상 문제를 풀어 가는 과정에서 학교에서의 덧셈방법과는 다른 덧셈에 관한 일반적인 쉐마를 개발한다는 것이다. 문제 상황에서 자신들의 풀이의 의미와 정당성을 해석할 때 특수한 정보가 담겨있는 상황의 의미를 고려하여 결정하며, 상황의 특수성의 문제가 주어진 상황만을 이해하는 것으로 제한되지 않는다.

이들의 주장은 두 가지 측면에서 수학교육적 의미가 있다. 첫째, 상황을 수학화하는 과정에서 상황의 의미를 보존해야 한다는 것이다. 이러한 의미 보존의 문제는 지필환경에서는 실현시키기 어렵다. 둘째, 수학의 유용성이라는 수학교육의 측면에서의 가치다. 수학은 상황을 이해하기 위한 도구이며, 이러한 유용성을 인식하기 위해서는 수학이 이용되는 경험을 해야 한다. 그러나 학교에서 배운 추상적인 수학을 실제로 이용하고 있다고 생각하는 사람들이 많지 않다. 따라서 추상적인 수학 지식을 배운 다음에 적용할 수 있다는 암묵적인 가정은 이런 의미에서 재검토되어야 한다.

3. 학교수학에서의 상황적 표현

상황 내에서 구성되는 수학적 의미는 그들에 대한 표현과 밀접하게 얽혀 있다. 그러나, 일반적으로 학교수학에서는 수학적인 기호를 이용하여 상황과 관련된 요소들을 분리해서 추상적이고 일반적인 형태로 상황을 표현한다. 이러한 것이 수학을 어렵게 만드는 요인이 될

수 있으며, 상황에 관련된 요소들이 지니는 의미가 보존될 필요가 있다. 중요한 것은 일반적인 지식과 특수한 지식 사이의 갈등을 어떻게 극복할 것이며, 사고과정에서 표현의 중요한 형식들을 어떻게 유지할 것이냐에 있다. 학교수학의 수학화 과정에서 표현과 관련하여 고려해야 할 사항을 세 가지로 요약할 수 있다.

첫째, 학생들에게 의미 있는 상황을 구현하는 것이다. 이상적으로 볼 때, 의미 있는 상황이란 학생들의 사전 경험과 지식에 관련이 있으며, 상황에서 발생하는 문제를 학생들이 해결하고 싶다는 욕구나 해결해야겠다는 필요성을 인식할 수 있고, 수학적인 사고를 할 수 있는 내용이 포함된 상황을 말한다. 이러한 상황의 구현은 지필 환경으로는 여러 가지 제약이 따른다. 저자의 의도가 어디에 있든지 학생들이 받아들일 때, 무의미하고 재미없는 상황일 수 있다. 예를 들면, 미분 개념을 도입할 때 대부분의 교과서 저자들이 물체의 낙하에 관한 상황을 예로 제시한다.

> 물체가 자유낙하할 때, 낙하하기 시작하여 x초 후의 낙하한 거리를 ym라고 하면, x와 y사이의 관계는 $y=4.9x^2$인 관계가 있음이 알려져 있다.
>
> 이 식을 이용하면 낙하하기 시작하여 1초에서 3초 사이의 평균속도는 다음과 같이 구할 수 있다.
>
> $$\frac{4.9\times3^2-4.9\times1^2}{3-1}=19.6(m/\text{초})$$

물리에서의 자유낙하 운동에 관한 경험을 가지고 평균변화율의 개념을 도입하고 있는 위의 예에서, 학생들은 자신들과 관련이 있다는 생각이나 문제를 풀어야겠다는 욕구가 생길 수 있는지 의문스럽다. 위의 예는 내용이 변화를 다루고 있는 매우 동적인 상황임에도 불구하고 정적인 느낌을 주고 있으며, 학생들은 다음에 나오는 평균변화율과 미분계수의 개념으로 연결하지 않고 별개의 상황으로 해석할 수 있다.

