大韓數學敎育學會 論文集 第 8 卷 第 1 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.1, 381-403. July 1998

학교수학에서의 함수 개념 지도 방법에 관한 고찰*

강윤수** 정성현*** 강덕심****

Ⅰ. 머리말

우리는 수학교육을 논할 때 다음 세 가지를 염두에 둔다.

첫째, 무엇을 가르칠 것인가?

둘째, 왜 가르치는가?

셋째, 어떻게 가르칠 것인가?

이것은 교육 내용, 교육 목적, 교육 방법을 말하는 것으로서 학문으로서의 수학교육학은 이들 세 가지로 구성되어 있다고 말할 수 있을 것이다. 수학교육에 종사하는 이들은 이것들 중에서 특히 어느 하나에 관심이 있을 것인 바, 그것은 그들의 연구 목적과 처해 있는 위치에 의해 관심의 경, 중이 달라질 수 있다. 그러면, 중등학교에서 수학교육을 담당하는 교사들은 어떤 분야에 관심이 가장 많을까? 경우에 따라서 다를 수 있겠지만 아마도 교육 방법에 관한 관심이 가장 클 것으로 생각된다. 이러한 추측이 가능한 이유는 교육 내용과 교육 목적은 여러 과정을 거쳐서 이미 결정된 내용이므로 교사 개인이 자의적으로 변경 가능한 경우는 거의 없어[1] 보이기 때문이다. 그러나, 교육 방법에 관해서는 상황이 많이 달라진다. 같은 내용을 가르칠 때에도 그 방법은 여러 가지가 있을 수 있으므로 교육 방법에 관한 한 교사의 역할이 가장 강조되는 분야이다. 특히 수학교육에 있어서는 같은 문제 상황에서도 그 해결 방법이 많이 있고 그 방법들이 나름대로의 가치를 가질 수 있기 때문에 수학 교사는 같은 문제에 대한 다양한 해결 방법을 알고 있어야 하고 그 방법들에 대한 가치 비교가 가능한 능력을 갖춰야 할 것이다. 수학교육에서 교육 방법에 관한 이러한 입장은 수학적 개념을 설명할 때 더욱 더 강조되는데 그것은 개념 지도 방법이 여러 가지이고 누구나 인정하는 또는 언제나 옳다고 말할 수 있는 방법이 존재하기 어렵기 때문이다. 따라서 유능한 수학 교사가 되기 위해서는 수학적 개념의 지도 방법에 관한 연구를 게을리 할 수 없고, 또 이러한 연구가 항상 가능하도록 그 환경이 조성되어져야 한다. 그러나 우리의 교육 현실은 어떠한가? 교사들은 과중한 수업 부담과 여러 가지 잡무로 인해 차분하게 연구할 시간적 여유를 갖기 힘들다. 그렇다고 다양한 개념 지도 방법을 모두 포함한 교재를 구성하기는 불가능하다. 왜냐하면, 수학 학습 지도는 대상 학생들과 다양한 교육 상황을 고려해야 하기 때문이다. 그렇다면 대개의 학습

---

* 이 논문은 1997년도 순천대학교 공모과제 학술연구비에 의하여 연구되었음.
** 순천대학교
*** 순천여자중학교
**** 순천동산여자중학교

1) 물론 교사의 교육관에 따라 교육 목적에 관한 관점에 다소의 차이가 있을 수 있고 교육 내용에 관해서도 정해진 틀을 벗어나지 않는 정도의 미세한 조정은 가능할 것이다.

상황에 맞게 일반적인 관점에서 개괄적으로 구성된 교재를 그때 그때의 교육 상황에 적합한 교재로 재구성하는 일은 누가 해야 하는가? 그것은 바로 담당교사의 몫이다. 개개의 수학교사가 끊임없이 연구해야 할 이유가 여기에 있다. 그러나, 이미 언급한 바와 같이, 우리의 교육 현실은 교사가 교재 연구에 충분히 시간을 투자할 환경을 제공해 주지 못한다. 수학교육의 주체는 분명 교사들이지만 그들이 훌륭한 수업을 할 수 있도록 좋은 교재를 개발하거나 또한 그들이 수업 연구에 열중할 수 있도록 분위기를 조성해 주는 건 수학교육 종사자들 공동의 몫이다. 이와 관련해서 다음과 같은 Hadar의 말[2]은 우리에게 시사하는 바가 크다.

> "수학을 배우려는 학생들의 동기유발과 또 수학을 대하는 그들의 태도를 다루는 힘겨운 싸움에서 학교 교사를 홀로 남겨두어서는 안 된다. 이 난제는 현직 교육기관 뿐만 아니라 교사 양성 기관의 손에도 달려있는 것이다. 교사들이 부딪치는 매일 매일의 어려운 과제들을 돕기 위하여, 교육과정에 포함된 모든 내용의 학습에 도움이 되는 여러 가지 교재의 개발이 필요하다."

최근 들어, 수학과 관련한 출판물들이 범람하고 있다. 이 중에는 교사가 수학교육에 활용할 수 있는 내용들도 다양하고 또한 많다. 오히려 어떤 것을 참고해야 할 지 판단이 서지 않을 만큼 복잡하고 다양하다. 더구나, 현재 진행되고 있는 수학교육에 관한 연구에도 관심이 있는 교사라면 매년 엄청나게 출판되는 논문들과도 씨름해야 한다. 그래서 교사들은 누군가가 많은 정보들을 간추려서 그들이 교수-학습과정에 참고하기 좋은 형태로 가공해주기를 바랄 것이다. 수학교육을 개선시킬 수 있는 주체로서의 수학교사의 이러한 입장을 이해한다면 현장 교사들이 수학 교수-학습에 적용하기 용이한 자료로서의 결과물들을 내놓은 것도 의미 있는 일이라 생각된다. 이런 관점에서, 본 논문에서는 학교수학에서의 차지하는 비중과 다른 학문에의 응용성을 고려할 때 가장 중요한 수학적 개념 중의 하나인 함수 개념에 대한 지도가 어떠해야 하는지를 선행 연구 결과들을 통해서 조명해 보고자 한다. 다시 말하면, 함수 개념의 본질에 대한 여러 관점들을 비교해 보고 그로부터 학교수학에서는 함수 개념 지도가 어떠해야 하는지를 살펴본다. 또한, 함수 개념과 관련된 수학적 개념들의 상호 연관성과 그 차이점을 고려한 지도 방법을 소개하고 중등학교에서 중요하게 다루어지는 다항식함수의 유용성을 대학 수학과 연계해서 고찰해 보고자 한다.

II. 함수 개념 지도의 관점에 대한 제 견해

여기에서는 함수 개념에 대해 그 '본질'을 무엇으로 볼 것인가 즉, '대응(correspondence)'으로 볼 것인지, 아니면 '종속(dependence)'으로 볼 것인지를 기준으로 해서 함수 개념에 대한 다음과 같은 세 가지의 관점을 생각해 본다.

(1) 실세계에서 지각되고, 상상되고, 그리고 가정되는 그러한 변수에 대해, 한 변수가 변화하면 다른 한 변수도 따라서 변화한다는 속성을 강조한 종속적인 관점.[3]

(2) '집합 X, Y 가 있을 때, X의 각 원

---

2) Nitsa Movshovits-Hadar, *School Mathematics Theorems - an Endless Source of Surprise,* For the Learning of Mathematics 8(3), 1988. p39.

3) 박교식, 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근, 서울대학교 수학교육과 박사학위논문, 1992.

소에 대하여 집합 Y의 원소가 하나씩 만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수'라고 하는 대응 규칙을 강조한 중간적인 관점.[4]

(3) 집합 X의 원소 x와 이것에 오직 한 가지로 대응하는 집합 Y의 원소 y를 택하여 만든 순서쌍 (x, y)를 원소로 하는 집합이 있을 때, 이 순서쌍의 집합을 함수라고 보는 집합론적인 관점.

위에서 말한 함수에 대한 세 가지의 관점에 대해 좀 더 구체적으로 살펴보고 중등학교에서 함수 개념을 지도하는 데 있어서 강조되어야 할 부분이 무엇인가에 대해 고찰해 보자.

우선, 함수 개념은 대응이 아닌 종속으로 지도되어야 한다고 보는 관점에 대해 살펴보자

박교식(1992)은 함수 개념의 지도를 시작하는 데 있어서 그 속성을 대응이 아닌 종속으로 봐야 한다고 하면서 교수현상학적인 관점[5]에서 함수 개념의 본질을 이해하고 그러한 바탕 위에서 함수 교육을 의미 있게 전개하자고 하였다. 그에 따르면, 함수는 사실상 물리적, 사회적, 정신적인 '변수'들 사이에 존재하는 '종속(dependence)'이라는 관련성을 조직하는 수단으로 생겨난 것이므로'대응(correspondence)'을 함수의 '본질'로 받아들여서는 안된다는 것이다. 이런 관점에서 그는 현행 학교수학에서의 함수 개념 지도에 대한 문제점을 다음과 같이 지적하고 있다.

함수 개념이 완성되기까지는 역사적으로 오랫동안의 수학적 사고의 활동이 필요했다는 것은 분명하다. 그럼에도 불구하고 지금까지의 함수 교육은 그와 같은 과정에는 거의 주목하지 않은 채, 단지 연역적 체계 내에서 잘 조직된 추상적 개념 그 자체만을 중요시하고 있다. 오늘날의 함수 개념 지도에서도 추상적인 집합론적인 함수의 개념 그 자체만을 '가르치는' 형식적 접근이 매우 우세하다. 그러나, 이와 같은 수학 교육은 반교수학적인 것으로서 본말이 전도된 것이다. 즉, 교수학적으로 볼 때, 뜨거운 발명과 차가운 아름다움이 서로 뒤바뀐 것이다. 다시 말하면, 학생들이 조직해 내어야만 하는 본질을 그대로 노출함으로써, 학생들로부터 발견의 기쁨을 빼앗고, 실제적으로는 전통적인 연역적 전개 형식을 벗어나지 못하고 있다는 것이다. 그는 현행 함수 교육의 이러한 두 가지 지배적 경향- 함수의 본질을 대응으로 간주하는 경향과 함수 교육에서의 형식적 접근 경향-의 허상을 보이고 그 대신 교수현상학적인 접근이 적절하다는 것을 주장하고 있다.

