大韓數學教育學會 論文集 第 8 卷 第 1 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. VIII, No.1, 365-380. July 1998

知識에 대한 構造主義的 觀點과 수학에서의 '知識의 構造'

임 재 훈*

I. 서 론

수학교육은 학생을 수학적 지식의 창고로 만들려는 것이 아니라, 수학적으로 사고할 수 있는 인간이 되게 하려는 것이다. 우리는 학생들에게 많은 수학적인 사실을 가르쳐 왔다. 그러나, 수학적인 사실을 가르치는 것이 수학적으로 사고할 줄 아는 인간의 양성을 보장하는가? 우리는 수학적 사실을 많이 가르치면 절로 수학적 사고력이 향상될 것이라는 암묵적인 가정 하에 수학교육을 해온 것은 아닌가? 그러나, 현실은 만족스럽지 못하다. 학교 교육을 통해 수학적으로 사고할 줄 아는 인간을 길러내는 데 그다지 성공하고 있지 못하는 현실이라고 할 수 있다.

수학적 사고가 수학적 사실처럼 직접적으로 가르칠 수 있는 것이라면, 수학적 사고를 직접적으로 가르치면 될 것이나, 사고 교육에 관련된 여러 교육학 논의들은 사고를 직접적으로 사실을 가르치는 것과 같은 방식으로 가르칠 수 없다는 점을 지적하고 있다(Oakeshott, 1967; Ryle, 1967; Passmore, 1967; Dearden, 1967; Dewey, 1933, 이홍우, 1979). 수학적 사고는 수학적 사실을 가르치는 것과 별도로 가르쳐질 수 있는 것도 아니지만 수학적 사실을 가르치는 것과 동일한 방식으로 가르쳐지는 것도 아니다.

여기서, 수학적 사실과 수학적 사고의 관계가 문제가 된다. 수학적 사실과 수학적 사고의 관계는 적어도 다음과 같은 세 가지 관점에서 파악될 수 있다.

첫째, 수학적 사고는 수학적 사실에 종속된다고 보는 관점이다. 이런 입장의 단적인 형태는, 수학적 사실을 가르치기만 하면 수학적 사고가 저절로 길러진다는 입장이다. 그러나, 위에서 말했듯이 이런 가정에 근거하고 수학을 가르쳐온 결과는 그다지 만족스럽지 않다.

둘째, 수학적 사고와 수학적 사실을 병렬적 관계로 파악하는 관점이다. 이 관점은 수학적 사고를 수학적 사실과 동등한 '다른 한 종류의 지식'으로 생각한다. 예를 들어, 폴리아(Polya, 1957)가 제시한 발견술이나 문제해결 전략을 수학적 사고로 생각하고 이를 1+1=2와 같은 수학적 사실과 종류가 다르지만 동등한 수준의 또 한 종류의 지식으로 보는 것이다. 폴리아의 발견술을 직접적으로 가르치는 방법을 모색한 연구들은 '정보'와 '방법적 지식'의 관계를 이와 유사한 방식으로 파악하고 있는 것이라고 할 수 있다. 둘 사이의 관계를 병렬적으로 파악한 경우 나올 수 있는 단적인 형태의 처방은, 발견술이나 문제해결 전략을 직접 가르치고 기억하게 하고 문제를 푸는 단계에서 의식적으로 되뇌며 사용하게 하는 것이다. 그런데,

* 한국교육과정평가원

이 방법은 종래 수학적 사실을 가르치는 방식과 다름이 없다. 위의 방법은 가르치는 내용만 다를 뿐, 피타고라스 정리를 가르치고 그 응용 문제를 풀게 하는 것과 동일한 방식으로 가르치는 것이다.

셋째, 수학적 사고를, 수학적 사실에 종속되거나 수학적 사실과 병렬적인 다른 한 종류의 지식으로 생각하지 않고, 수학적 사실을 가르치는 이유나 목적 또는 수학적 사실의 이면으로 파악하는 관점이 있을 수 있다. 둘 사이의 관계를 이렇게 파악할 경우, 수학적 사실을 가르치는 직접적인 과정 속에서 수학적 사고를 간접적으로 전수하는 것에 관심을 가지게 된다. 예를 들어, 피타고라스 정리를 가르칠 때 이전에 수학적 사실로서 피타고라스의 정리를 전달하는 것으로 만족했던 교사라면, 이제는 피타고라스 정리라는 수학적 사실을 단지 전달하는 것이 아니라, 그 전달 과정을 통하여 그 무엇인가를 간접적인 방식으로 전수해야 한다는 것을 생각하게 된다. 이것을 의식하고 있을 때와 그렇지 않고 사실의 전달을 전부로 생각하고 피타고라스의 정리를 전달하고 있을 때의 수업 사이에는 아주 미묘한 그러나 중요한 차이가 있다.

이 세 번째 관점은 '안과 밖(表裏)의 사고방식'이라는 말로 특징지을 수 있다. 이 안과 밖의 사고방식은 다른 말로 '구조주의적(構造主義的) 사고방식'이라고 할 수 있다. 구조주의는 어떤 특정한 철학적 주장이기 이전에 세계를 보는 독특한 하나의 관점 곧, 일종의 세계관이다.

교육에서 구조주의적 사고 방식은 학문중심 교육과정기에 상당한 영향을 미치게 된다. 브루너(Bruner)의 '지식의 구조'라는 말은 이 영향을 상징하고 있다고 말해 좋을 것이다. 본고에서는, 안과 밖의 사고방식 - 지식을 보는 구조주의적 관점 - 을 고찰하고, '지식의 구조'라는 말에 들어 있는 구조주의적 사고방식을 수학에서의 몇 가지 예와 관련지어 고찰한다. 그리고, 이로부터 수학적 사고의 교육을 위한 시사를 얻고자 한다.

II. 지식의 구조와 안과 밖의 사고방식

지식을 이분법적으로 나누는 아이디어를 교육학 문헌에서 여럿 접할 수 있다. 몇 가지 예를 들면, 라일(Ryle, 1949, 1967)은 지식을 명제적 지식(knowing that)과 방법적 지식(knowing how)으로 구분하고 방법적 지식을 가르치고 배우는 것에 보다 주의를 기울여야 한다고 보았다. 오크쇼트(Oakeshott, 1967)는 지식을 정보(information)와 판단(judgement)으로 구분하는 것이 보다 적절하다고 보고, 정보는 教授(instructing)에 의해 획득되나 판단은 傳授(imparting)에 의해 소유된다고 한 바 있다.[1] 폴리아(Polya, 1965)는 수학적 지식을 정보(information)와 방법적 지식(know-how)으로 구분하고 방법적 지식은 정보를 사용하고 문제를 해결하는 일종의 기술이자 능력이며 성향이라고 한 바 있다. 스켐프(Skemp, 1987)는 관계적 이해와 도구적 이해를 논하는 가운데 관계적 수학(relational mathematics)과 도구적 수학(instrumental mathematics)을 구분하기도 하였다.[2] 히베르트(Hiebert, 1986) 등은 지식을 개념적 지

1) 오크쇼트에 따르면, 정보는 명제나 규칙의 형태로 표현될 수 있는 것이고, 판단은 지식의 숨겨진 드러나지 않는 구성자로서, 명제나 규칙의 형태로 표현될 수 없는 것이다.
2) 스켐프(1989)는 또한 지식의 심층과 표층을 구분하고 지식의 표층에는 기호의 집합을, 지식의 심층에는 의미 또는 개념의 집합을 배정하기도 하였다.

식(conceptual knowledge)과 절차적 지식(과정적 지식, procedural knowledge)으로 나누고, 개념적 관계망을 개념적 지식의 예로, 알고리즘이나 규칙을 절차적 지식의 예로 들고 있다. 이외에도 지식의 이분법적 구분이라고 할 만한 것들은 여럿 있다.