둘째, 상황을 표현하는 과정에서 상황에 관련된 의미가 보존되어야 한다. 수학은 추상적인 학문이며 다른 학문과는 달리 실제로 존재하는 물리적 대상을 다루는 학문이 아닌 것으로 간주되어 왔다. 물리적 세계를 다루는 아동의 직관과 추상화된 수학적 내용의 문제는 여러 가지 어려운 상황을 만들어내고 있으며 사람들이 수학을 어려워하는 이유가 되고 있다. 따라서 수학교육은 아동의 사고의 직관성과 비형식성을 수학적 내용의 추상성 사이를 어떻게 연결시킬 것인가에 관심을 가져야 한다(신동선 · 류희찬, 1998). Noss & Hoyles는 추상화의 문제를 상황적 추상화 즉, 구체적인 연결이 풍부한 상태로의 추상화를 주장한다. 추상화의 어려움은 수학 내적 또는 수학과 일상생활 또는 직업생활과의 수학적 연결성으로 해결할 수 있다는 주장으로 해석된다. 지필환경에서는 근본적으로 실현이 어렵다. 상황에서의 수학적인 요소들을 기호로 표현하는 순간 상황에 관련된 의미는 보존되기 어렵기 때문이다. 학교교육이 탈맥락화되었다는 문제 제기는 이러한 상황에 관련된 의미를 보존하지 못한 채 일반화와 추상화를 강조하는 데서 비롯된다. 앞의 예에서 물체가 낙하운동을 하는 현상을 수학적으로 표현할 때 상황의 의미가 전달되기 어렵다. 의미보존의 문제는 다음의 다양한 표현사이의 연결과 밀접한 관련이 있으며, 컴퓨터가 중요한 역할을 할 수 있다.

셋째, 다양한 표현이 제공되고 이러한 표현 사이의 연결이 이루어져야 하며 전체적으로 상황에 관련된 의미들을 유지해야 한다. 수학 학습에서 가장 이상적인 방법은 동일한 수학적 대상에 대해 구체적이고 다양한 표현을 이용하는 것이다. 이러한 그의 학습원리를 구현한 것

의 대표적인 것이 소위 십진(딘즈) 블록이다. 그러나 십진 블록을 이용한다고 해서 학생들이 십진 블록을 10진수의 수 체계와 연결시킬 것이라는 점을 보장할 수 없다. 여기에는 구체물인 십진 블록에서의 인지적 활동과 기호적인 수 체계에서의 인지적 활동 사이를 번역하는 문제가 발생하며, 학생들의 인지적 장애가 발생할 수 있다. Kaput(1992)은 컴퓨터 상에서 표현 체계 사이를 연결함으로써 인지적 부담을 줄일 수 있지만, 궁극적으로는 학생들에게 익숙한 상황을 묘사하고 같은 화면상의 다른 체계에서 조작이 용이한 상황에 대한 수학적 표현을 하는 것이 수학학습에 더욱 효과적이라고 주장한 바 있다. 그는 최근(1996, 1999) 발표한 논문에서 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 이를 구체화하였다. 이에 대한 것은 다음절에서 상세히 논의한다.

앞의 예에서 물체를 자유낙하 하는 상황을 컴퓨터에 실현시키고 물체가 낙하하는 과정을 $y=4.9x^2$라는 식과 그래프를 구현시키고 학생들이 이를 조작하는 가운데 여러 가지 상황을 실험하고 탐구하면 더욱 효과적일 것이다. 또한 동시에 선형 변화의 상황을 구현하여 비교하는 것도 생각할 수 있다. 그러나, 수학적 개념과 관련된 상황을 모든 수학적 개념에 대해 만들 수 있느냐의 문제와 컴퓨터 상에 구현된 가상 상황이 얼마나 정교하고 실제 상황과 관련이 있느냐 하는 기술상의 문제가 존재한다.

III 표현에서의 컴퓨터의 역할

컴퓨터의 발달은 일상생활이나 전문분야는 물론 수학자들의 연구 활동을 변화시켰다. 컴퓨터는 복잡한 계산, 절차 수행, 알고리즘은 물론 다소 논란이 있긴 하지만 증명까지도 가능하다. 계산기와 컴퓨터가 복잡한 계산 과정을 대신함으로써 계산에 대한 부담에서 벗어나 문제의 핵심 탐구에 집중할 수 있고 계산기 없이는 불가능할 수도 있는 문제에 접근이 가능하며, 수학적 패턴과 개념을 탐구하는 데 계산기가 유용하다(Shuard, et al., 1994; Becker, 1998에서 재인용). 컴퓨터 소프트웨어를 적절히 사용한다면 지필 계산이나 의미 없는 절차 연습 등은 줄어들고 수학화, 비교적 복잡한 상황의 모델링과 시뮬레이션, 컴퓨터 상에서의 표현의 명료화, 다양한 수학적 표상 사이의 번역, 역동적인 도형들의 변화 탐구 등의 기회가 많아지고 학생들의 능동적인 수학적 의미 구성에 도움이 될 것이다. 또한 수학화 과정에서 상황의 의미를 유지함으로써 의미 있는 수학 수업이 가능하다.