그에 따르면, 교수현상학적인 접근으로의 함수 교육의 출발은 적어도 '대응'은 될 수 없다는 것이다. 왜냐하면, 함수 교육에서의 교수현상학적인 접근은 함수 개념이 실세계에서 주어진 어떤 현상을 조직하는 수단으로 발명되어진 것처럼, 함수의 교수-학습에서도 그와 같은 현상에서 본질의 조직화 과정이 이루어져야 하는데, 이 때 현상과 본질은 상대적이어서 본질은 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되어지게 되는 바, 대응은 결코 최초의 본질이 아니기 때문이라는 것이다.

이제는 함수 개념 지도에 대한 두 번째 관점으로 현행 중등학교에서 취하고 있는 함수

4) 박두일 외, 중학교 수학1, 교학사, 1995.

5) 교수현상학적인 관점이란, 수학적 개념이 물리적, 사회적, 정신적 세계의 여러 현상을 조직하는 수단으로 발명되어져 왔다는 점에서, 교수-학습의 상황에서 수학적 개념을 그러한 여러 가지 현상과 관련하여 기술하고자 하는 것으로, Hans Freudenthal에 의해 제기된 교육 철학이다.(박교식, 1992)

개념 지도의 관점에 대해 알아보자.

현재 중등학교에서의 함수 개념 지도는 대응으로부터 시작된다. 여기에서의 논의는 개념 지도에 관한 것이므로 함수 개념 지도가 시작되는 중학교 1학년 교과서에 실려 있는 내용을 살펴보자.

대응 : 어떤 주어진 관계에 의하여 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 '대응'이라고 한다.

집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 대응하는 것을 기호로

$$x \rightarrow y$$

와 같이 나타내고, x에 y가 '대응한다'라고 한다.

함수 : 일반적으로, 집합 X의 각 원소에 대하여 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라 하고, 이 함수를 f라 할 때, 기호로

$$f: X \rightarrow Y$$

와 같이 나타낸다. 이 때, 집합 X를 함수 f의 정의역, 집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다.

변수 : 집합 X의 원소 x가 변하면 함수 f에 의하여 집합 Y의 원소 y도 변한다. 이러한 x, y와 같이 여러 값을 나타내는 문자를 변수라고 한다.

위에서와 같이 함수 지도를 대응으로 시작하는 즉, 함수의 본질을 대응으로 보는 관점은 이미 말한 함수 개념을 종속으로 보는 관점과 두 집합의 카티전곱의 부분집합인 관계의 일종으로 보는 관점 사이에 놓여 있다. 현재의 중등학교에서 취하고 있는 이러한 입장에서 우리는 다음과 같은 몇 가지 특징을 발견할 수 있다.

첫째는, 대응 중심적인 관점과 종속 중심적인 관점을 적절히 연결해 보려는 시도이다. 다시 말하면, 정의 자체는 대응 중심적으로 하고 구체적인 예를 들 때는 종속 중심적인 경향을 보인다. 이것은 집합론에 의존하지 않은 채로는 함수 개념을 표현하기 힘들기 때문일 것이다.

둘째는, 함수 개념 도입에 있어서의 간략화이다.

함수 개념을 도입하는데 있어서 곧바로 '대응'이라는 용어를 등장시킴으로써, 함수를 학습하는데 필요한 하위개념이 무엇인지, 함수는 왜 배워야 하는지 등을 생각해 볼 시간적 여유를 주지 못하고 있다. 이 부분에 대한 해결책으로 교사에 의한 적절한 운용 방법을 생각해 볼 수 있는데, 이는 교재연구 할 시간을 충분히 확보하고 있지 못한 교사들의 입장을 고려한다면 기대하기 쉽지 않다. 한편, 학생들의 입장에서 보면 여유 없이 제시된 '함수란, … 이다'식의 정의는 또 하나의 외워야 할 대상에 불과하다.

셋째는, 함수에 관련된 예의 빈약함이다.

앞에서 지적한 대로 종속적인 함수의 속성을 거부한 경우가 아니라면 최소한 현상학적으로 함수 개념을 받아들이게 하는 예들이 필요함에도 실제로는 함수의 정의를 잘 외우고 있는가를 확인하는 데 필요한 예들로 구성되어 있다.

다음으로는 함수 개념 지도에 대한 세 번째 관점에 대해서 알아보자.

함수 개념에 대한 이러한 정의 방식은 학

교 수학에서는 등장하지 않는다. 그 이유는 이러한 형태의 함수 정의는 극히 일반화되고 추상화되어 있어서 이러한 방법으로는 함수 개념의 본질을 이해시키기 어렵기 때문이다. 그러나, 함수 교육을 담당하는 교사들에게는 함수 개념의 본질이 무엇인가 하는 것 뿐 만 아니라 함수 개념이 어떻게 일반화되어서 하나의 수학적 연구 대상으로 자리잡게 되었는지에 대한 이해도 필요하다. 또한 교사는 일반화 된 함수 개념이 수학적 도구로서 어떤 역할을 할 수 있는지를 알아 둘 필요가 있다. 이는 수학 교육에서 강조하는 계통성을 살리는 교육을 하기 위한 최소한의 준비이기 때문이다. 그 구체적인 내용을 살펴보면 다음과 같다.

카티전곱: A, B를 두 집합이라고 하자. 이 때, $a \in A$, $b \in B$인 모든 순서쌍 (a, b)의 집합을 A, B의 카티전곱이라고 하며, $A \times B$로 나타낸다. 곧,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

두 집합 A, B(서로 다를 필요는 없다)에 대하여 A의 한 원소 a가 어떤 관계 R에 의하여 B의 원소 b에 관련되었다는 것을 카티전곱 $A \times B$안의 순서쌍 (a, b)를 이용하여 생각한다.

관계: A로부터 B로의 관계 R는 카티전곱 $A \times B$의 한 부분집합이다. 이 때, $(a, b) \in R$를 aRb로 나타내고 이것을 「a는 b와 R-관계가 있다」고 읽는다. 특히 A, B가 같은 집합, 곧 X일 때, R를 「X로부터 X로의 관계」라고 하는 대신에 「X에서의 관계」라고 한다.

역관계: 두 집합 A, B에 대하여 R를 A로부터 B로의 한 관계라고 하자. 이 때, 관계 R의 역관계 R^{-1}란 $bR^{-1}a$ 인 것은 aRb일 때 뿐인 B로부터 A로의 관계이다. 곧,

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

이다. R를 A로부터 B로의 관계라고 할 때, 집합 $\{a \in A \mid (a, b) \in R,\ b \in B\}$를 관계 R의 정 의역, 집합 $\{b \in B \mid (a, b) \in R,\ a \in A\}$를 R의 치역이라고 하고, 각각 $\mathrm{Dom}(R)$, $\mathrm{Im}(R)$로 나타 낸다.

이러한 '관계'의 정의로부터 다음과 같은 특별한 성질을 만족하는 관계(함수)를 정의한다.

함수: A, B를 두 집합이라고 하자. A로부터 B로의 함수란 (f, A, B)로 여기서 f는 다음을 만족하는 A로부터 B로의 한 관계이다.

(i) $\mathrm{Dom}(f) = A$

(ii) $(x, y) \in f$ 이고 $(x, z) \in f$ 이면 $y = z$.

(f, A, B)가 A로부터 B로의 한 함수일 때, (f, A, B) 대신에 $f: A \to B$로, 또 $(x, y) \in f$ 대신에 $y = f(x)$로 쓰는 것이 보통이다. 「$(x, y) \in f$」를 「$y = f(x)$」로 바꾸어 쓰는 것이 타당한 이유는 조건 (i),(ii)에 의해 각각의 $x \in A$가 $(x, y) \in f$ 인 유일하게 결정된 $y \in B$를 갖기 때문이다.

$f: A \to B$가 함수일 때, $y = f(x)$이면 y를 f에 따른 x의 상(image), x를 f에 따른 y의 원상(preimage)이라고 한다. 또, B는 함수 f의 공역이라고 한다.

이러한 함수 개념 도입 방법은 함수 개념이 수학적 개념으로 자리를 잡은 이후 수많은 세월 동안 그 본질이 변하고, 그 표현 방법이 개선되고 그리고 추상화, 일반화되어서 최후에 얻어진 가장 형식화되어 있는 형태의 함수 정의라 할 수 있다. 다시 말하면, 이러한 형태의 함수 정의는 물리적, 사회적 현상들에 대한 상호 연관성을 수량적으로 표현해서 실용적 목적에 사용해 보려는 의도는 퇴색되고, 그 대신 함수 개념이 하나의 수학적 사고의 대상으로 취급되기 시작하면서 나타난 결과이다. 물론 이러한 결과의 배후에는 집합론의 출현과 수학교육 근대화 운동 이후 학교 수학에서 집합론적 사고의 중용이 있었다.

III. 학교수학에서의 함수 지도

본 장에서는 함수 개념 도입 단계에서의 수업 상황을 설정하고 이 과정에 현행 함수 교육에서 생길 수 있는 학생들의 의문점을 노출시킴으로써 기존의 함수 지도 방법이 갖고 있는 문제점을 분석해 보고 그 개선책을 모색해 본다. 또한 함수 개념이 다른 수학적 개념들과 어떻게 연계될 수 있는지를 살펴보고 이러한 연계성을 강조한 하나의 학습 방법을 소개한다. 마지막으로, 중등 수학에서 다항식함수가 왜 중요하게 다루어지는가를 말하기 위해 대학수학과 연계한 다항식함수의 유용성을 고찰해 보고자 한다.