그런데, 이러한 지식의 이분법적 구분들을 두 가지 방식으로 생각해 볼 수 있다. 하나는 이 이분법적 구분들을 지식의 외연을 둘로 나누는 구분으로 생각하는 것이다. 이는 수학 교과서에 나와 있는 내용들을 '함수 개념은 종류 1 지식, 분수 나눗셈 알고리즘은 종류 2 지식......' 하는 식으로 둘로 나눌 수 있다고 생각하는 것이다. 그러나, 위와 같은 지식의 이분법적 구분을 꼭 지식의 외연을 둘로 나누는 구분으로 이해하지 않으면 안되는 것은 아니다. 지식의 이분법적 구분은, '총체로서의 지식'을 보는 상이한 두 관점을 나타내는 것으로 이해될 수도 있다.

이제 본 고의 관심인 '지식의 구조'라는 말에 대해 생각해 보자. '지식의 구조'는 학문중심 교육과정의 중요한 전기가 된 1959년의 우즈 호울 회의의 종합 보고서라고 할 브루너의 「교육의 과정」에 소개된 개념으로, 그 정확한 의미가 무엇인지가 아직까지도 완전히 명확하게 밝혀지지는 않았다고 해도 좋을 난해한 개념이다. '지식의 구조'에 관한 현재까지의 연구 결과를 보면, '지식의 구조'는 대체로 각 학문의 일반적인 개념과 원리를 가리키는 동시에 각 학문 고유의 사고방식 또는 탐구방법을 가리키는 용어로 이해되고 있다.

그런데, 지식을 그냥 지식이라고 하지 않고 '지식의 구조'라고 부르는 것에는 지식을 이분법적으로 나누어 보는 아이디어가 들어 있다. '지식의 구조'가 지식을 이분법적으로 보는 아이디어라면 '지식의 구조'에 대비되면서 '지식의 구조'와 짝을 이루는 무엇인가가 있어야 하는데, 그것은 '지식의 외양'이라고 할 수 있다. '지식의 구조'는 '지식의 외양'을 짝으로 하여 성립하는 지식을 보는 이분법적 사고라고 할 수 있을 것이다(이홍우, 1994). 만일, '지식의 구조'가 '지식의 외양'과 짝을 이루는 개념이라는 것을 받아들인다면, '지식의 구조'는 지식의 외연을 둘로 나누는 아이디어가 아니라는 사실을 인정하게 된다. 지식의 외연을 어떻게 둘로 나누어도 '지식의 구조'와 '지식의 외양'으로 나눌 수는 없다.

그러면, '지식의 구조'와 '지식의 외양'의 이분법적 구분은 지식을 어떻게 나누는 관점일까? '지식의 구조'에 대한 선행 연구는 이 점을 생각하는 데 도움을 준다. 박재문(1981)이 삐아제(Piaget), 레비-스트라우스(Lévi-Strauss), 촘스키(Chomsky) 등이 심리학, 인류학, 언어학에서 구조의 성격을 어떻게 규정하고 있는지를 살펴보고 구조의 성격을 종합해 본 바에 따르면, 구조는 표면에 나타나 눈으로 관찰할 수 있는 것이 아니라, 대상의 근저에 숨겨져 있는 것이라는 특징이 있다. 그러므로, 구조주의자들이 구조를 찾는다는 것은 겉으로 드러난 개별적인 행동, 사건, 또는 현상이 아니라, 그 모든 것들의 이면에서 그 사건과 현상들을 조정하는 규칙이나 원리를 찾는다는 것이다. 또한, 이홍우(1988, 356쪽)에 의하면, 구조주의는 현상과 구조라는 두 개의 수준을 상정한다. 구조주의자가 볼 때, 현상과 구조는 엄밀히 구분된다. 현상은 우리 눈에 보이는 그대로 존재하는 것이 아니라 구조의 형태로 존재하며, 우리가 현상을 파악하는 것도 구조를 통해서 비로소 가능하다. 이런 뜻에서 현상과 구조의 구분은 외양과 실재의 구분에 상응한다고 말할 수 있다. 구조주의는 현상은 실재가 아니라고 보고 그 현상의 이면에 있는 실재 즉, 구조를 찾으려고 하는 것이다. 그러므로, 구조주의자가 하는 일

은 각각 관심 있는 현상의 실재를 구명하는 일이라고 할 수 있다. 다시 말해, 구조주의적 사고방식은 모든 주어져 있는 존재와 현상을 '表面'으로 보고 그로부터 그 '裏面'을 찾고 그 '裏面'과의 관련하에 주어진 '表面'을 이해하려는 사고방식이라고 말할 수 있다. 이러한 구조주의는, 어떤 특정한 주장이기 이전에 세계를 보는 하나의 독특한 인식론적인 관점이다.

이러한 맥락에서, '지식의 구조'와 '지식의 외양'이라는 말을 '지식의 이면(또는 지식의 안쪽)'과 '지식의 표면(또는 지식의 바깥쪽)'이라는 말로 바꾸어 써도 좋을 것이다. 그런데, '지식의 구조'를 가르치자는 말은 지식의 표면 곧 '밖'을 경시하고 이면 곧 '안'만을 중요하게 생각하는 인상을 준다. 그러나, 안과 밖(表裏)은 다음과 같은 두 가지 점에서 상대적인 개념으로 볼 수 있다. 첫째, 안과 밖은 동전의 양면과 같은 의미에서 상대적인 개념이다. 동전의 양면은 모두 표면인 동시에 이면이다. 어느 하나를 표면으로 보면 다른 하나는 자동적으로 이면으로 규정된다. 둘째, 어떤 것의 안은 동시에 또다른 것의 밖이 될 수 있다는 의미에서 안과 밖은 또한 상대적인 개념이다. 비유적으로 말하여, 지구의 궤도는 금성의 궤도의 바깥쪽에 있는 동시에 화성의 궤도의 안쪽에 있다.

안과 밖의 상대적인 성격을 고려하면, '지식의 구조를 가르치자'는 말은 지식의 '밖'이 아닌 '안'(만)을 가르치자는 주장으로 보아야 할 것이 아니라, 오히려 '안과 밖' 또는 '表裏'라는 구조주의적 사고방식으로 지식을 파악하고 지식을 보다 총체적으로 가르쳐야 한다는 권고로 보는 것이 보다 타당해 보인다. 이렇게 보면, 브루너가 「교육의 과정」에서 비판하는 '중간 언어'를 가르치는 교육은 안과 밖이라는 사고방식으로 지식을 파악하여 가르치지 않고, 주어져 있는 것, 교과서에 쓰여 있는 것을 지식의 전부로 보고 그것을 전달하는 것으로 만족하는 교육을 지칭하는 용어로 볼 수 있다. 브루너는 「교육의 과정」에서 다음과 같이 말한다.

> 종래의 교육에서는 이 일(학자들이 하듯이 현상을 탐구하는 일)을 하지 않고 주로 〈다른 무엇〉을 해왔다. 이 〈다른 무엇〉이란 곧, 예컨대 물리학의 경우라면, 물리학의 探究 結果로 얻는 여러가지 結論에 관하여 교실에서 논의하거나 교과서를 읽는 것이다(이것이 우즈 호울 회의에서는 물리학자들의 발견을 학생들에게 전달해 주는 言語라는 뜻에서 中間 言語(middle language)라고 부르게 되었다).(Bruner, 「교육의 과정」, 60쪽.)

그런데, '지식의 구조'를 가르치자는 주장에서 강조되는 일반적 개념과 원리—브루너가 '지식의 구조'의 예로 들고 있는 대표적인 것이 일반적 개념과 원리이다—를 종래 교육에서는 가르치지 않았는가? 종래의 교육에서도 일반적 개념과 원리를 가르쳐왔다. 종래 교육에서 문제점이 있다면, 그것은 일반적 개념과 원리를 가르치지 않은 데에 있는 것이 아니라 그것을 가르치되 교과서에 기술되어 있는 학자들의 탐구 결과를 지식의 전부로 보고 그 결과만을 외우게 한 데에 있다고 보아야 할 것이다. 그러므로, 종래의 내용을 빼버리고, 일반적 개념과 원리의 기술로 교과서를 채우면 '지식의 구조'가 가르쳐진다고 생각하는 것은 오류이다. 일반적 개념과 원리도 안과 밖이라는 사고방식으로 파악되지 않고 책에 적힌 대로 그저 재진술되고 암기되면 중간 언어로 가르쳐진 것이지 '지식의 구조'로서 가르쳐진 것이 아니라고 할 수 있다.