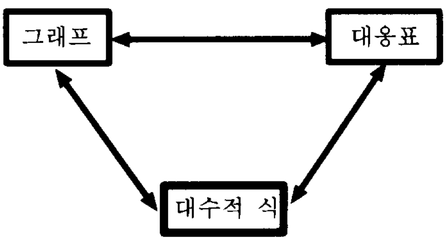
1. 수학적 표현 사이의 연결과 번역의 문제

수학적 연결은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 하나는 실세계 또는 다른 교과에서 제기되는 문제 상황과 그 상황에 대한 표현 사이의 연결이고 다른 하나는 서로 다른 수학적 표현과 각 표현에서 발생하는 과정 사이의 연결이다. 이러한 수학적 연결은 문제해결 도구로 이용될 수 있으며, 학생들이 수학의 유용성을 경험하고 실제 상황에서 수학을 행하고 발명하는 가운데 수학적인 사고방법을 기를 수 있다.

중등학교에서 함수 교수학습에서 식, 대응표, 그래프를 연결하는 것이 학생들의 함수개념 이해에 도움이 된다. 그러나 지필환경에서는 역동적인 연결이 곤란하며 이것이 학생들이 수학을 어려워하는 한 이유가 될 수 있다. 예를 들어, 중학교 1학년 교과서에 나오는 $y=2x$의 그래프를 도입하는 과정을 보면 대응표를 그리고 대응표에 나타난 순서쌍을 좌표평면 위에

점으로 표시한다. 이런 과정에서 교사는 학생들이 대수적인 식과 대응표 그리고 그래프로 표현된 함수 개념을 상호 연결할 것이라는 기대를 갖지만 학생들의 입장에서는 의미 있는 연결이 그렇게 쉽지는 않다. 더욱이 이러한 그래프 표현 과정은 그 이전에 배운 집합과 집합의 대응관계라는 함수의 정의과정에 나타나는 다이어그램 표현과 잘 연결되지 않는다.

또한 지필환경에서 이루어지는 이러한 연결은 식→대응표→그래프의 한 쪽 방향으로만 이루어지고 학생들은 연결 과정에서의 역동적인 표현 사이의 관계를 파악하는 데 인지적인 어려움이 따른다. 함수 지도에서 대수적인 식으로 나타낼 수 있는 함수만을 주로 다루거나 (<그림 1>에서 식의 부분이 진하게 표시됨), 식을 그래프로 표현하는 것만 강조하여 양과 양 사이의 변화 관계라는 역사발생적인 함수의 의미를 학생들이 이해하고 함수개념을 실제 상황에서 적용하는 데 어려움을 겪고 있다.

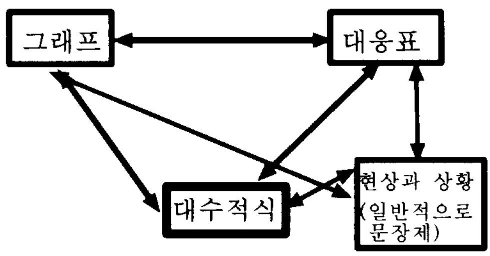


<그림 1> 표현 사이의 연결(Kaput, 1996)

함수의 표현 사이의 번역에서 발생하는 인지적인 부담을 해결하는 데 컴퓨터가 이용될 수 있다. 컴퓨터 상에서 수학적 표현들의 구체적인 연결을 구현하여 한 표현에서의 변화가 동시에 다른 표현에서의 변화와 어떻게 관련되는 지를 보여주는 것이다. 학생들은 하나 하나의 표현을 해석하고 연결하는 부담을 줄임으로써 표현 사이의 관계를 탐구하고 수학적 아이디어를 전체적으로 통합하는 데 집중할 수가 있다<그림 1>. 최근 컴퓨터 소프트웨어의 발달과 상호작용 성격으로 쌍방 연결이 가능해졌으며 학생들은 보다 역동적인 방법으로 활동하고 탐구할 수 있게 되었다. 그러나, 함수가 관련된 상황과 유리된 그래프, 식, 대응표의 관점에서만 엄격히 학습되면 선형함수에 대한 이해가 충분히 구성될 수 없다. 컴퓨터 상에서 구체적 연결이 이루어지고 개념적인 의미가 구성된다 하더라도 학생들이 함수의 의미 구성에는 충분치 않다.