1. 함수 개념 도입 과정에서의 의문점 고찰

여기서는 오늘날 학교 수학에서 지도되고 있는 함수 정의의 형태에서 학생들이 가질 수 있는 의문점들을 살펴보고, 이러한 의문점들을 해소할 수 있는 지도 방법을 모색해 보고자 한다.

먼저, 현행 함수 지도 방법에서의 결함을 말하고 그 대안을 제시하기 위해 이미 언급한 함수 개념에 대한 세 가지 관점들에 해당하는 함수의 정의를 살펴보자.

정의A. 변수 y 의 값이 변수 x의 값이 변화하면 따라서 변할 때, y 를 x의 함수라고 한다.[6]

정의B. 일반적으로, 집합 X의 각 원소에 대하여 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y 로의 함수라 한다.

정의C. 집합 A로부터 집합 B로의 관계 R는 카티젼곱 $A\times B$의 한 부분집합이다.

R를 A로부터 B로의 관계라고 할 때, 집합 $\{a\in A \mid (a,b)\in R,\ b\in B\}$를 R의 정의역이라고 하고, Dom(R)로 나타낸다. 여기서, A로부터 B로의 함수 f 란 다음을 만족하는 A로부터 B로의 한 관계이다.

(i) Dom(f)= A

(ii) $(x,y)\in f$ 이고

$(x,z)\in f$ 이면 $y=z$.

오늘날 중등 수학에서 나타나는 함수의 정의(정의B)는 '정의A'와 '정의C'의 중간적인 형

6) 여기에서의 '변수'는 실세계에서 실제적으로 '변화하는 것'으로 지각되고, 이해되는 그러한 값으로의 변수로서, 오늘날 학교수학에서의 함수 정의에서 나타나는 두 개 이상의 원소로 구성된 집합의 원소를 나타내는 문자로 이해되는 '변수'개념과는 다르다.

태를 취하고 있는 것으로서, 긍정적으로 평가하면 두 가지 입장을 연결해 보려는 의도를 엿볼 수 있다. 그러나, 박교식(1992)은 함수의 본질을 '대응'으로 보는 이러한 입장에 대해 여러 각도에서 그 문제점을 지적하고 최소한 함수의 본질로 '대응'은 될 수 없음을 주장하였다. 그는 함수의 본질이 '종속'이어야 하고 그 지도가 교수 현상학적이어야 함을 말하고 그 이론적 근거를 제시하였다. 본 논문에서는 이러한 주장에 대해 근본적으로는 동의하면서[7)]현행 대응 중심적인 함수 정의에서의 개선점을, 교육 현장에서 생길 수 있는 상황을 예로 들어서, 살펴보고자 한다. 즉, 다음과 같은 함수 지도의 상황을 가정해 보자.

상황1

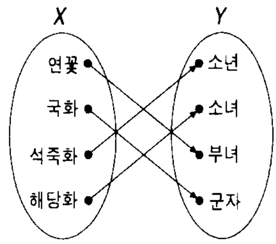
교사: 어떤 주어진 관계에 의하여 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 '대응'이라고 합니다. 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 대응하는 것을 기호로

$$x \rightarrow y$$

와 같이 나타내고, x에 y가 '대응한다'라고 합니다. 예를 들어,

'연꽃은 부녀요, 국화는 군자요, 석죽화는 소년이요, 해당화는 소녀로다.'

에서 꽃에 대응하는 사람을 그림으로 나타내면 다음과 같습니다.



[그림1]

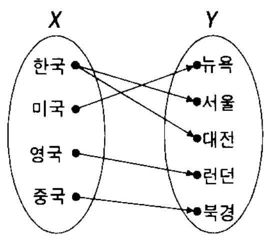
또 다른 예를 하나 더 들어봅시다.

다음과 같이 나라와 도시의 집합을 각각 X, Y라 하면

X = {한국, 미국, 영국, 중국}

Y = {뉴욕, 서울, 대전, 런던, 북경}

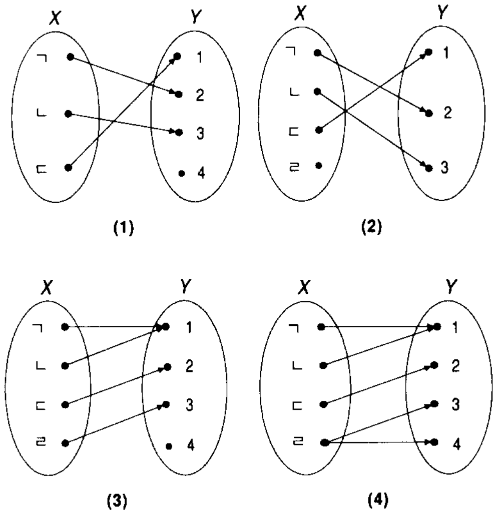
나라 이름과 그 나라에 있는 도시 이름의 관계는 또 하나의 대응이 되고, 이것을 그림으로 나타내면 다음과 같습니다.



[그림2]

일반적으로, 집합 X의 각 원소에 대하여 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 합니다. 그러면, 다음과 같은 여러 가지 형태의 대응중에서 함수가 되는 것들은 어떤 것들일까요?

7) 우리는 함수 개념 지도가 종속 중심적으로 되어야 한다는 데 근본적으로 동의한다. 다만 현행 학교 수학에서의 함수 개념 도입이 대응 중심적일 수밖에 없는 이유로 표현상의 문제 등이 있을 것으로 보고 본 논문에서는 종속 중심적인 것과 대응 중심적인 것의 연결을 시도해 보려고 하는 현행 함수 지도의 틀 안에서 개선점을 모색해 보려고 한다.



[그림3]

학생들: (1)과 (3)입니다.

교사: 그러면, (2)와 (4)는 왜 함수가 되지 않지요?

학생들: (2)에서는 'ㄹ'이 대응이 되지 않았고, (4)에서는 'ㄹ'이 '3'과 '4'로 대응되었기 때문입니다.

교사: 그렇지요. 그런 이유로 위에서 말한 함수의 정의를 충족시키지 못하기 때문에 (2)와 (4)는 함수가 되지 못합니다. 이제는 함수가 무엇인지 알겠지요?

학생들: 예

학생A: 선생님! 그러면, (1)에서는 '4'에 대응되는 원소가 없고 (3)에서는 'ㄱ'과 'ㄴ' 두 원소가 '1'에 대응되었는데 왜 함수가 되는 겁니까?

교사: 그것은 이미 오래 전부터 함수에 대한 정의를 그렇게 하였기 때문입니다.

학생A: 함수를 그렇게 정의한 이유는 무엇입니까?

교사: 그것은 수많은 시간 동안 필요에 의해서 변천되어 온 결과이기 때문에 짧은 시간에 설명하기 곤란합니다.

학생A: 그러면 함수는 어디에 이용됩니까?

교사: 그것은 고등학교나 대학교 과정에서 알게 될 것입니다.

위에서 예로 든 수업 상황은 함수 개념을 처음 배우는 중학교 과정에서 흔히 나타날 수 있는 경우이다. 그러면 여기서 '학생A'의 궁금증을 해소할 수 있는 적절한 설명 방법을 모색해 보기로 하자. 이것은 단편적인 하나의 상황에 대한 설명이 아니고 함수 개념을 도입하는데 있어서 곧바로 대응을 얘기하는 것이 적절하지 못하다는 것을 말하고자 함이다. 실제로, 대응의 특별한 경우로 함수를 설명하는 오늘날 학교 수학에서의 함수 지도 방법으로는 '학생A'의 의문점을 확실하게 해소해 줄 방법이 없어 보인다. 왜냐 하면, (1)과(2), (3)과(4)의 경우가 두 집합간의 대응으로서는 서로 비슷해서 함수의 정의를 외워서 그 조건에 맞는 경우를 찾아내는 정도를 함수에 대한 이해라고 보지 않고, 수학적 개념은 학습자 스스로에 의해 구성된다는 입장에서 본다면 위의 상황에서의 교사의 답변은 적절하지 못하다. 상당히 숙달된 교사에게서도 이러한 상황에서 학생들을 이해시킬 확실한 설명 방법을 기대하기는 힘들다. 그 이유는 현재의 함수 교육에서는 함수 개념이 생겨나서 수 세기에 걸친 변천 과정을 지나 오늘에 이르렀다는 사실이 반영되지 않았기 때문이다.

앞에서 이미 우리는 함수의 본질로 최소한 대응은 될 수 없다는 선행 연구자의 주장에 동의한다고 밝힌 바 있다. 여기서는 함수 개념의 지도 방법에 초점을 맞추고 있으므로 대응을 수단으로 해서 함수를 정의한 현행 중등학교 교재에서의 함수 지도 방법을 비판적 시각으로 고찰해 보고 그 개선 방향을 논해 보고자 한다.

그러면, 위에서 제시한 '상황1'에서의 '학생 A'의 의문점에 대한 답을 모색해 보기 위해 다음과 같은 두 가지 경우를 생각하자.

(a) 정의구역의 원소 중에서 대응되지 않은 것이 있다면 그 대응 관계는 함수가 아니다.

(b) 정의구역의 원소 중에서 공변역의 두 원소 이상에 대응되는 원소가 있으면 그 대응 관계는 함수가 아니다.

1

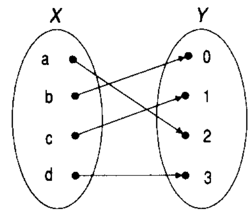
두 집합간의 대응 관계로 함수를 정의한 현행 함수 교육에서는 위의 (a),(b) 두 경우가 명확하게 설명되지 못하고 있다. 그 이유 중의 하나는 예로 든 대응 관계에 등장하는 집합들이 '의미 없는' 기호들로 구성되어 있다는 데 있다. 이는 본래의 함수 기원으로서의 '변하는 어떤 값에 따라서 변하는 값'의 의미가 현행 함수 개념 도입 부분에서는 반영되지 못하고 있다는 것을 의미한다. 따라서 현행 함수 지도 방법을 유지한 채로 종속 중심적인 함수의 속성을 살리려면 함수 개념 지도를 시작하는 단계에 등장하는 대응 규칙에서 실세계에 관련된 '의미'를 발견할 수 있게 해야 한다.