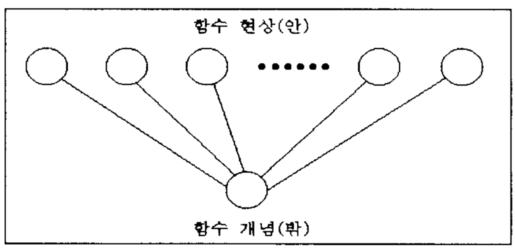
III. 안과 밖의 사고방식으로 본 수학에서의 지식의 구조

본 장에서는 「교육의 과정」에서 브루너가 '지식의 구조'의 예 또는 정의로 들고 있는 것들을 중심으로, 그것들이 안과 밖의 사고방식을 어떻게 반영하고 있는 것인가, 또는 거꾸로 안과 밖의 사고방식으로 그 예와 정의들을 어떻게 해석해 볼 수 있는가를 수학의 몇 가지 예를 통해 살펴보고자 한다.

「교육의 과정」에는 '지식의 구조'의 정의나 보기에 해당하는 것이 여기저기에 언급되어 있는데, 그 대표적인 곳이 브루너가 '지식의 구조'의 뜻을 자세하게 설명하겠다고 말하면서 생물학과 수학과 언어학의 보기를 드는 곳이다 (Bruner, 「교육의 과정」, 46-50쪽). 브루너는 생물학의 보기로서 향성의 예를 든다. 브루너는 많은 생물학적 현상이 향성에 의하여 설명될 수 있다고 말한 뒤에, 구조를 학습한다는 것은 곧 한 가지 현상을 여러 가지 현상과 관련하여 이해할 수 있게 된다는 것, 곧 사물이나 현상이 어떻게 관련되어 있는가를 학습하는 것이라고 말하고 있다. 여기에서의 브루너의 설명을 보면, '지식의 구조'는 '현상간의 상호관련성' 또는 '특수한 현상들과 일반적인 개념으로 이루어진 구조'를 의미하는 것처럼 보인다.

물론, 「교육의 과정」에서 브루너가 말하고자 했던 '지식의 구조'가 이러한 현상의 상호관련성 또는 현상들과 개념으로 이루어진 구조를 말하는 것인지에는 의문의 여지가 없지 않다. 이홍우(1994)는 '지식의 구조'가 현상의 상호관련성을 가리키는 것인지 아니면 개념의 상호관련성을 가리키는 것인지가 「교육의 과정」을 읽고 '지식의 구조'의 의미를 이해하고자 할 때 가지게 되는 한 가지 근본적인 의문임을 지적하고, 구조라는 말이 지니고 있는 요소간의 상호 관련성을 중요하게 고려한다면 '지식의 구조'를 현상의 상호관련성을 뜻하는 것으로보다는 개념간의 상호관련성을 뜻하는 것으로 보는 것이 보다 타당한 바 없지 않음을 지적하고 있다. '지식의 구조'가 정확히 현상의 상호관련성을 가리키는 말인지 개념의 상호관련성을 가리키는 말인지도 중요한 문제이지만, 그것은 본 고의 직접적인 관심의 대상은 아니다.

본 고에서 중요한 것은 일반적 개념과 원리를 '지식의 구조'로 보는 관점이, 개념을 그냥 홀로 떨어져 기술되어 있는 개념으로 보는 것이 아니라 현상과의 상호관련성을 염두에 두고 보는 관점이라는 점에서, '안과 밖의 사고방식'에 부합된다는 점이다. 함수라는 개념을 두고 말한다면, 함수라는 개념을 단순히 그 자체만으로 파악하는 것이 아니라, 여러 함수적 현상들과의 상호관련성과 관련하여 파악하는 것은 '안과 밖의 사고방식'으로 함수 개념을 본 한 예로 볼 수 있다.[3)]



생물학에서 '지식의 구조'의 예로 향성을 든 다음에, 브루너는 수학과에서 '지식의 구

3) 본문의 그림에서는 함수 개념을 주어진 表面(밖)으로 보고 함수 현상을 그 裏面(안)으로 기술하였다. 그러나, 함수 현상을 表面(밖)으로, 함수 개념을 그 裏面(안)으로 해석하는 것 또한 가능하며, 이 차이는 본 고에서는 중요한 것이 아니다. 현상을 안으로 보고 개념을 밖으로 보든 그 반대로 보든 그다지 상관없는 것은, 여기서 表裏(안과 밖)의 구분이 동전의 양면의 구분과 같이 어느 쪽을 먼저 表面으로 보느냐에 따라 다른 한 쪽이 裏面으로 정해지는 상대적인 구분이기 때문이다.

조'의 예를 들고 있다.

> 이보다 더 간단한 것으로 數學科에서 보기를 들어 보자. 代數는 未知數와 旣知數를 方程式에 배열하여 미지수를 기지수로 바꾸는 것이다. 이 방정식을 푸는 데는 세 가지 기본 법칙, 즉 交換, 分配, 結合의 법칙이 있다. 일단 학생이 이 세 가지 기본법칙에 스며 있는 아이디어를 파악하면 현재 풀려고 하고 있는 방정식은 전혀 새로운 방정식이 아니라 자기가 늘 알고 있던 방정식의 한 가지 變容에 불과하다는 것을 쉽게 알 수 있을 것이다. 이 變容에 자기가 알고 있던 것을 적용하는 데 중요한 것은 이 법칙의 〈이름〉을 아는 것이 아니라 그 법칙을 〈사용〉할 줄 아는 것이다.(Bruner, 「교육의 과정」, 48-49쪽)

이 다음에 브루너는 언어학에서 문장의 의미를 바꾸지 않고 문장의 형식을 바꾸는 언어의 변형 규칙, 예를 들어 능동태를 수동태로 고치는 문법 규칙을 구조의 예로 들고 있다. 이러한 수학과 언어학의 예를 보면 '지식의 구조'라는 말은 '교환, 결합, 분배 법칙과 같은 법칙들이 상호관련된 체계'를 의미하는 것으로 보이기도 하는 한편, 교환, 결합, 분배 법칙과 능동태를 수동태로 고치는 문법 규칙과 같은 '하나하나의 규칙'을 말하는 것으로 보이기도 한다. 브루너가 여기서 말하는 '지식의 구조'가 이 둘 중의 어느 것인가도 관심의 대상이 될 수 있겠으나, 적어도 여기서의 브루너의 진술만 가지고 본다면 어느 쪽도 '지식의 구조가 아니다'라고 단언하기 어려워 보인다.

그러면, 이 두 가지가 안과 밖의 사고방식을 어떻게 나타낼 수 있는지, 안과 밖의 사고방식으로 이 두 가지를 어떻게 볼 수 있는지를 생각해 보도록 하겠다. 먼저, '지식의 구조'를 교환, 분배, 결합 법칙과 같은 법칙들이 상호관련을 맺어서 이루고 있는 체계를 의미하는 것으로 보면 여기서의 '지식의 구조'는 대체로 군이나 환이나 체, 또는 벡터 공간과 같은 대수적 구조를 의미하는 것으로 볼 수 있다. 예를 들어, 군은 아래에서와 같이 정의되는데 이 정의 자체가 이미 구조를 기술한 것으로 볼 수도 있다. 그러나 이 기술 자체를 '지식의 구조'로 보면, '지식의 구조'를 가르치자는 말은 이전에 교과서에 기술된 다른 내용을 없애고 그 내용 대신에 아래와 같은 기술을 넣자는 뜻을 함의하는 것이 되는데 이것은 '중간 언어'를 전달하는 교육에 대한 문제의식을 담고 있는 '지식의 구조'라는 말에 들어 있는 근본 사상에 그다지 부합되지 않는 것으로 보인다.