2. 문장제에서의 번역의 문제

앞에서 논의했듯이 표현은 무엇인가 관련된 것을 나타낼 필요가 있다. 즉, 표현 사이의 연결도 중요하지만 그 표현들이 무엇을 나타내고 있는지를 고려해야 한다(Kaput, 1998). 표현에는 학생들의 물리적 경험, 상상에 의한 경험, 감정적인 경험 등에서의 정황이 관련되어 있어야 하며, 전통적인 학교수학에서는 이러한 정황의 문제를 문장제로 다루고 있다.



<그림 2> 표현들과 현상 또는 상황과의 약한 연결(Kaput, 1996)

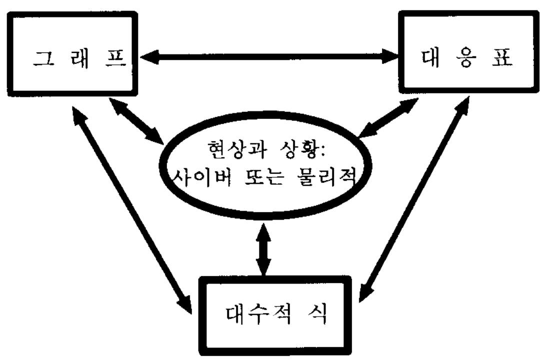
교과서 저자나 교사는 문장제에서의 정황이 학생들의 마음속에서 함수에 대한 수학적 표현들과 연결되리라고 기대를 한다. 그러나, 이러한 연결이 쉽지는 않으며 학생들은 일반적

으로 문장제를 어려워한다. 역사적으로 수학적 기호를 현상과 상황에 연결시키려는 시도는 학생들의 직접적인 형태로 경험하지 못한 현상과 정황을 문맥적으로 기술하는 방법으로 이루어져 왔으며, 학생들은 문장제에 나와있는 현상과 상황을 개념적으로 연결하는 데 어려움을 겪는다. 학생들 대부분이 문장제 이해는 물론 아이디어를 표현하고 조작하는데 필요한 모델과 언어에 관한 이해가 부족하다(김선화, 1992).

기호와 기호 사이의 연결은 물론 모델링에 이용되는 현상과 상황에 대한 의미의 상호구성은 진정한 의미에서의 학생들의 경험을 바탕으로 하지 못하고 있기 때문이다. 따라서 학생들은 주어진 현상과 상황을 자신과는 관계없는 것으로 보고 흥미를 잃거나 관련된 수학을 찾아내지 못하며 결국은 수학적 의미를 구성하는데 실패하게 된다. 중요한 것은 학생들의 경험을 토대로 한 현상과 상황과의 연결이 필요한 바, 이 때 요구되는 현상은 교수학습의 내용이나 목적에 따라 다양하게 제시되어야 한다(Kaput, 1998). <그림 2>는 함수의 여러 가지 표현과 실세계와의 연결을 문장제로 나타낸 전통적인 교과서의 내용을 컴퓨터 상에서 연결한 것이다. 이 경우 표현과 표현사이의 번역, 문장제와 표현 사이의 번역의 인지적인 부담이 줄었지만, 문장제 자체는 상황의 의미가 제한적으로 전달될 수밖에 없으며, 역동성이 결여되어 있다는 문제점을 여전히 갖고 있다.