다음과 같은 예를 보자.

a집, b집, c집, d집의 자녀수가 다음과 같다고 하자.

가정	a집 b집 c집 d집
자녀수	2 0 1 3

위의 표에 나타나 있는 것과 같이 각 가정에 그 가정의 자녀수를 지정하는 대응을 그림으로 나타내면



[그림4]

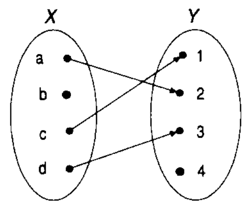
이 된다. 여기에서 정의구역 X와 공변역 Y는 각각

X = { a, b, c, d}

Y = { 0, 1, 2, 3}

이 되고 공변역 Y가 왜 0,1,2,3을 원소로 포함하는 집합이어야 하는지 그 이유가 분명해 진다.

만일, 공변역 Y가 1,2,3,4를 원소로 갖는 집합이라면 위의 대응은



[그림5]

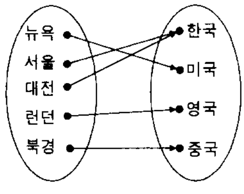
이 되는데 이러한 대응은 처음에 우리가 의도했던 내용을 전혀 반영하고 있지 못하고 있다. 다시 말하면, 위의 그림에서는 b가정에 대한 정보가 나타나 있지 않으므로 a,b,c,d 네 가정의 자녀수에 대한 비교를 목표로 했던 의도를 반영하지 못하므로, 이러한 경우를 '의미 없는' 대응이라고 해 두자.

다음으로는 (3)과 (4)의 차이점에 대해서 살펴보자.

이 두 경우를 단순한 대응으로만 비교하면 그 차이점을 설명하기 곤란하다. 그러나 위에서 살펴 본 바와 같이 어떤 경우가 의미 있는 대응인지를 살펴보면 그 차이는 분명해진다. 위의 '상황1'에서 예로 든 [그림2]의 경우를 보

자. 이 그림에서 우리가 얻을 수 있는 것은 각 나라에 그 나라에 속한 도시를 대응시켜 놓았다는 것 뿐, 그 이외의 정보는 얻을 수 없다. 언뜻 보아서는 충분히 의미 있어 보이는 이러한 경우에도 정의구역에 놓여 있는 나라들에 속한 도시들이 공변역에 나열 된 도시들만 있는 것이 아닌데, 공변역이 왜 그렇게 제한되어 있는지 설명이 되지 않기 때문에 의미 있는 대응이라고 보기 어렵다.

함수의 본질을 대응으로 본다고 하더라도, 정의구역의 원소가 공변역의 어떤 원소에 대응되는가 하는 것이 대응으로서 함수를 설명하는 핵심이 된다. 다시 말하면, 두 집합간의 대응으로 함수를 얘기할 때 우리가 관심을 갖는 대상들의 모임은 정의구역이고 이 대상들에 어떤 개체들을 대응시켜 주고자 할 때, 그 개체들을 포함하는 '임의의 집합'을 공변역으로 볼 수 있다. 이것은 일반적으로 함수를 생각할 때, 정의구역과 공변역이라는 두 집합을 동시에 생각하는 것이 아니고 우리가 관심을 갖는 대상들의 모임으로서의 정의구역을 먼저 생각하고 그 정의구역과 적용시키려고 하는 대응 규칙을 고려해서 공변역이 결정될 수 있음을 말해 준다. 따라서, 함수 교육에서, 이미 결정되어진 두 집합에 적당한 대응 규칙을 줘서 함수인지 아닌지를 결정하는 식의 지도 방법은 개선되어져야 한다. 이런 관점에서 본다면, [그림2]의 경우는 정의구역과 공변역이 바뀌어야 한다. 즉, 다음과 같은 대응도를 보자.



[그림6]

이 대응 관계는 정의구역에 속한 각 도시들이 어느 나라의 도시들인가를 의미하고 있으므로 [그림2]의 경우와는 달리 그 의미가 명확해진다. 물론 이 대응에서도 공변역은 '한국', '미국', '영국','중국'을 포함한 임의의 집합이 될 수 있고 그러한 임의의 집합으로 공변역을 대체한다고 해도 본래의 대응 규칙이 갖는 의미는 변함이 없다.

이상에서 살펴 본 바에 의해서 우리는 다음과 같이 주장한다.

> "함수 개념을 도입하는 단계에서 의미 없는 대응들을 예로 들어 함수 개념을 이해시키려고 하는 것은 좋은 방법이 아니다."

이러한 주장을 뒷받침하는 이유로 다음과 같은 몇 가지를 들 수 있다.

첫째, 의미 없는 대응관계로 함수를 설명한다면 여러 가지 유익한 정보를 제공해 주는 수학적 도구로서의 함수 개념의 유용성을 말할 수 없다.

둘째, 이와 같은 함수 개념의 도입 방법에는 종속 중심적인 함수의 속성이 내포되어 있지 못하다.

셋째, 이미 주어진 두 집합간에 대응 규칙을 줌으로써 정의구역과 공변역의 차이점이 드러나 있지 않다.

넷째, 현행 중등학교 교재의 개념 도입 단계 이후에 등장하는 함수가 의미 없는 대응 규칙을 갖는 경우는 거의 없다.

2. 함수 개념 도입 방법에 관한 제언

여기서는 앞 절에서 지적한 문제점들을 해결할 수 있는 함수 개념 지도 방법을 모색해 보기로 한다.

수학적 개념은 여러 가지 방법으로 지도될

수 있고, 그러한 지도 방법들 중에서 어떤 것은 맞고 어떤 것은 틀리다는 식의 구분을 하기도 어렵다. 다만 현재의 지도 방법을 비판적 시각으로 고찰해 봄으로써 드러나는 문제점들을 해소할 수 있는 방법을 제시하고 그것은 다시 비판의 대상이 되는 순환 과정을 통해 수학교육은 개선될 수 있을 것이다. 이런 관점에서, 우리는 함수 개념 도입 단계에서의 지도상의 유의점을 말하고, 이에 따르는 수업 상황을 재현해 보고자 한다.

첫째는, 두 집합간의 대응 관계로서 함수를 말할 때, 정의구역과 공변역은 그 집합의 성격이 드러나는 것들을 예로 드는 것이 좋겠다. 위의 '상황1'에서와 같이 아무런 의미 없는 원소들로 구성된 집합들간의 대응으로 함수를 설명하려 한다면 함수의 의미가 무엇인가를 이해시키려는 의도는 실종되고 기계적인 판단 능력만 남게 될 것이다. 따라서 임의의 집합들간에 인위적으로 조작한 대응 규칙보다는 당위성을 인정할 수 있는 대응 규칙들을 예로 드는 것이 좋겠다.

둘째는, 대응으로부터 함수를 조직해 간다고 하더라도 종속 중심적인 함수의 속성이 완전히 무시되어서는 안된다. 이것은 함수 개념을 이해시키고 그것을 표현하는 수단으로서 대응을 도입한 것이기 때문에 이러한 사실이 함수 개념 도입 단계에 반영되어져야 한다.

셋째는, 이미 정해진 집합들에 한정적으로 대응 규칙을 적용해서 함수를 설명한다면, 주어진 상황에서 함수 관계를 발견해 내는 능력을 감퇴시키는 결과를 초래할 수 있다. 실제로 함수가 도구적으로 쓰이는 대부분의 경우에 정의구역과 공변역이 정해져 있는 경우는 드물다. 다시 말하면, 변하는 양에 대해서 따라서 변하는 값으로서의 함수 관계를 조직하고 정의구역을 결정해야 하는 상황에서는 수동적인 함수 식별 능력은 그 위력을 상실한다.

넷째는, 함수를 표현하는 수단으로 대응도가 많이 이용되는데, 학생들로 하여금 여러 가지 표현 방법을 고안하게 하여 그 중에서 가장 의미 전달 효과가 큰 표현 방법을 찾아보는 것이 좋겠다. 그렇게 해서 대응도가 선택된다면, 대응도가 여러 가지 함수 표현 방법 중의 하나라는 사실을 이해할 수 있어서 대응도 자체를 함수와 동일시하는 오류를 범하지 않을 것이다.

그러면 위에서 말한 내용을 감안해서 함수 개념 지도에 관한 실제 수업 상황의 일부분을 구성해 보자.

상황2

교사: 다음과 같은 상황을 생각해 봅시다.

물을 아껴 쓰기 위하여 물통에 물을 받아서 씁니다. 물통의 용량은 50리터인데, 수돗물을 틀어 놓고 2분 후에 물의 양을 측정해 보니 15리터였습니다. 수돗물이 일정하게 나오고 있다고 할 때, 시간의 경과에 따른 물통 속의 수돗물 양의 변화를 각자가 좋다고 생각하는 방법으로 표현해 보세요.

학생들: (여러 가지 방법을 동원해서 표현한다.)

학생1

(2, 15), (4, 30), (6, 45), (8, 50), (10, 50)

학생2

시간(분)	2 4 6 7
물의 양(리터)	15 30 45 50

학생3

2 --- 15

4 --- 30

6 --- 45

8 --- 50

학생4

1:7.5 2:15 3:22.5 4:30 5:37.5 6:45 7:50

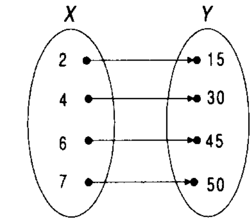
교사: 좋습니다. 위에서 든 네 학생의 방법 이외에도 여러 가지 방법들이 있을 것입니다.[8] 그러면 여기서 우리가 생각하고 있는 문제의 의미를 다시 한 번 살펴보기로 하죠. 2분 후에 물통 속의 물의 양이 15리터였으므로, 7분 후에는 물통에 물이 넘쳐 그 이후의 시간에는 물의 양이 계속 50리터가 되므로, 7분이 지난 후의 시간에 대해서 생각하는 것은 의미가 없겠지요. 또한 물의 양이 매 2분마다 15리터씩 증가하므로 시간은 '학생2'의 표현처럼 2,4,6,7분에 대해서만 생각해도 되겠지요?