> 공집합이 아닌 집합 G 위에 연산 $\circ$이 정의되어 있고
>
> (즉, $a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$)
>
> 또 이 연산에 관하여 다음이 성립할 때, 雙 $(G, \circ)$ 를 군이라 하고 G 는 연산 $\circ$에 대하여 군을 이룬다고 말한다.
>
> G. 1 결합법칙: 모든 $a, b, c \in G$ 에 대하여 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
>
> G. 2 항등원의 존재: 특정한 원 $e \in G$ 가 존재하여, 모든 $a \in G$ 에 대해 $a \circ e = e \circ a = a$ 를 만족시킨다. 이 e 를 $(G, \circ)$ 의 [G 의 $\circ$에 관한] 항등원이라 한다.
>
> G. 3 역원의 존재: 각 $a \in G$ 에 대하여, $a \circ x = x \circ a = e$ 를 만족시키는 원 $x \in G$ 가 존재한다. 이 x 를 a 의 [$\circ$에 관한] 역원이라 하고, 이것을 a^{-1}로 나타낸다. 즉, $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$
>
> (김응태, 박승안, 1990, 30쪽)

'지식의 구조'라는 말에 들어있는 사고방식

을 '안과 밖의 사고방식'이라고 규정할 때, 위의 기술이 나타내는 군 구조를 '지식의 구조'라고 말할 수 있기 위해서는 그것이 무엇인가의 '안'을 기술한 것이어야 한다. 그러면, 위의 기술이 나타내는 군 구조는 무엇의 안이라고 볼 수 있는가? 여러 가지로 생각할 수 있겠지만, 브루바끼(Bourbaki)의 다음과 같은 설명은 위의 기술 또는 위의 기술이 나타내고 있는 군 구조를 무엇의 안으로 볼 수 있는가에 대한 하나의 시사를 제공한다. 브루바끼(1950)는 「수학의 건축술」이라는 논문에서 자신들의 공리적 방법이 적용되는 방식을 추상적인 군을 예로 하여 설명하고 있는데, 먼저 1) 실수의 덧셈, 2) Z_P에서의 곱셈, 3) 삼차원 유클리드 공간에서의 변환의 합성이라는 구체적인 세 이론을 생각하자고 한다. 이 세 이론의 각각에서 각 이론에서 정의되어 있는 연산 또는 조작에 의해 논의되고 있는 집합(첫 번째 경우는 실수 집합, 두 번째는 Z_P, 세 번째는 모든 변환의 집합)의 두 원소 x, y를 잘 정의된 셋째 원소에 대응시킬 수 있는데, 이러한 셋째 원소를 세 가지 경우 모두에 대하여 $x\tau y$로 쓸 수 있다. x, y가 실수이면 $x\tau y$는 x와 y의 합이고, x, y가 1, 2,..., p-1의 정수이면 $x\tau y$는 모듈로 p에 대한 x, y의 곱이고, x, y가 변환인 경우에는 $x\tau y$는 합성변환이다. 위의 세 가지 이론을 잘 조사해 보면, 세 가지 이론 사이에 놀랄만한 유사성이 있음을 발견하게 된다. 이러한 분석을 통해, 예를 들어, 다음과 같은 세 가지 공통된 성질을 뽑아낼 수 있다. 그리고 상징적 기호를 사용하여 위의 세 가지 이론에 공통되는 성질을 표현할 수 있다. 필요한 경우에, 이 상징적 기호로 표현한 것을 각각의 이론의 고유한 언어로 번역하는 것은 쉬운 일이다.

(a) 모든 원소 x, y, z에 대하여 $x\tau(y\tau z)=(x\tau y)\tau z$ (결합법칙)

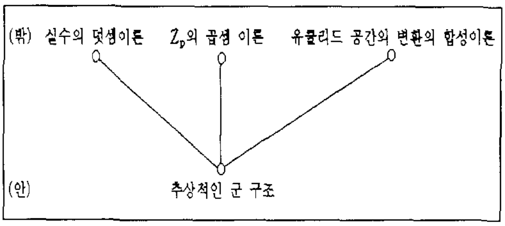
(b) 모든 원소 x에 대하여 어떤 원소 e가 존재하여, $e\tau x=x\tau e=x$이다.(실수의 덧셈에 대하여는 e는 0, Zp에서의 곱셈에 대해서는 e는 1, 유클리드 공간의 변환에서는 e는 항등변환이다)

(c) 모든 원소 x에 대응하여 $x\tau x'=x'\tau x=e$인 어떤 원소 x'가 존재한다. (실수의 덧셈에 대하여 x'는 -x이고, 변환의 합성에 대하여 x'는 x의 역변환, 즉 x에 의해 변환된 각각의 점을 원래의 점으로 되돌리는 변환이고, Zp에서 x'은 x의 곱셈에 대한 역원으로 간단한 계산을 통해 구할 수 있다.)

이 추상화된 세 공리로부터 여러 정리를 끌어낼 수 있는데, 이 때 x, y, z 자체의 성질은 전혀 문제되지 않는다. 그것들이 실수인지 0에서 p-1까지의 정수인지 혹은 다른 어떤 것들인지 전혀 생각하지 않는다. 다만 집합 위의 연산 τ가 성질 (a), (b), (c)를 가지고 있다는 약속만이 중요하다. 이 일반적인 공리들로부터 이끌어낸 결론은 모두 위의 세 가지 각각의 이론에 그대로 적용될 수 있으므로, 각각의 이론을 따로따로 연구하는 것보다는 위의 추상화된 세 가지 성질로부터 얻어지는 논리적 결과를 연구하는 것이 불필요한 반복을 피할 수 있다는 점에서도 좋다. 이 때, 이 추상화된 공리들로 이루어지는 구조에 이름을 붙이는 것이 편리할 것이므로, 어떤 집합 위에서 연산 τ가 성질 (a), (b), (c)를 가지고 있을 때 그 집합을 연산 τ에 대하여 군을 이룬다고 부른다. 성질 (a), (b), (c)를 군의 공리라고 부르고 이 성질들로부터 연역되어 나오는 결과가 군의 공리적 이론을 구성한다.

이와 같은 맥락에서 군 구조를 안과 밖의

사고방식으로 본다면, 실수의 덧셈 이론이나 ZP에서의 곱셈 이론, 삼차원 유클리드 공간의 변환의 합성 이론은 모두 추상적인 군 구조의 '表面'(또는 裏面)으로 볼 수 있으며, 추상적인 군 구조는 이들 세 이론들의 '裏面'(또는 表面)으로 볼 수 있다.[4)]



이제, 교환, 결합, 분배 법칙과 같은 하나하나의 법칙을 '지식의 구조'라고 보는 경우를 교환 법칙을 예로 하여 생각해 보기로 한다. 교환 법칙에 나타나 있는 교환 가능성의 사고방식은 수학에 깊이 뿌리 박혀 있다. 현대대수학에서 중요한 개념인 준동형(동형)사상에도 교환 가능성의 아이디어가 중심에 자리잡고 있다. 예를 들어, $f(a+b) = f(a)+f(b)$는 덧셈과 f의 작용 순서를 교환하였을 때에 그 결과가 같다는 것을 말하는 것이다. 함수의 곱을 $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$로 정의하는 것에는 함수를 곱한 다음에 시행시키는 것과 함수를 먼저 시행시킨 다음에 곱하는 것의 결과가 같다는 아이디어가 들어 있다. 합성함수의 미분에 관한 정리 $D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) \circ Dg(a)$도 함수의 합성과 미분이라는 두 조작의 순서를 적절한 조건 하에서 교환하는 것이 가능하다는 것을 말하는 정리이다. 연속함수열, 미분가능함수열, 적분가능함수열이 어떤 조건을 만족할 때 그 극한함수도 연속, 미분가능, 적분가능한가 하는 것은 해석학의 주요한 내용인데 이는 모두 두 개의 극한을 취하는 조작을 언제 교환할 수 있는가에 관한 것이다. 어떤 두 조작이 교환가능하다는 것은 조작의 시행 순서의 변경에 영향을 받지 않는 그 무엇인가가 보존되고 있음을 말해 주는 것이다.