3. 컴퓨터를 이용한 상황적 연결

이상적으로 현상과 상황은 학생들이 학습상황으로 가져오는 여러 가지 자원들 즉, 학생들의 직·간접 경험은 물론 어느 정도의 일반성을 구현한 것이어야 한다. 학생들과 보다 직접적으로 관련이 있는 현상과 상황을 함수의 여러 가지 표현과 관련시킴으로써 학생들은 일상 생활에서의 현상을 함수 개념으로 해석할 수 있다는 인식을 하게 되고 학생들이 구성하는 함수의 의미는 더욱 강력해질 수 있다(그림 3). 상황인지론에 따르면 상황은 학생들의 수학적 과제 수행과 밀접하게 관련이 있다. 상황에 관련된 의미가 수학적 표현과정에서 보존하는 문제는 학생들의 문제해결 수행에 영향을 끼칠 수 있다. 학생들의 사전 경험과 지식을 고려하여 상황을 구성하는 것이 중요하다. 문제는 상황과 현상에 관한 학생들의 관찰과 탐구 과정에서의 수학적 아이디어들을 수학적인 표현과 어떻게 연결할 것인가에 있다. 상황에서의 의미를 상실하지 않고 수학적으로 표현하고 이를 해석하는 과정은 수학의 추상성과 맞물려 수학을 어렵게 하는 최대의 난제가 되고 있다. 구체적이고 직관적인 경험과 추상적이고 탈상황화된 수학적 지식을 분리하지 않고 수학자들이 수학을 만들어 가는 수학적 활동을 수학교실문화로 정착시켜야 한다.



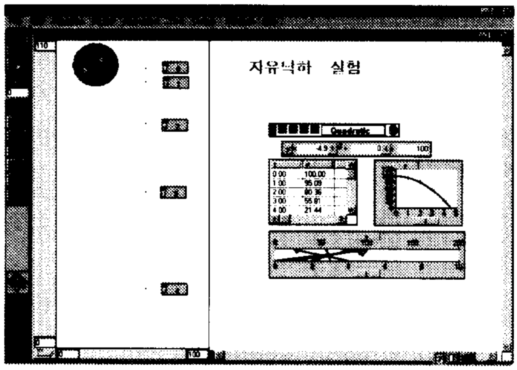
<그림 3> 표현들과 현상 또는 상황과의 강한 연결(Kaput, 1996)

컴퓨터 소프트웨어의 발달은 추상적인 수학을 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 학생들이 자신들의 생활에서 의미 있는 요소들을 표현하고 해석하는 수단으로 수학을 이용하

는 경험을 할 수 있게 해준다. Kaput & Roschelle(1999)는 컴퓨터 시뮬레이션과 에니메이션을 이용하여 학생들의 운동에 대한 경험을 컴퓨터 상에서 사이버 경험으로 전환하고 이를 다시 수학적 표현과 개념으로 연결하는 연구를 수행하였다. 초등학생들을 대상으로 한 연구에서 그들은 컴퓨터와는 연결되지 않은 육체적 운동으로 탐구를 시작한 다음 컴퓨터로 가서 사이버공간에서의 움직임을 컴퓨터 표현으로 정확히 통제하면서 실제의 운동과 가상적인 운동을 비교하고 자료를 통해 서로 연결한다. 학생들은 이러한 일련의 활동 과정에서 평균치의 개념을 수학적으로 탐구한다. 이들의 연구는 실제의 경험과 사이버 경험 그리고 수학적인 표현과 개념을 연결시키고 있다.

상황과 수학을 연결시키려는 시도는 Noss & Hoyles(1996)의 연구에서도 나타난다. 프로그램밍 언어 LOGO를 이용한 연구에서 실제 상황에서의 수학과 학문적인 수학을 연결할 때의 어려움을 수학적 추상화로 보고, 연결과정에서 실제 상황에 내재되어 있는 수학적인 요소들, 아이디어, 활동의 연결망으로 구축된 마이크로 월드를 이용하여 이 문제를 해결하려고 하였다. 마이크로 월드는 대상들을 구성하기 위한 도구이자 동시에 관계들을 포장한 대상이 된다. 학교 밖의 문화에 내재되어 있는 의미와 학교수학에서 구성된 수학적 의미 사이의 연결이 컴퓨터를 이용하여 구현할 수 있다는 것이 이들의 주장이다. 그들은 또한 최근의 연구(1999)에서 일상생활이나 전문적인 생활에서 사람들이 수학이 이용되고 있음을 잘 인식하지 못하고 있다는 인식 하에 학문적인 수학과 실제수학의 관계와 영향을 조사하는 연구를 수행하였다.