그리고 우리가 이미 '집합'에 대해서 배웠으므로 우리가 생각하고 있는 시간과 물의 양을 집합으로 표현하고 각각 X, Y집합이라고 한다면 다음과 같습니다.

X = {2, 4, 6, 7}, Y = {15, 30, 45, 50}

위에서 여러분들이 표현한 것을 X, Y 집합의 원소들간의 관계로 표현해 봅시다. 그러면,

X	2 4 6 7
Y	15 30 45 50



[그림7]

와 같이 표현할 수 있고 이외에도 여러 가지 표현 방법을 생각할 수 있겠죠. 그러나 일반적으로는 위의 오른쪽과 같이 다이어그램을 이용한 표현 방법이 가장 많이 쓰입니다.

위의 예에서와 같이 주어진 두 집합의 원소들끼리 짝을 지어 주는 것을 두 집합간의 '대응' 이라고 합니다. 다시 말하면, 어떤 주어진 관계에 의하여 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 '대응'이라고 합니다. 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 대응하는 것을 기호로

$$x \rightarrow y$$

와 같이 나타내고, x에 y가 '대응한다'라고 합니다. 여기서 '주어진 관계'라는 것은 짝을 맺어 주는 대응 규칙을 말하는 것으로 위의 예에서는 경과된 시간에 따른 물의 양의 관계가 대응 규칙이 될 것입니다. 주어진 두 집합간의 대응 관계에 관한 예를 몇 가지 더 들어봅시다.

(1) '연꽃은 부녀요, 국화는 군자요, 석죽화는 소년이요, 해당화는 소녀로다.'에서 X, Y 집합을 각각 X = {연꽃, 국화, 석죽화, 해당화}, Y = {부녀, 군자, 소년, 소녀} 라고 했을 때의 대응 관계.

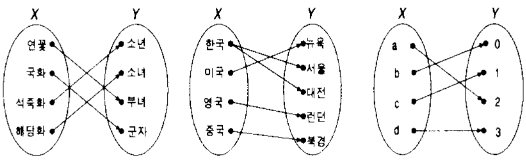
(2) X = {한국, 미국, 영국, 중국}, Y =

8) 물론, 동일한 상황을 나타낸 네 학생의 표현이 같은 함수를 구성하지는 않는다.

{뉴욕, 서울, 대전, 런던, 북경} 라고 했을 때, 각 나라들과 그 나라에 속한 도시들 사이의 대응 관계.

(3) 다세대 주택에 사는 a,c,d 세 가정의 자녀수가 각각 2명, 1명, 3명이라고 하고, b가정에는 자녀가 없다고 할 때, 각 가정에 자녀수를 대응시키는 대응 관계.

위의 예들을 그림으로 나타내 보면 다음과 같습니다.



[그림8]

이상에서 보는 바와 같이, 서로 관련이 있는 것들끼리 짝을 맺어 주려는 일은 아주 오래 전부터 있어 온 것으로 호기심 많은 인간들에게서 나타나는 자연스러운 현상이었을 것입니다. 다시 말하면, 인간들은 어떤 물리적인 현상에서 어떤 값이 변할 때 따라서 변하는 값들(예를 들면, 원의 반지름이 변할 때, 원주의 길이는 어떻게 변할까 등)에 관심을 가졌고 이러한 생각들이 다듬어 지고 일반화되어서 오늘날 임의의 두 집합간의 대응 관계를 생각하게 된 것입니다.

수학자들은 일상 용어들로 표현된 문장의 수식화, 기호화에 관심을 가졌고, 그러한 생각은 많은 수학적 발전을 가져왔습니다. 그러면 위에서 살펴 본 대응 관계를 수들로 구성된 집합들에 국한해서 생각해 보기로 하죠. 다음 문제를 풀어 봅시다.

문제1) S는 일정한 계산을 하게끔 조작되어 있는 프로그램이고 $S(x)$는 숫자 x를 S에 입력해서 얻은 결과입니다. 다음과 같은 상황에서 $S(5)$값을 구하시오.

$S(1) = 1$, $S(2) = 4$, $S(3) = 9$, $S(4) = 16$

학생들: 25입니다.

교사: 왜 $S(5)$의 값이 25가 되죠?

학생a: 입력된 값들에 대해서 제곱한 값들이 결과로 나오니까요.

교사: 그렇습니다. 그러면 숫자 x에 대한 $S(x)$는 얼마일까요.

학생들: x의 제곱입니다.

교사: 그렇죠. 우리는 이런 경우에 $S(x)=x^2$으로 표시합니다.

이렇게 변하는 값 x에, 따라서 변하는 $S(x)$를 대응시키는 대응 관계를 생각해 봅시다. 여기서 $S(x)$가 존재하는 x들로 구성된 임의의 집합을 X라 하고, 그 x들에 대한 $S(x)$ 값들을 포함하는 임의의 집합을 Y라고 하면, S에 의해서 집합 X에서 집합 Y로의 하나의 대응이 탄생합니다. 이 때, 이러한 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 '함수'라고 합니다. 우리는 일반적으로 다음과 같은 함수의 정의를 얻습니다.

정의: 변하는 값 x에, 따라서 변하는 값 $f(x)$를 대응시키는 대응 규칙을 f 라고 하자. 이 때, $f(x)$가 존재하는 x들로 구성된 임의의 집합을 X라 하고, 그 x들에 대한 $f(x)$값들을 포함하는 임의의 집합을 Y라고 하면, 대응규칙 f 는 X에서 Y로의 하나의 대응을 구성한다. 이러한 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 '함수'라 하고, 이 함수를 f라 할 때, 기호로

$$f : X \to Y$$

와 같이 나타낸다. 이 때, 집합 X를 함수 f

의 정의역, 집합 Y를 함수 f 의 공역이라고 한다.

이상에서 살펴 본 함수 지도에 관한 두 가지 경우 즉, '상황1'과 '상황2'를 비교해 보자.

두 상황 모두 대응을 수단으로 해서 함수를 설명하고 있다는 데는 일치하지만 다음과 같은 세 가지 면에서 차이를 보이고 있다.

첫째, '상황1'에서는 대응의 특별한 경우로서 함수 개념을 도입하고 있는데 반해, '상황2'에서는 각각의 x들에 대해서 $f(x)$ 값을 결정하고 나서 x를 $f(x)$로 대응시키는 대응 관계로서 함수를 도입하고 있다. 따라서 '상황2'에서는 함수가 왜 일의적대응이어야 하는지에 관한 의문점이 생기지 않는다. 다시 말하면, 앞 절에서 예로 든 두 번째 경우에, '상황2'의 방법에 따르면, '한국'이라는 x에 이미 $f(x)$가 결정되어졌어야 한다는 것이다. 따라서 이 경우는 함수가 아님이 명백하다.

둘째, '상황1'에서는 이미 주어진 의미 없는 원소들의 집합들에 대해 의미 없는 관계로 대응을 설명하고 그들 중에서 함수를 찾게 하고 있어서 함수 개념의 본질이 드러나지 않은 채, 도구적인 이해를 강요하고 있다. 이에 반해, '상황2'에서는 일상적으로 쉽게 이해될 수 있는 대상들로 구성된 집합들간의 관계를 매개로 해서 함수를 지도함으로써 주어진 집합들이 어떤 관계로 맺어져 있는가 하는 대응 규칙이 잘 드러나 있다. 이러한 차이는 주어진 집합들간의 일반적인 대응을 설명할 때는 의미가 없겠지만 그것을 토대로 함수 개념을 지도할 때는 중요한 의미를 갖는다. 왜냐하면, 함수는 의미 없는 대응관계로 설명되지 않는 실용적인 수학적 도구로서의 역할을 내포하고 있기 때문이다.

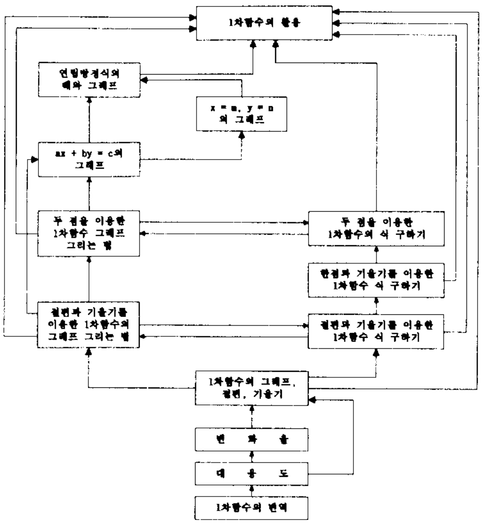
셋째, '상황1'에서는 이미 주어진 집합들간의 인위적인 조작에 의한 대응관계를 설정하고 그림 등의 표현 수단에 의지하고 있으므로 대응규칙이 잘 드러나 있지 않다. 이것은 후에 함수가 대응규칙으로 이해되는 것과 전혀 어울리지 않는 것으로 개념 지도 방법으로서는 문제가 있어 보인다. 반면 '상황2'에서는 학생들로 하여금 대응규칙을 발견하게 하고 그 대응규칙에 의해 함수가 구성될 수 있음을 설명하고 있으므로 위에서의 문제점은 제거될 수 있다.

3. 연계성을 강조한 함수 지도 방법

수학에서 함수를 취급하지 않고 이론 전개가 가능한 분야가 있을까?