이와 같이 교환 법칙이 교환 가능성이라는 아이디어를 나타낸다는 점은 '지식의 구조'가 지닌 의미의 또다른 부분을 시사하고 있다. 브루너는「교육의 과정」1장에서 「교육의 과정」이 다루고 있는 여러가지 주제는 모두 다음과 같은 한 가지 핵심적 확신에서 풀려 나온 것이라고 말한다.

> … 그 핵심적 확신이라는 것은 곧 지식의 최전선에서 새로운 지식을 만들어 내는 학자들이 하는 것이거나 초등학교 3학년 학생이 하는 것이거나를 막론하고 모든 지적 활동은 근본적으로 동일하다는 것이다 (Bruner,「교육의 과정」, 59-60쪽).

브루너에 따르면, 종래 학생들이 교과를 배운다는 것은, 예를 들어 물리라는 교과를 배운다는 것은 물리학자들이 물리학을 탐구한 결과로 얻어진 지식, 달리 말해 결과로서의 지식을 수동적으로 받아들이는 것을 의미했다. 그러나 물리학을 공부하는 초등학교 3학년 학생이 물리학자와 동일한 일을 한다는 말은 그것이 교과의 또는 교과를 배운다는 말의 참된 의미가 아니라는 말이다. 물리라는 교과는 단지 물리학자들이 만들어낸 법칙이 아니라 그 법칙을 발견하는 동안에 물리학자들이 하는 일을 또한 가리킨다. 물리라는 교과를 가르칠 때 학생이 배워야 할 것은 법칙 그 자체만이 아니라, 그 법칙을 다루는 데 쓰이는 사고방식 또는 탐구방식이다. 여기에 이르면 '지식의 구조'라는 말

4) 본문의 그림에서는 추상적인 군 구조를 '안'으로 구체적인 세 이론을 '밖'으로 표기하였으나, 거꾸로 추상적인 군 구조를 먼저 주어진 '表面(밖)'으로 보고, 구체적인 세 이론을 '裏面(안)'으로 볼 수도 있다.

은 법칙과 같은 진술에 담겨 있는 사고방식을 의미의 한 부분으로 포함하고 있음을 알게 된다. 이홍우(1992, 79쪽)도 '지식의 구조'는 일반적 개념과 원리와 동의어로 쓰여지기보다는 '학문' 또는 각 학문을 특징짓는 '사물을 보는 안목' 또는 '사고방식'과 동의어로 쓰여지는 것이 더 타당할 것이라고 하고 있다.

'사고방식'으로서의 '지식의 구조'의 예를 대수적 구조를 소재로 하여 살펴보자. 예를 들어, 앞에서 군 구조의 정의에 나온 최초의 진술(表面), '공집합이 아닌 집합 G 위에 연산 $\circ$이 정의되어 있고 (즉, $a,b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$)'는 어떤 사고방식(裏面)을 담고 있는 기술일까? 먼저, 위의 진술은 군 G를 논할 때 연산 $\circ$이 중요한 역할을 한다는 것을 말해 준다. 어떤 집합 G는 처음에는 그저 집합일 뿐이며, 그 집합에 어떤 연산이 부여되었을 때 비로소 구조가 될 가능성을 부여받기 시작한다. 어떤 집합이 구조가 되기 위해서 갖추어야 할 첫 번째 조건은 그 집합 위에 연산 $\circ$이 정의될 수 있어야 한다는 것이다($a,b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$). 이는 그 집합이 어떤 연산에 대하여 '닫혀 있다'는, 즉 그 집합의 원소들에 연산을 적용한 결과가 그 집합을 벗어나지 않고 그 집합 내에 있다는, '집합 내에서의 계산 가능성'의 보장을 의미한다. 이 '집합 내에서의 계산 가능성'을 따지는 것은 대수적 구조에 관한 기술의 첫 문장이 담고 있는 기본적인 사고방식이다.[5] 이 사고방식을 모르는 채 그저 군의 공리를 외우는 것은 브루너가 비판한 '중간 언어'를 외우는 것과 다를 것이 없을 것이다.

대수적 구조와 관련된 기본적인 사고방식을 하나 더 살펴보자. 어떤 집합이 어떤 연산에 대하여 닫혀 있고 적절한 성질을 만족하는 집합 곧 대수적 구조일 경우에, 그 다음으로 알고 싶은 것 가운데 하나는 그 대수적 구조의 명확한 내부 구조이다. 이 때 가장 관심이 가는 것은 그 구조를 생성하는 생성원(Generator)이 있는가, 있다면 어떤 것인가 하는 것이다. 생성원들이 존재한다면 그 집합의 모든 원소는 이 생성원들로 적당히 표현될 것이므로 생성원을 연구함으로써 그 구조의 여러 성질을 밝혀낼 수 있을 것이기 때문이다.

구조의 연구라고 그 학문성을 특징지을 수 있는 현대대수학에서 생성원은 중요하게 취급된다. 몇 가지 예를 보겠다. 군 (G, $\circ$)에서 $a \in G$라 할 때, G의 부분군 $H = \{ a^m \mid m \in Z \} = \{ \cdots, a^2, a, e, a^{-1}, a^{-2}, \cdots \}$ 은 a에 의하여 생성된 순환 부분군이며 이것을 $\langle a \rangle$ 로 나타낸다. 가장 간단한 무한군이라 할 정수의 집합은 덧셈에 대하여 $Z = \langle 1 \rangle$ 이다. 1은 덧셈에 대하여 정수 집합의 생성원인 것이다.

그러면, 곱셈에 대한 정수의 생성원이라고 할 만한 것은 무엇일까? 정수의 집합은 곱셈에 대하여 군 구조를 이루지는 않는다. 그러나, 정수의 집합은, 비록 군은 아니지만, 곱셈에 대하

5) 모든 대수적 구조의 정의는 기본적으로 어떤 집합 위에 어떤 연산이 정의되는가로부터 시작된다. 일례로, 환의 정의도, '집합 R 위의 두 이항연산 +와 $\cdot$이 정의되어 있고 (즉, $a,\ b \in R \Rightarrow a+b \in R,\ a \cdot b \in R$)'로 시작된다.

6) M.0 집합 Z 위에 곱셈이 정의되어 있다. 즉, $a,\ b \in Z \Rightarrow a \cdot b \in Z$

M.1 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (곱셈에 관한 결합법칙)

M.2 $a \cdot b = b \cdot a$ (곱셈에 관한 교환법칙)

M.3 특정한 정수 $1 \in Z$, $1 \neq 0$이 존재하여, 모든 $a \in Z$ 에 대하여 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$를 만족시킨다. 정수 1을 곱셈에 관한 항등원이라고 한다.

M.4 $a \cdot b = a \cdot c$, $a \neq 0$ 이면 $b = c$ (곱셈에 관한 소약법칙)

(김웅태, 박승안, 1991, 5쪽)

여 일종의 구조를 이루고 있다.[6] 정수의 집합을 곱셈에 대한 하나의 구조로 볼 때, 그 구조의 생성원이라 할 만한 것은 무엇일까? 그것이 무엇인지를 보여주는 것이 정수론의 기본정리이다.

> (정수론의 기본정리) 소인수 분해의 존재성과 유일성
>
> 정수 $n>1$은 소인수분해된다. 또, $n=p_1p_2\cdots p_r$, $n=q_1q_2\cdots q_s$ 를 n의 소인수 분해라고 하면 $r=s$이고, 또 이 두 소인수분해는 인수의 순서만이 서로 다를 뿐이다.