여러 가지 소프트웨어의 개발로 컴퓨터를 이용하여 실제적인 수학과 이론수학을 연결하



<그림 4>

려는 시도들이 늘고 있다. 장경윤 외(1998)에 따르면 대수와 함수지도 초기에 효과적으로 활용할 수 있는 ALGEBRA ANIMATOR도 실생활과 유사한 문제상황을 학교수학으로 연결하는데 유용하다. <그림 4>는 ALGEBRA ANIMATOR를 이용하여 미분의 도입단계에서 일반적으로 제시되고 있는 자유낙하 실험을 구현한 것이다. 실제 상황은 아니지만 실제 상황과 유사한 사이버 상황을 제공함으로써 학생들은 농구공이 떨어지는 속도가 점차 빨라진다는 사실을 관찰할 수 있고 평균속도에 대한 의미 있는 개념과 이를 평균변화율, 미분개념과 관련시킬 수 있을 것이다. 또한 이러한 상황을 수학적인 표현 즉, 그래프, 대수적 식, 다이어그램, 대응표와 연결시킴으로써 변화율 개념의 역동성과 기존의 함수개념과의 연결도 가능하다.

IV. 결론 및 제언

본 논문에서는 수학화 과정에서의 추상성의 문제를 해결하는 방안의 하나로 상황의 의미를 유지하면서 표현하는 방법을 제시하였다. 컴퓨터 상에 역동적으로 움직이는 사이버 상황을 구현하여, 실제 상황과 유사한 맥락에서 실

험을 하고 수학적인 표현으로 연결하는 경험을 할 수 있다.

수학은 우리의 경험 세계를 해석하고 이해하는 수단이자 동시에 그러한 과정에서 개인적인 수학적인 사고와 다른 사람들과의 의사소통을 통해 만들어진 인간 활동의 산물이다. 학교 수학에서는 이러한 수학의 특성을 균형 있게 반영해야 한다. 학생들의 경험세계와 관련된 상황과 연계해서 수학적 개념을 탐구하고 발명하는 기회를 제공함으로써 수학 개념에 대한 이해를 풍부히 해야 하고, 그 과정에서 수학의 유용성을 경험하게 해야 한다.

그러나, 수학의 유용성과 실용성에 대한 중요성이 끊임없이 제기되어 왔음에도 불구하고 현재의 학교교육은 이를 충분히 반영하지 못하고 있다. 만들어지는 과정으로서의 수학이 아니라 누군가 만들어 놓은 결과로서의 수학을 받아들이는 형태로 수학교육이 이루져 왔으며, 학생이나 교사 모두가 수학의 유용성과 실용성을 경험하지 못하고 있다. 이러한 이유중의 하나는 전통적인 지필 중심의 교육환경에서 찾을 수 있다. 지필환경은 정적일 수밖에 없고 복잡한 상황의 여러 가지 관련된 요소들을 담아내기 어렵다.

따라서, 수학교육의 중요한 문제 중의 하나는 실제 상황에서 이용되고 있는 수학을 학생들이 경험하고 인식하도록 하는 것이고, 그러려면 학교수학에서도 이를 다루어야 한다. 그러나 두 가지 수학을 연결하는 문제는 복잡하며 특히, 실제상황의 구현과, 이들과 여러 가지 수학적 표현사이의 연결 방법에 관한 문제는 아주 중요하다. 전통적인 정적인 지필환경으로는 제한적일 수밖에 없다. 최근 소프트웨어의 발달은 이러한 수학교육의 문제를 해결할 수 있는 대안을 제시하고 있다. 컴퓨터 상에서 실제 상황과 유사한 사이버 환경을 구축하고 상황과 수학적 표현 사이, 수학적 표현들 사이를 연결함으로써, 학생들이 이를 이용하여 사고실험 활동을 하고 수학을 발견 또는 재발명하는 경험을 할 수 있으며, 학생들은 수학적 개념을 이해하고 실제상황에서 수학이 유용하다는 사실을 인식할 수 있을 것이다.

그러나, 사이버 상황의 단순성과 소프트웨어의 미비점을 보완해야 하는 문제가 있으며, 특히 수학의 본질적인 특징인 추상화의 문제를 상황적 연결에서 어떻게 해결해야 하는가에 대한 문제가 있다. 또한 실제로 학생들이 이러한 소프트웨어를 이용할 때 어떤 문제가 발생하는지 그리고 기대했던 효과가 나타나는지에 대한 사례연구가 요구된다.