물론 세부적인 수학적 사실을 단편적으로만 취급한다면 가능할 수 있을 것이다. 그러나 수학의 한 분야로 분류될 수 있는 영역만을 생각한다면 이 물음에 대한 답은 부정적이다. 함수 개념은 수학을 형성하는 요소들 중에서도 가장 핵심적인 위치를 점하고 있고 가장 강력한 수학적 도구로서 수학 발전을 견인해 왔다고 볼 수 있다. 이러한 함수 개념의 역할은 학문으로서의 수학에서 뿐 만 아니고 수학을 응용하는 분야에서 더욱 더 두드러지게 나타나고 있다. 따라서 함수 개념 자체가 단편적으로 지도되어서는 안되며 그와 관련된 여러 가지 개념들과의 상호 연계성이 강조되어야 한다. 이런 관점에서 중등학교에서 등장한 함수 관련 내용들은 어떻게 구조화 될 수 있으며 구조화된 도식에 의한 지도의 이점이 무엇인지를 살펴보자.[9]

9) 아래의 도식은 일본 鳴門教育大學 Saito Noboru 교수의 전남대학교에서의 특강 자료를 참조한 것임



Saito Noboru는 위에서와 같은 구조 도식을 4절지 가량의 용지에 복사해서 학생들에게 나눠주고 각각의 내용을 표시한 상자 옆에 수업 내용을 필기하게 했을 때 학생들의 학습 내용에 대한 구조적 이해가 향상되었으며 수학에 대한 흥미도 매우 높아졌다고 주장한다.

위의 도식에서 나타난 특징은 함수의 그래프를 매개로 한 개념들의 연결 구조이다. 실제로 함수 지도에 있어서 함수 그래프에 대한 지도는 매우 중요하다. 예를 들어, 일차함수와 일차방정식의 경우를 보자. 일차함수 $y=ax+b$와 일차방정식 $ax+b=0$에서 등장하는 'x'는 그 역할이 전혀 다르다. 전자에서의 'x'는 변하는 값 즉, 독립변수이고 후자에서의 'x'는 미지수이다. 그러나 함수의 그래프를 생각할 때 방정식의 해는 일차함수의 함수값이 0이 되는 x값이 되므로 x절편이 된다. 물론 함수값이 0이 되는 값으로서의 방정식의 해를 설명할 수도 있겠지만 그래프를 이용한 설명 방법은 좀 더 실제적이다. 이러한 방법은 대학 수학에서 일반 해법으로 구해지지 않는 방정식 해의 근사값을 구할 때 이용되는, 'Newton-Raphson 방법'[10]을 이해하는 데 도움이 되기 때문이다. 또한 방정식 해의 근사값을 컴퓨터를 이용해서 구하고자 할 때[11] 이용되는 '이분법'을 이해하는 데도 위의 생각은 직접적인 영향을 미친다.

다음으로 연립방정식과 일차함수의 관계를 살펴보자. 다음과 같은 연립방정식

$$\begin{cases} ax+by=c & \dots ① \\ dx+ey=f & \dots ② \end{cases}$$

이 있을 때, 이 연립방정식과 식 ①,②에 의해서 정해지는 일차함수들은 어떤 관계를 갖고 있을까? 위에서 언급한 바와 같이 각각의 식을 함수식으로 봤을 때, x, y는 각각 독립변수와 종속변수의 역할을 하지만, 연립방정식에서의 x, y는 미지수로 이해된다. 현행 중등학교에서는 이들 문자의 역할을 엄밀하게 구분하지 않는다. 다만, 주어진 연립방정식의 해와 그것을 구성하는 일차방정식들의 해집합을 좌표평면에 표시해서 그 관계를 설명하고 있다. 즉 각 방정식의 해집합이 되는 직선들은, 각각의 식을 일차함수식으로 볼 때는, 두 일차함수의 그래프가 되고 이들의 교점은 연립방정식의 해로 이해될 수 있다. 이는, 좀 더 구체적으로 말하면, 다음과 같은 세 경우로 나누어 설명될 수 있다.

(a) $a/d=b/e=c/f$ 인 경우

이 경우는 두 함수식(방정식)에 의해 만들어지는 함수(방정식 해)의 그래프가 일치하는 경우로 연립방정식의 해가 무수히 존재함을 알 수 있다.

10) 수학교재편찬위원회 역, 미분적분학과 해석기하학, 청문각, 1997, pp.202-207.
11) Matlab 등의 소프트웨어를 이용해서 방정식의 근을 구하는 방법을 프로그래밍 할 수 있음.

(b) $a/d=b/e$ 이고 $b/e\neq c/f$ 인 경우

이 경우는 기울기가 같고 y절편이 다르므로 두 그래프가 평행하게 되어 연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우이다.

(c) $a/d \neq b/e$ 인 경우

이 경우는 두 그래프의 기울기가 서로 달라 두 그래프는 한 점에서 만나고, 연립방정식의 입장에서 보면 유일한 해가 존재함을 알 수 있다.

대수적으로 주어진 식들간의 차이를 그래프를 매개로 해서 기하학적으로 살펴본 이러한 방법은 미지수가 세 개인 연립방정식의 경우에도 각각의 방정식을 평면의 방정식으로 이해함으로써 그대로 적용될 수 있다.[12)]

그래프를 매개로 한 이러한 설명에서의 문자 x, y의 역할 차이는 연립방정식의 해를 구해 가는 과정을 살펴보면 더욱 더 분명해진다.

일반적으로 연립방정식을 푸는 방법으로는 '가감법', '등치법', '대입법' 등이 있다. 이 중에서 '가감법'이 주로 이용되는 데, 구체적인 예를 들어 해를 구해 가는 과정을 살펴보자.

연립방정식

$$\begin{cases} x+3y=2 & \ldots ③ \\ 2x+5y=3 & \ldots ④ \end{cases}$$

에서 ③×(−2)+④: $-y=-1$ 이므로 $y=1$ 이고, 구하고자 하는 해는

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=\ \ 1 \end{cases}$$

이 된다. 이러한 계산 과정에서 미지수 x, y의 역할은 무엇인가. 이들은 최소한 계산 과정에서는 자리지기 이상의 의미를 갖지 못한다. 이러한 생각은 연립방정식을 푸는 또 하나의 방법을 제공한다. 즉, 주어진 연립방정식에서 미지수를 제외한 계수들로 구성된 행렬을 생각해서 다음과 같은 계산을 수행한다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} ③ \\ ④ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} ③ \\ ③\times(-2)+④=⑤ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ③+⑤\times(-3)$$

이러한 행렬들을 연립방정식의 확대행렬(augmented matrix)이라고 하고 행렬 오른쪽에 표시된 연산을 기본행연산(elementary row operation)이라고 한다. 또한, 이러한 방법으로 연립방정식의 해를 구하는 것을 가우스-조던 소거법(Gauss-Jordan elimination)이라고 한다. 일반적으로는 두 번째 행렬로부터 $y=1$ 임을 알 수 있으므로 이것을 첫 번째 식에 대입해서 x값을 구할 수 있다. 이와 같이 두 번째 행렬의 형태까지 구하는 과정을 가우스소거법(Gauss elimination)이라고 한다.[13)]

이상에서 살펴 본 바와 같이 연립방정식에 나타나는 문자는 식 자체에서는 미지수로, 계산 과정에서는 자리지기의 의미로 이해될 수 있으므로 각각의 식을 함수식으로 볼 때와는 그 의미가 확연히 구분된다. 물론 이러한 방법에 의해 연립방정식에 등장하는 문자의 의미를 확실히 설명할 수 있다고 보기는 힘들다. 다만 함수와 연립방정식의 연계성을 이해시키는 도구로서 이러한 방법을 도입해 볼 수는 있을 것이다.

12) 이장우 편역, 선형대수의 입문, 경문사, 1988, p.157
13) 상게서, pp.5-20.

4. 학교수학에서 다항식함수의 유용성에 관한 고찰

여기서는 학교수학에서 다항식함수가 중요하게 다루어지는 배경을 대학 수학과 연계해서 다루어 보고자 한다.

흔히 대수함수라고도 불리워지는 다항식함수는 중등학교의 함수 도입 단계에서 가장 먼저 소개되는 함수로서 일반적으로 다음과 같이 정의된다.

정의: 임의의 상수 $c_n, c_{n-1}, \cdots, c_0$ 와 변수 x에 관한 식

$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

을 x의 다항식(polynomial)이라고 하고 x를 $f(x)$로 대응시키는 함수를 다항식함수(polynomial function)라고 한다. 여기서, c_n이 0이 아니면 이 함수를 n차 다항식함수라고 한다.

따라서 우리가 일차함수, 이차함수라고 부르는 함수는 모두 다항식함수이다. 그러므로 중등학교에서의 함수 교육은 다항식함수로 시작된다고 말할 수 있다. 또한 함수에 관련된 상당히 많은 부분이 다항식함수와 관련된 내용으로 구성되어 있기 때문에 다항식함수가 학교수학에서 매우 중요한 위치를 차지하고 있다고 볼 수 있다. 특히, 방정식이 다항식함수 $f(x)$에 대해서 '$f(x) = 0$'으로 정의되므로 방정식의 특성을 고찰하는데 있어서 다항식함수에 대한 연구는 필수적이다.

따라서 우리는 다항식함수가 학교수학에서 중요하게 취급되는 이유를 좀 더 구체적으로 살펴보고 다항식함수에 관한 연구가 방정식의 특성을 설명하는데 어떻게 기여하는지를 알아볼 것이다.

우선, 중등 수학에서 다항식함수가 중요하게 다루어지는 이유를 살펴보자.