결국 표준분해를 한다고 생각하면, 정수 $n>1$은 한 가지 방법으로 소수에 의해 나타내어질 수 있다. 소수를 정수의 곱셈에 대한 생성원으로 볼 수 있다는 점을 생각하면, 정수의 구조에 대한 연구라고 할 수 있는 정수론에서 소수가 중요하게 취급되며 소인수분해의 존재성과 유일성에 관한 정리가 정수론의 기본정리인 것에 대해 어느 정도 공감할 수 있다.

어떤 집합이 적당한 공리를 만족하는 구조임이 확인된 다음, 그 구조의 내적 모습과 질서를 알아보기 위해 구조의 생성원에 관심을 가지고 구조의 생성원이 있는지, 있다면 무엇인지를 생각하는 사고방식은 다른 대수적 구조의 연구에서도 확인할 수 있다. 예를 들어, 체 F 위의 정사각행렬 $A\in Mat_n(F)$에 대하여 다음 조건은 서로 동치라는 사실이 알려져 있는데, 이는 기본행렬들이 정칙행렬집합의 곱셈에 관한 일종의 생성원이라는 것을 나타내고 있다

> 체 F 위의 정사각행렬 $A\in Mat_n(F)$에 대하여 다음 조건은 서로 동치이다.
>
> (1) A는 정칙행렬이다.
>
> (2) A 의 기약사다리꼴 행렬은 항등행렬 I이다.
> 즉 $E_s\cdots E_1A=I$ 인 기본행렬 $E_s, \cdots, E_1$ 가 존재한다.
>
> (3) A는 유한개의 기본행렬의 곱으로 나타내어진다.
>
> (김응태, 박승안, 1992, 33쪽)

선형대수학에서 중요하게 등장하는 벡터공간의 기저가 중요한 이유도 생성원의 관점에서 생각해 볼 수 있다. 체 F 위의 벡터공간 V의 부분집합 $B=\{v_1,\cdots,v_n\}$가 V의 기저일 때, 벡터공간 V의 임의의 벡터 v는 단 한 가지 방법으로 $v_1,\cdots,v_n$의 일차결합으로 나타내어진다. 이 기저를 사용하여 집합 V의 내적 구조를 명료하게 파악할 수 있다.

이와 같이, 어떤 집합이 있을 때 그것을 원소들이 되는대로 산만하게 나열되어 있는 집합으로 놓아두는 것이 아니라, 그것이 어떤 연산에 대하여 닫혀 있는가를 생각함으로써 그것을 질서 있는 구조로 파악하려는 사고방식, 또 그 집합의 모든 원소들을 생성하는 기본적인 원소들을 찾아내어 그 구조의 원소들을 생성원들로 나타내고, 생성원들을 통해 그 구조의 내적 모습과 질서를 깨끗이 파악하고 표현하려고 하는 것은 대수적 구조의 기술이 보여주는 기본적인 사고방식의 하나이다. 이러한 사고방식의 이해가 수반되지 않고 그저 기술된 대수적 구조의 공리들을 외우는 것은 설사 그 기술이 개념과 법칙의 상호관련된 체계를 기술하고 있는 것이라고 하더라도, '안과 밖의 사고방식'에 비추어 볼 때, '지식의 구조'를 가르쳤다고 하기 어려우며 새로운 종류의 '중간 언어'를 가르치고 배운 것과 그리 다르다고도 하기 어렵다.

Ⅳ. 지식의 구조를 가르치기 위하여

역사적으로 볼 때, '지식의 구조'를 가르치

고자 한 시도는 학문중심 교육과정기에 활발하게 이루어졌는데, 수학교육에서는 '새수학'으로 상징되는 수학교육 현대화 운동과 맞물려 일어났다. 그러나, 결과적으로 '새수학'은 수학적 사고의 교육에 성공했다고 말해지기보다는 오히려 현재 수학교육의 여러 가지 문제를 초래한 근원으로 비판되고 있다.

수학교육 현대화 운동은 미국의 주도로 시작되어 전세계로 확산되었다. 1952년에 일리노이 대학을 중심으로 일리노이 학교수학 연구회(UICSM)가 활동을 시작하였고, 새로운 수학 교육과정과 실험 교과서를 만들기 시작하였다. 1955년에는 미국의 대학 입학시험 위원회(CEEB)가 대학 진학 희망자가 고등학교에서 이수하는 것이 바람직하다고 생각되는 현대화된 수학 커리큘럼의 편성을 시작했다. 1957년의 스푸트니크호 사건은 수학교육 현대화 운동에 상당한 추진력을 부여했다. 정치적 군사적으로 적대 관계에 있던 소련이 인공위성을 쏘아 올린 사실에 미국인들은 적지 않은 충격을 받았던 것같다. 미국은 그 상황을 국가 안보에 대한 잠정적인 위기 상황으로 규정하고, 1958년 과학기술의 진흥과 과학교육의 충실을 목적으로 하는 「국가방위 교육법」을 만들어 범국가적인 차원에서 교육 개혁 운동, 특히 수학교육과 과학교육의 개혁 운동을 통하여 이 문제에 대처하고자 하였다.

스푸트니크 사건 이후 주로 수학자가 주축이 되는 여러 그룹이 새로운 교육과정을 만드는 사업에 동참하기로 결정하였는데, 그 중 대표적인 것이 학교수학 연구단(SMSG)이다. 미국수학회(AMS)는 1958년에 자신들의 능력을 고등학교 교육과정을 잘 만드는 데에 사용해야 한다는 의견을 정하고, 전미수학교사협의회(NCTM), 미국수학협회(MAA)등과 함께 새로운 학교수학 연구 그룹을 만들었는데 이것이 바로 SMSG였다. SMSG는 CEEB가 1959년에 발표한 「대학 진학 준비를 위한 수학 프로그램」에 준거한 실험 교과서를 제작하기 시작하여, 일련의 교과서와 해설서, 교사 재교육을 위한 교재를 만들었다.

이러는 가운데, 1959년 9월 '지식의 구조'라는 말로 유명해진 우즈 호울 회의가 열렸다. 이 회의에는 약 35명의 과학자, 수학자, 심리학자, 교육자들이 참석하여 열흘 동안 미국의 초·중등학교 교육의 개선 방안을 논의하였다. 이 회의는, 그 당시 미국 전체에 태동하고 있던 수학 및 과학 교육과정의 개혁에 직접 관여하고 있거나 관심을 가진 사람들이 모여 그 교육과정의 기초가 되어 있는 원리를 찾으려고 했던 회의라고 규정할 수 있다(Bruner, 「교육의 과정」, 역자해설, 17쪽). 수학 쪽에서는 SMSG의 대표자격인 비글(Begle)을 비롯한 6명이 참석하였다. 브루너의 다음 말은 우즈 호울 회의가 열릴 당시의 시대적 상황 그리고 이 당시 수학교육의 개혁 운동을 이끌어 가고 있던 사람들이 어떤 성향을 가지고 있던 사람들인지, 이들의 주요한 일차적인 관심사가 무엇이었는지를 말해 주고 있다.