참고 문헌

김선화 (1991). 표현의 문제에 대한 수학교육적 고찰: 함수영역을 중심으로. 대한수학 교육학회 논문집, 창간호.

박교식 (1998). 우리나라 초등학교 수학의 정체성에 관한 연구. 대한수학교육학회, 8(1). 89-100.

박성선 (1998). 수학학습에서의 상황인지론 적용과 전이에 관한 연구. 한국교원대학교 박사학위 논문

류희찬 (1998). 탐구형 소프트웨어를 활용한 '열린' 수학교육. 열린교육의 이론과 실제 167-181.

신동선, 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터 서울: 경문사.

윤옥경 외(199). 고등학교 수학 I 서울: 중앙교육진흥연구소.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초 서울대학출판부.

장경윤 외(1998). 대수학습에서의 모의실험 도구: ALGEBRA ANIMATOR. 수학교육연구발표대회논문집, 221-244.

Becker, H. J. (1991). How computers are used in United States schools: Basic data from the 1989 IEA computers in education survey. *Journal of Educational Computing Research*, 7, 385-406.

Davis, P. J., & Hersh, R.(1981). *The mathematical experience*. 양영오, 허민(공역). 수학적 경험 서울: 경문사.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking process. In T. Davis(Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.25-41). Dordrecht: KAP.

Julien, J. St.(1997). Explaining learning: The research trajectory of situated cognition and the implications of connectionism. In D. Kirshner & J. A. Whitson(Eds.), *Situated cognition : Soial, semiotic, and psychological perspectives*. London : LEAP.

Kaput, J. J.(1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.515-556). NY: Macmilan P.C.

Kaput, J. J. (1996, 10). The role of physical and aybernetic phenomena in building intimacy with mathematical reprisentations. *Mathematics for the new millennium: What needs to be changed and why?*, (pp.38-43). Mathematical Sciences Group Institute of Education.

Kaput, J. J., & Roschelle, J.(1999). The mathematics of change and variation from a millinnial perspectives: New content, new context. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse(Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp.155-170). London: Falmer Press.

Kilpatrick, J., & Davis, R. B.(1993). Computers and curriculum change in mathematics. In C. Keitel & K. Ruthven(Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology*. Berlin: Springer-Verlag.

Kirshner, D.(1997). Editors' introduction to situatied cognition : soial, semiotic, and psychological perspectives. In D. Kirshner & J. A. Whitson(Eds.), *Situated cognition : Soial, semiotic, and psychological perspectives*. London : LEAP.

Lave, J. (1997). The culture of acquisition and the practice of understanding. In D. Kirshner, J. A. Whitson(Eds.), *Situated cognition : soial, semiotic, and psychological perspectives*. London : LEAP.

Leont'ev, A. N.(1981). The problem of activity in psychology. In J. V. Wertch(Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk., NY: Sharpe.

Nemirovsky, R. (1996). Mathematical narratives, modeling, and algebra. In Bednarz, N. et al(Eds.), *Approaches to algebra*. Dordrecht : KAP.

Noss, R., & Hoyles, C . (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures nd computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Rogoff, B.(1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social* context. Oxford: Oxford university press.

Scribner, S. (1984). Studying working intelligence. In B. Rogoff & J. Lave(Eds.), *Everyday cognition* (pp.117-138). Cambridge, MA: Havard University Press.

A Study of the Mathematical Representation in using Computer

Lew, Hee Chan · Cho, Wan Young

Mathematics is means for making sense of one's experiential world and products of human activities. A usefulness of mathematics is derived from this features of mathematics. Keeping the meaning of situations during the mathematizing of situations. However, theories about the development of mathematical concepts have turned mainly to an understanding of invariants.

The purpose of this study is to show the possibility of computer in representing situation and phenomena. First, we consider situated cognition theory for looking for the relation between various representation and situation in problem. The mathematical concepts or model involves situations, invariants, representations. Thus, we should involve the meaning of situations and translations among various representations in the process of mathematization. Second, we show how the process of computational mathematization can serve as window on relating situations and representations, among various representations. When using computer software such as ALGEBRA ANIMATION in mathematics classrooms, we identified two benifits. First, computer software can reduce the cognitive burden for understanding the translation among various mathematical representations. Further, computer softwares is able to connect mathematical representations and concepts to directly situations or phenomena. We propose the case study for the effect of computer software on practical mathematics classrooms.