중등학교에서 함수 개념을 도입한 후에 가장 먼저 다루어지는 함수는 비례함수를 포함한 일차함수와 반비례함수이고 그 후로는 이차, 삼차, 사차다항식함수의 순으로 도입된다. 그런데, 앞 절에서 언급한 바와 같이, 현행 함수 교육에서는 개념 도입 과정과 그 이후에 예로 든 함수들간에 미묘한 차이를 보이고 있다. 다시 말하면, 개념 도입 과정에서는 유한집합들간의 함수 관계를 대응도를 통해서 설명하고 있고, 그 이후의 과정에서는 대응 규칙에 의한 연속함수(다항식함수)로서 종속 중심적으로 함수를 취급하려는 경향을 보인다. 학교수학에서 연속함수인 다항식함수를 이처럼 중요하게 다루는 이유는 무엇일까? 그것은 아마도 초보적인 함수 교육에서 다항식함수가 종속적인 함수의 본질을 강조하기에 적합한 형태를 갖추고 있다는 것과 다항식함수의 유용성을 강조하기 위함일 것이다.

그러면 여기서 다항식함수의 유용성을 대학 수학과 연계해서 살펴보기로 하자.

우리가 일상적인 문제해결 과정에서나 수학적으로 어떤 상황을 설명하려고 할 때, '수학화'[14]한다는 것은 대개 관심의 대상이 되는 것들 사이의 상호관계를 수식화하고, 기호화한다는 것이고 이러한 과정의 상당 부분은 함수와 관계된다. 여기서 말하는 함수란, 대개 다항식함수, 삼각함수, 로그함수, 지수함수와 그들의 합성으로 만들어진 함수를 말하는데 그 중에서도 비례함수를 포함한 다항식함수와 관계되는 경우가 많다. 예를 들면, 지면으로부터의 높이가 h_0인

14) 여기서 '수학화'의 의미는 수학적 사실의 역사적 발생과정으로서의 수학화가 아니고 수학을 활용해서 무엇인가를 해결해 가는 과정으로서의 수학화임.

지점에서 v_0의 속도로 지면을 향해 던져진 물체가 t초 후에 지면으로부터 $h(t)$의 높이에 있게 된다면 $h(t)$는 $h(t)=-4.9t^2+v_0t+h_0$ 로 주어진다는 사실이 잘 알려져 있다.

이러한 실용적 측면이 아닌 순수 수학적인 측면에서도 다항식함수의 유용성을 살펴보는 것은 어렵지 않다. 일반적으로 수학의 발전이 과학의 발전을 견인한다고 할 때는, 초보적인 측면만을 고려한다면, 대개 미적분학에 의한 응용을 말한다. 미적분학에서는 주로 미분, 적분이 가능한 함수를 다루게 되는데 다항식함수는 이러한 조건을 충족시킬 뿐 만 아니라 다루기가 쉽다. 더구나 미적분학에서 다루어지는 삼각함수, 로그함수, 지수함수와 같은 초월함수들이 다항식함수로 표현될 수 있다는 다음과 같은 정리[15]가 있다.

Taylor 정리[16] n을 음이 아닌 정수라 하고 0을 포함한 개구간 I 내의 모든 x에 대해 $f^{(n+1)}(x)$가 존재한다고 가정하자. 그러면, 0이 아닌 I 내의 모든 x에 대해, t_x ($0<t_x<x$ 혹은 $x<t_x<0$) 가 존재하여

$$f(x)= f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

따라서 다항식함수에 대한 이해는 다른 함수들의 성질을 이해하는 데 필수적이라 할 수 있다.

다음으로, 방정식의 특성을 규명하는 데 필요한 도구로서의 다항식함수의 역할에 대해서 살펴보자. 이미 우리는 다항식함수와 방정식에 등장하는 문자의 역할을 비교함으로써 그들 사이에 존재하는 본질적인 차이에 대해서 언급한 바 있다. 그러나 이러한 차이에도 불구하고 이들을 서로 분리해서 생각할 수는 없다. 학교수학에서 방정식이 다항식의 인수분해와 연계해서 다루어지는 이유도 여기에 있다.

현행 고등학교 공통수학의 다항식 단원에서는 다항식의 인수분해에 관한 나머지정리, 인수정리, 조립제법 등을 다루고 있고 이러한 성질들의 성립 근거로 다항식들에 관한 제법정리를 도입하고 있다. 또한 제법정리를 다항식들의 나눗셈으로 설명하고 있는데 그 개략적인 내용은 다음과 같다.

고등학교 공통수학[17]에서는 단항식을 $2,\ 7x,\ -5x^2y$ 와 같이 몇 개의 수나 문자들의 곱으로 나타내어진 식으로 정의하고 다항식을 단항식들의 합으로 정의한다. 또 이와 같이 정의한 다항식들간의 나눗셈을 지수법칙으로 설명하고 다항식에 관한 제법정리를 다음과 같이 말한다.

일반적으로, 다항식 A 를 다항식 $B(\neq 0)$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면 Q, R는 다항식이고 $A=BQ+R$ 와 같은 관계가 성립한다. 이 때 R는 B보다 차수가 낮은 다항식이다.

15) 수학교재편찬위원회 역, 전게서, pp.629-638.
16) 이 정리는 다음과 같은 정리로 일반화된다.
Taylor 정리 n이 음이 아닌 정수이고, a를 포함한 개구간 I내의 모든 x에 대해 $f^{(n+1)}(x)$가 존재 한다고 가정하자. 그러면, I내의 모든 $x\neq a$에 대해서,
$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$을 만족하는수 t_x ($a<t_x<x$ 혹은 $x<t_x<a$)가 존재한다.
17) 박두일 외, 고등학교 공통수학, 교학사, 1995, pp.50-55.

그러나 이러한 설명은 스스로 정의한 다항식의 정의에 모순된다. 다시 말하면, 다항식 A, B를 각각 $4x^3+3xy$, $2y^2$ 이라 하면 두 다항식간의 나눗셈은 의미가 없다. 따라서 제법정리는 이미 우리가 언급한 다항식의 정의와 같이 하나의 변수에 대한 다항식에 국한해서 다음과 같이 설명해야 할 것이다.

제법정리[18]: 두 다항식

$f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ (a_m \neq 0)$

$g(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \ (b_n \neq 0)$

에서, $m \geq n > 0$ 이라 하면

$f(x)=g(x) \cdot q(x) + r(x)$

를 만족하는 다항식 $q(x)$ 와 $r(x)$ 가 유일하게 존재한다. 단, $r(x)$ 는 $g(x)$ 보다 차수가 낮은 다항식이다.

이 때, $q(x)$ 를 $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫 또는 상이라 하고, $r(x)$ 를 나머지라 한다. 특히 $r(x)=0$ 일 때 $f(x)$ 는 $g(x)$ 로 "나누어 떨어진다" 라고 한다.

제법정리의 이러한 설명 방식은 공통수학에서의 설명 방식과 본질적으로 그 의미가 다르다. 좀 더 구체적으로 말하면, 공통수학에서는 다항식에 나타난 문자를 임의의 실수를 상징하는 상수로 보아 지수법칙을 적용함으로써 다항식의 나눗셈을 말하고 있다. 따라서 이렇게 도입된 다항식의 나눗셈에서는 곱셈 연산에 대한 역원의 의미가 드러나 있지 않다.

그러나 위에서와 같이 다항식의 곱셈으로 제법정리[19]가 소개되고 그 결과로 다항식의 나눗셈을 말한다면 이미 지적한 것과 같은 논리적인 모순은 생기지 않을 것이다.

이렇게 도입된 다항식에 관한 제법정리는 방정식의 해법에 관한 여러 가지 정보를 제공해 주는데 그 중에서 중요한 몇 가지를 살펴보면 다음과 같다.

나머지 정리: 다항식 $f(x)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$ 와 같다.

이 '나머지 정리'에 의하면, $f(\alpha)$ 가 0이 된다는 것[20](즉, α 가 방정식 $f(x)=0$ 의 해가 된다는 것)은 다항식 $f(x)$ 가 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어진다는 의미이다. 따라서 임의의 방정식 $f(x)=0$ 의 해를 구하기 위해서는 다항식 $f(x)$ 를 인수분해할 필요가 있고, 다항식을 인수분해 하는 좀 더 편리한 방법을 강구하는 것은 당연하다. 이러한 노력의 결과로, 다항식에 관한 제법정리와 두 다항식간의 계수 비교 방법으로 설명되어 지는, '조립제법'이라는 다항식의 인수분해 방법이 얻어진다.

다항식의 인수분해에 관한 이러한 고찰은 좀 더 일반화되어서 임의로 주어진 다항식이 일차다항식들로 인수분해 될 수 있느냐하는 문제로 귀결되고, 결국 복소수를 계수로 하는 다항식의 경우에는 그것이 가능하다는 다음과 같은 정리가 증명된다.

대수학의 기본정리: 복소수 계수의 n 차 다항식은 복소수의 범위에서 근을 갖는다.

---

18) 강수철 외, 대수학과 기하학, 1997, pp. 17-18.
19) 이 정리의 증명과정도 다항식들의 곱셈과 차수에 대한 성질들로 설명될 뿐, 다항식간의 나눗셈에 대한 언급은 없다.
20) 이 때, α 를 다항식 $f(x)$의 '근' 이라고 한다.

이 정리에 의해서 실수 계수의 n차 다항식은 복소수의 범위에서 n개의 일차다항식들로 인수분해된다고 할 수 있다. 즉, 임의의 n차 다항식 $f(x)$에 대해 복소수 $a, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$가 존재해서

$$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

가 된다. 이 때, 이 식을 복소수체상에서의 다항식 $f(x)$의 '소인수분해'라고 한다. 또한, n개의 근 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$중에서 k개가 같으면 같은 해 $\alpha = \alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \alpha_{i_k}$를 k 중근이라고 한다. 따라서 n차 방정식이 n개의 근을 갖는다고 말한 경우는 k 중근을 k 개로 셈하고 있는 것이다.

또한, Taylor정리를 이용하면, n차 방정식이 k중근을 가질 필요충분조건을 말할 수 있는데, 그것은 다음과 같은 정리로 주어진다.

정리: n차 방정식 $f(x)=0$이 $x=\alpha$를 k중근으로 갖기 위한 필요충분조건은

$$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ \cdots,$$
$$f^{(k-1)}(\alpha)=0,\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

이다.