> 교육에 관한 이 새로운 관심이 나타난 곳은 여러 곳이지만, 그 중에서도 특히 초·중등학교 교육과정 계획에 두드러지게 나타났다. 이 방면에 몇 가지 괄목할 만한 발전이 근래 이루어지고 있다. 대학의 과학자와 교수들이 일찌기 유래를 볼 수 없을 정도로 광범하게 교육과정 구성에 참여하고 있다. 이들은 각각의 학문분야에서 첨단을 걷는 이름난 대가들이다. 이들은 과학이나 다른 학문의 가장 새로운 지식을 토대로 하면서, 동시에 학교교육의 성격에 대한 혁신적인 생각을 가지고 초·중등학교의 교수요목을 작성해 왔다. 이렇게 구성된 교육과정 중에서 가장 잘 조직된 것은 물리교육 연구회(PSSC; Physical Science Study Committee)에

서 준비한 고등학교용 물리 교과일 것이다...... 수학에 있어서도 이와 비슷한 것으로 학교수학 연구단 (SMSG; School Mathematics Study Group), 수학교육 위원회(Commission on Mathematics), 일리노이주 학교 수학 연구회(Illinois Committee on School Mathematics)와 그 밖의 다른 연구회에서 만든 교육과정이 있다. (Bruner, 「교육의 과정」, 38-39쪽)

「교육의 과정」에서 강조되는 아이디어, 학문중심 교육과정을 특징짓는 대표적인 아이디어는 '지식의 구조'와 '발견학습'이다. 그러나, 그 당시 수학교육 개혁 운동에서 개혁의 핵심은 그것보다는 '새수학' 또는 '현대 수학'이었던 것으로 보인다. 위의 브루너의 말에서 읽어낼 수 있듯이, 그 당시 수학교육 개혁 운동을 주도하고 있었던 사람들은 '자신의 전공분야에서 첨단을 걷는 이름난 수학자들'이었다. 이들의 작업 수행의 기초가 되었던 것은 수학의 '가장 새로운 지식'이었고, 이들의 일차적인 관심사는 '자신의 학문 분야의 가장 새로운 지식을 토대로 하여' 초·중등학교의 교수요목을 다시 작성하여 학교 수학과 현대 수학, 달리 말해 초·중등학교 수학과 대학 수학의 간극을 줄이는 것이었다.

학교 수학과 현대 수학의 간극을 메우려는 의도를 가지고 교육과정 개발에 참여한 사람들이 교재를 어떤 방향으로 구성해가게 되었을지는 짐작할 수 있다. 그들은 새로운 현대적인 내용을 많이 교육과정에 넣고자 하였을 뿐 아니라 현대수학의 특징을 교재 구성에 반영하여 교재를 논리적으로 전개하고 전문 용어나 기호를 사용하고 엄밀함과 정확함을 강조하고자 하였다. 집합, 진법, 합동식과 부등식, 기호 논리, 군, 환, 체, 행렬과 같은 새로운 내용이 학교 수학에 도입되었다.

우리 나라에서도 수학 교육과정 현대화라는 세계적인 추세에 따라 수학교육 현대화 운동에 부합하는 교육과정을 만들려는 시도가 1960년대 중반부터 진행되었다. SMSG의 교과서가 번역되어 수학교육 현대화 운동의 구체적인 모습이 알려지게 되고, 1973년부터 연차적으로 제정 공포된 제 3차 수학 교육과정에 현대화 운동의 아이디어가 강하게 반영되었다. 그리고, 제 4차 교육과정 때로부터 계속하여 제 3차 교육과정에서 급격하게 도입된 내용을 삭제하고 약화시키는 방향으로 교육과정 개정 작업이 이루어져 오고 있다.

본래 '지식의 구조'라는 아이디어는 지식의 양적 팽창에 대응하기 위한 아이디어로서의 성격을 지니고 있었다. '지식은 놀라운 속도로 양적으로 증가해 간다. 우리는 그 증가하는 지식을 하나하나 모두 학생들에게 가르칠 수는 없다. 어찌할 것인가?' 이런 고려로부터 각 학문의 기본적인 아이디어나 고유의 탐구 방법은 그렇게 많지 않을 것이니, 그것을 뽑아 내어 나선형으로 점차 심화 확대해 가며 가르치자는 아이디어가 나온 것으로도 볼 수 있다(이홍우, 1977).

그러므로, '지식의 구조'를 가르치려는 아이디어에 따른다면 외관상 교육 내용은 그 양이 줄어들어야 했을 것이다. 그런데, 수학교육에서 '지식의 구조'를 가르치고자 했던 시도라고 할 '새수학' 운동은 거꾸로, 대단히 많은 양의 새로운 내용을 학교 수학에 덧붙이는 결과를 낳았다. 이것은 '새수학' 운동의 주도자들의 일차 관심사가 '지식의 구조'에 담겨 있는 교육학적 고려를 구현하는 것보다도 현대 수학의 도입에 있었다는 방증이 된다.

안과 밖의 사고방식으로 보면, 현대 수학이 고전 수학보다 '지식의 구조'와 개념상 보다 밀접한 관련을 가지고 있는 것인지는 그다지 분명하지 않다. 수학이라는 학문을 공리적인 성격의 구조로 파악하는 경향이 고전 수학에

비해 현대 수학에서 보다 강한 점이 없지 않다는 점에서 현대 수학은 고전 수학보다 구조와 보다 밀접한 관련을 가지고 있다고 할 수 있을지도 모른다. 그러나, '지식의 구조'라는 개념이 단순히 공리적 구조나 개념의 구조도를 의미하는 것으로 이해되어서는 안되는 개념이라는 것과 '안과 밖의 사고방식'이 지식 일반을 보는 포괄적인 인식론적 관점이라는 점에서 보면, 고전수학도 지식인 이상 '지식의 구조'라는 아이디어는 고전 수학에도 동일하게 적용될 수 있는 아이디어라고 할 수 있다.

'새수학' 운동에서 '지식의 구조'는 '세계와 지식을 보는 독특한 인식론적 관점'을 나타내는 표현으로보다는 일종의 '개념의 구조도'와 같은 것으로 파악된 경향이 없지 않다. 개념의 구조도가 전혀 '지식의 구조'가 아닌 것은 아니지만, 안과 밖의 사고방식으로 이해되지 못한 개념의 구조도는 이전의 중간 언어를 대치한 새로운 중간 언어로 전락해 버릴 수 있다.

'새수학' 운동이 실패한 원인의 하나로, '지식의 구조'라는 말에 담겨 있는 '지식을 보는 독특한 관점'을 '새수학' 운동의 주도자들이 명확히 이해하지 못하고 있었거나 아니면 그들은 이해하고 있었을지라도 그것을 교사들에게 이해시키고 준비시키는 데 실패했다는 점을 들 수 있을 것이다. '새수학' 운동의 주창자들은 자신들의 꿈을 교사를 통해 달성하려고 하기보다는 교재를 통해서 달성하려고 한 것으로 보인다. 어떤 교과든지 올바른 형식으로 표현하면 어떤 발달 단계에 있는 아동에게도 효과적으로 가르칠 수 있다고 했지만, 누구나 그렇게 할 수 있을 것인가? 지식의 구조를 가르치려는 꿈은 지식의 구조를 알고 있는 교사를 통해서 이루어질 수 있다.

수학적 사고의 교육이 수학교육의 영원한 과제인 것과 마찬가지로, '지식의 구조'를 가르치는 일 또한 여전히 '미완성의 이상'으로 남아 있다고 해 좋을 것이다. '새수학' 운동이 그다지 성공적이지 못했다고 하여, '지식의 구조'를 가르친다는 말에 담긴 교육적 이상 또한 그릇된 것이라고 속단할 필요는 없다. 이 이상은 '소크라테스의 정신'을 공유한 교사들에 의해 점진적으로 가까이 다가갈 수 있는 이상이다.

'지식의 구조'를 가르치는 데 치명적인 방해가 되는 것이 책에 기록되어 있는 기술을 지식과 동일시하여 그것을 전달하는 것으로 모든 것이 된다는 생각이다. 문자(책)를 매개로 교육을 할 때 불가피하게 문자 이면의 사고를 이해하지 못한 상태에서 쓰여 있는 문자를 외워서 되뇌면서 마치 배운 듯이 생각하는 일이 일어나기 쉽다. 이러한 문자와 관련된 암기의 위험, 지식의 겉만 가르치고 배우고서 지식의 전부를 가르치고 배운 것인양 생각하는 오류에서 벗어나기 위해서는 문자의 이면에 담겨 있는 사고가 문자를 사용하는 사람 자신의 사고로 재발견될 필요가 있다. 만일 수학교사가 책에 적혀 있는 것을 지식의 전부로 보지 않고 그 이면이 있다는 것을 염두에 두고 늘 수학을 공부하고 교재 연구를 한다면, 그는 자신이 가르치고자 하는 하나하나의 내용의 '지식의 表裏'를 나름대로 파악하게 될 것이고, 그는 이 공부로 자신의 수업 시간에 교과서에 적혀 있는 '지식의 표면'에 활기를 불어 넣을 수 있을 것이다.

학생에게 '지식의 구조'를 가르치기 위해서는 수학교사를 비롯하여 수학교육에 종사하는 사람들이 수학책에 적혀 있는 '지식의 표면'으로부터 그 이면을 탐구하는 과정을 밟을 필요가 있다. 수학교사 양성기관인 사범대학과 교육대학에서의 수학 내용론 강좌 또는 수학교육과정론 강좌를 통해서 예비 수학교사 때로부터 수학을 공부하는 가운데 이러한 탐구 과정을 경험하도록 할 필요가 있다. 만일 수학 교사가

교과서에 나와 있는 대로 재진술하는 교수를 하는 것으로 충분하다면, 그러한 과정을 밟게 할 필요는 없을 것이다. 그러나 이렇게 해서는 학생들이 그 교사를 통하여 배울 수 있는 것은 아주 얼마 안되는 것으로 한정되어 버리고, 그 교사를 통해 가르쳐지는 학교 수학의 교육적 가치 또한 격감해 버리게 될 것이다. 그리고, 그는 '지식의 表裏'를 알고 '총체로서의 지식'을 가르친 교사로서가 아니라, '중간 언어'의 전달자로서 학생들에게 기억되게 될 것이다.[7)]

참고 문헌

김응태, 박승안(1990), 「현대대수학」, 제 2판, 서울: 이우출판사.

김응태, 박승안(1991), 「정수론」, 제 3판, 서울: 경문사.

김응태, 박승안(1992), 「선형대수학」, 서울: 청문각.

박재문(1981), 「구조주의 인식론에 비추어 본 브루너의 지식의 구조」, 서울대학교 대학원 박사학위론문.

이홍우(1977), "지식 · 정보의 팽창과 교육내용의 선정", 이홍우(1992), 「증보 교육과정탐구」, 서울: 박영사, pp. 494-506.

이홍우(1979), "원리는 가르칠 수 있는가: 발견학습의 논리", 이홍우(1992), 「증보 교육과정탐구」, 서울: 박영사, pp. 429-452.

이홍우(1988), 「교육의 목적과 난점」, 제 5판, 제 2쇄, 서울: 교육과학사.

이홍우(1994), 「Bruner 지식의 구조」, 교육이론 지맥 CI1, 再版, 서울: 교육과학사.

정동명, 조승제(1989), 「실해석학개론」, 제 2판, 서울: 이우출판사.

Bartle, R. G.(1966), *The Elements of Integration*, New York; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc.

Bourbaki(1950), "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly*. 57, pp. 221-232

Bruner, J. S.(1960), *The Process of Education*, Harvard University Press, 이홍우(역)(1995), 「브루너 교육의 과정」, 重版, 서울: 배영사.

Dearden, R. F.(1967), "Instruction and learning by discovery", In R. S. Peters(ed.), *The Concept of Education*, London: Routledge & Kegan paul, pp. 135-155.

Dewey, J.(1933). *How We Think: A Restatement*

7) '수학교사를 비롯하여 수학교육에 종사하는 사람들이 수학책에 적혀 있는 지식의 표면으로부터 그 이면을 탐구하는 과정을 밟을 필요가 있다'는 것과 같은 이 글의 결론은 아무런 새로운 것이 없는, 누구나 알고 있는 당연한 결론일지 모른다. 철학의 한 가지 책무는 당연한 결론이 왜 당연한가를 밝히는 데에 있다고 한다. 예를 들어, 사회적 구성주의 수학교육철학이 수학교육철학으로서 가지는 고유한 가치로, 사회적 구성주의가 '수학 수업에서 의사소통을 중요시하는 것이 왜 당연한 것인지'를 보여준다는 것을 들 수 있다. (구체적으로 수업에서 어떻게 의사소통을 중요시할 것인가는 철학 고유의 문제 영역이 아니다.) 당연한 것이 진정 당연한 것으로 모든 사람에게 인식되어 그들의 삶을 규제하고 이끌지 못하는 데서 온갖 문제들이 파생되어 나온다. 구조주의적 관점은 누구나 알고 있는 듯한 본 고의 결론이 왜 당연한 것인지(정말 당연한 것인지) 그리고 이러한 결론에 붙박혀 있는 논리적 가정이 무엇인지를 보여 준다.

그러나, 수학교사의 마음 속에 격률을 형성하여 교육의 실제에 작용하는 '간접적인' 기여를 넘어서, 현실적으로 수학교육의 실제에 '직접적인' 기여를 하기 위해서는 이러한 철학적인 일반론을 넘어서 '하나하나의 수학적 내용에 대하여 그 이면을 탐색하는 작업'이 다각도로 이루어져야 한다. (본 고에서는 불충분하나마 구조주의적 관점에서 브루너가 지식의 구조의 예로 든 함수 개념, 군, 교환법칙 등을 해석하면서 이러한 작업의 한 가지 방향을 예시하고자 시도하였다.) '하나하나의 수학적 내용에 대하여 그 이면을 밝혀나가는 작업'은 수학교육과정론 연구의 핵심적인 부분을 이룰 수 있을 것이다.

of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process. Boston: D. C. Heath and company.

Hiebert, J.(ed.)(1986), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, London: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

Oakeshott, M.(1967), "Learning and Teaching", In R. S. Peters(ed.), *The Concept of Education*, London: Routledge & Kegan paul, pp. 156-176.

Passmore, J.(1967), "On Teaching to be Critical", In R. S. Peters(ed.), *The Concept of Education*, London: Routledge & Kegan paul, pp. 192-211.

Polya, G.(1962), *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*, Vol II., John Wiley & sons, Inc.

Ryle, G.(1949), *The Concept of Mind*, Penguin Books.

Ryle, G.(1967), "Teaching and Training", In R. S. Peters(ed.), *The Concept of Education*, London: Routledge & Kegan paul, pp. 105-119.

Skemp, R. R.(1987), *The Psychology of Learning Mathematics*, Expanded edition, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Skemp, R. R.(1989), *Mathematics in the Primary School*, London: Routledge.

Structuralist view of Knowledge and the Structure of Knowledge in Mathematics

Yim, Jae-hoon

Structualist view distinguishes structure(reality) from phenomenon(appearance). Phenomenon is the outside aspect of structure and structure is the inside aspect of phenomenon.

From the structualist view, the knowledge could be divided into two parts, the appearance of knowledge(the outside aspect of knowledge) and the structure of knowledge(the inside aspect of knowledge). Structualist view advices teachers to understand knowledge more totally from the inside-outside viewpoint, and not to teach mere the one aspect of knowledge, especially the outside aspect of knowledge, that is, the written expressions in textbook, but to teach the inside and outside aspects of knowledge totally.

In the history of mathematics education, the attempts to teach the structure of knowledge were flourishing in the period of discipline-centered curriculum. 'New Math movement' represents the attempts. The advocators of New Math, however, did not succeed sufficiently to understand the inside-outside view which the term the structure of knowledge represents, and failed to make mathematics teachers to understand the view well. Their attention was put on to introduce the modern mathematics to school math rather than to understand the educational and epistemological perspective which the term the structure of

knowledge represents.

To teach the structure of knowledge, mathematics teacher should be able to understand mathematical knowledge more totally from the inside-outside viewpoint. Especially, s/he should not regard the outside aspect of mathematical knowledge written in textbook as the totality of knowledge, but inquire into the inside aspect of mathematical knowledge from the outside aspect of mathematical knowledge.