이상에서 우리는 다항식함수와 방정식의 연계성에 대해서 살펴보았다. 그러나 일반적으로 순수 대수적인 차원에서의 다항식에 관한 연구가 전적으로 방정식과 연계된 것은 아니다. 다만 실수나 복소수체 상에서의 다항식 혹은 다항식함수를 다룰 때에는 반드시 방정식과 연계해서 지도되어야 한다는 것이다. 이는 수학적 개념들간의 구조적인 연계 관계의 이해에도 도움이 될 뿐 만 아니라 중등학교에서 다항식함수가 왜 중요하게 다루어지는가에 대한 이유가 되기도 하기 때문이다.

Ⅳ. 맺음말

수학을 접해 본 이들에게 함수란 용어는 매우 친숙하고 일반적이다. 그러나 함수란 무엇인가라는 질문에 비교적 잘 정리된 자기의 생각을 말할 수 있는 사람들은 많지 않다. 이러한 질문에 자신 있게 대답하는 사람들도 대부분은 기억하고 있는 함수의 정의를 재생하는 것으로 만족해 할 것이다. 이것은 함수 개념이 수학의 전 분야에 걸쳐 강력한 수학적 도구로서 영향력을 행사하고 있는 것을 감안하면 잘 이해가 되지 않는 부분이다. 이것은 수학을 학습한다는 것을 이미 존재하는 수학적 사실을 잘 기억하고 그것을 이용해서 문제를 해결하는 것으로 이해하는 수학에 대한 일반적인 시각의 결과로 볼 수 있다. 따라서 수학 문제를 잘 풀기 위해서는 개념의 본질에 대한 이해 여부와 상관없이 공식을 많이 기억하고 있어야 하고 주어진 문제를 해결하기 위해서 어떤 공식을 적용해야 하는지의 판단 능력이 수학적 능력으로 인정받는 결과를 초래한 것이다. 수학에 대한 이러한 수동적인 사고는 문제 해결 과정에서의 자기 만족도를 반감시킨다. 또한 문제를 잘 풀기 위해서는 많은 공식을 기억하고 있어야 한다는 생각은 수학을 기피하게 된 하나의 요인으로 작용한다.

그러면 수학을 보는 이러한 인식의 근원은 어디에 있는가?

물론 여러 가지 관점에서 그 원인을 분석해 볼 수 있겠지만 그 중에서도 교사에 의해 결정되는 교육 방법에 관한 요인을 빼놓을 수 없다. 다시 말하면, 우리 나라 학교교육에서의 수업은 대개 교사가 제시하고 학습자가 수동적

으로 받아들이는 형태를 취하고 있다. 이러한 수업 진행의 형태는 수학적 개념을 다루는 데에도 그대로 나타나, 그 개념과 관련된 내용에서 막강한 힘을 발휘할 수 있는, 개념의 본질에 대한 이해가 결여된 채로 학습이 진행된다.

수학 학습에서의 이러한 문제점을 실제적으로 다루기 위해 우리는 중요한 수학적 개념들 중의 하나인 함수 개념에 관한 지도 방법을 고찰하였다.

본 논문은 크게 두 가지로 구성되어 있다. 하나는, 함수 개념을 대응 중심적으로 다루는 현행 함수 교육에서의 문제점을 말하고 그 대안이 될 수 있는 함수 개념의 지도 방법을 제시하였다. 또 하나는, 함수와 관련된 수학적 개념들의 상호 연계성을 고려한 지도가 바람직함을 강조하고 실제로 방정식, 연립방정식등이 함수와 어떻게 연계되는지를 살펴보았다.

좀 더 구체적으로 본 논문의 내용을 정리해 보면 다음과 같다.

첫째로, 함수 개념을 '대응'의 특별한 경우로 다루는 현행 함수 지도 방법이 타당한가를 검증하기 위해 기존의 문헌을 조사해서 함수의 본질이 무엇이어야 하는지를 살펴보았다. 이로부터 우리는 함수의 본질이 '대응'이 되어서는 안된다는 데 동의하였다. 하지만, 현행 함수 교육에서 '대응'을 매개로 함수 개념을 도입한 이유가 함수의 본질을 '종속'으로 봤을 때 형식적 표현이 명쾌하지 못하다는 데 있다고 보고 현행 함수 지도 방법을 '대응'과 '종속'의 중간적 입장으로 규정하였다. 그리고 이러한 입장을 포함한 함수의 본질에 관한 세 가지 관점 즉, 종속 중심적인 관점, 중간적 관점, 집합론적인 관점에 대응하는 함수의 정의를 소개하고 그들이 갖는 특징을 살펴보았다.

둘째로, 위에서 살펴본 내용을 근거로 현행 함수 지도가 개념 도입 단계에서는 대응 중심적으로 하되 종속 중심적인 함수의 본질을 살리는 방향으로 개선되어야 함을 말하였다. 이러한 주장의 근거로 우리는 현행 함수 개념 도입 단계에서의 수업 상황을 재현해 보고 여기에서 나타난 문제점을 분석해 보았다. 그런 후에 이러한 문제점들을 해소할 수 있는 함수 개념 도입 방법을 제시하였다.

셋째로, 우리는 함수 지도에 있어서 함수와 관련된 수학적 개념들의 연계성을 고려한 지도가 강조되어야 함을 주장하였다. 이를 위해, 함수와 관련된 개념들의 구조 도식을 이용한 함수 지도 방법을 소개하였다. 또한 함수와 관련된 개념들간의 연계성과 차이점을 분석해 봄으로써 함수 지도에 임하는 교사들에게 도움이 되고자 하였다.

넷째로, 우리는 학교수학에서 다항식함수가 중요하게 다루어지는 이유를 고찰하였다. 그 이유의 하나는 연속이면서 미, 적분이 가능한 함수로서의 다항식함수가 갖는 특성에서 찾았고 또 하나는 방정식과 연계한 다항식함수의 유용성에서 찾았다. 또한 우리는 방정식의 여러 가지 성질이 다항식함수와 연계해서 설명되어져야 함을 말하였다.

본 논문에서 다루었던 함수 지도에 관한 내용은 논문 구성과 관계해서 선택적으로 다루어졌다. 따라서 실제적인 함수 교육에서는 우리가 언급한 내용에 더해 함수식에 나타나는 문자의 의미, 함수 지도에서의 표현의 문제, 시각화를 통한 함수 지도 등에 대한 심도 있는 고찰이 필요하다고 본다. 또한, 본 논문은 이론 연구와 현장 연구의 중간적인 관점에서 기술되었기 때문에 이론적 깊이나 상황 설정에 관한 실증적 고찰 모두에서 부족한 면이 노출되었을 수 있다. 이에 대해서는 수학교육에 관한 이론 연구가나 수학 교사의 입장에서의 보충적 연구

가 필요하다고 본다.

참고 문헌

강수철 외(1997), 대수학과 기하학, 경문사

강시중(1995), 수학교육론, 교육출판사

교육부(1994), 중학교 제6차 수학과 교육과정해설

김선화(1991), 표현의 문제에 대한 수학교육적 고찰, 대한수학교육학회 논문집 1(1), pp.107-121.

김연식, 박교식(1992), 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근, 대한수학교육학회 논문집 2(1), pp.1-15.

김연식, 김흥기(1994), 중학교 수학1,2 교사용 지도서, 동아출판사

____________(1994), 중학교 수학2,3 교사용 지도서, 두산동아

김응태, 박한식, 우정호(1997), 수학교육학개론, 서울대학교출판부

박두일, 신동선, 김기현, 박복현(1995), 고등학교 공통수학, 교학사

박두일, 신동선, 강영환(1994), 중학교 수학1, 교학사

석용징(1996), 함수의 형식적 개념과 비형식의 다양성, 대한수학교육학회 논문집 6(2), pp.303-308.

석용징, 신현성, 이준열(1996), 수학과 교재론, 경문사

수학교재편찬위원회 역(1997), 미분적분학과 해석기하학, 청문각

우정호, 김남희(1996), 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 대한수학교육학회 논문집 6(2), pp.197-210.

이장우 편역(1988), 선형대수의 입문, 경문사

이홍천(1994), 집합론, 경문사

전시본(1995), 중학교 수학1,2,3

Lang, S.(1990), *Undergraduate algebra,* Springer-Verlag New York Inc.

Lin, Y. F. & Lin, S. Y.(1974), *Set theory,* Houghton Mifflin Company.

Nitsa Movshovits-Hadar(1988), *School Mathematics Theorems - an Endless Source of Surprise,* For the Learning of Mathematics 8(3), p.39.

Richard, J. C. & Clifford, W. S.(1987), *Mathematical questions from the classroom Part I, II,* Janson Publications, Inc.

日本數學敎育會 編(1971), 關數と その指導 (小學校編), 明治圖書

A study on the instruction of function concept in school mathematics

Kang Yun-Soo, Jeong Seong-Hyun, Kang Deok-Sim

As a researcher engaged in the mathematical education, mathematics teachers are interested in instructional methods.

While it is unlikely that the viewpoints of individual mathematics teachers are reflected in making decisions on instructional purposes and instructional contents, a good many parts of instructional methods on mathematical facts are decided by individual teachers.

This means that the role of mathematics teachers is given much weight in the mathematical education. Therefore, the mathematics teachers must not be excluded in all parts of the study of mathematical education.

We studied the instructional methods of function concept, a central topic in school mathematics from the following perspectives.

First, we examined the characteristics of the three(correspondence-centered, middle, dependence-centered) viewpoints about the essence of function concept. And we studied that which of them should be the viewpoint of instruction of function concept in school mathematics.

Second, we investigated the questions regarding the process of function instruction in school mathematics and presented alternative instruction methods of function concept to solve the questions.

Third, we postulated the importance of polynomial function, relating college mathematics in order to present the reason why the polynomial function is importantly treated in functional instruction of school mathematics.