大韓數學敎育學會 論文集 第 8 卷 第 1 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.1, 351-364. July 1998

증명의 수리철학적 분석과 지도 방향 탐색

나 귀 수*

Ⅰ. 서 론

현대에 이르러 수학적 지식의 본질에 대한 인식이 달라짐에 따라 증명에 대한 철학적 관점도 변하여 왔다. 증명에 관한 수리철학적 관점은 '학교에서 증명을 어떻게 가르치고 배워야 하는가' 라는 증명의 교수/학습 문제를 논의하는 데에 중요한 배경으로 작용한다. 본 논문에서는 대표적인 수리철학이라고 할 수 있는 절대주의, 준경험주의, 사회적 구성주의의 관점을 중심으로, 각각의 수리철학에서 수학 지식과 증명은 어떻게 파악되는지, 그리고 그것이 증명 교육에 시사하는 바는 무엇인가에 대해 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 절대주의

절대주의는 절대적 진리로서의 수학의 존재성 및 수학의 절대적 기초를 인정하는 수리철학으로서, 18세기까지 서양 철학을 지배하였던 플라톤주의, 19세기 초의 영국의 논리주의, 네덜란드의 직관주의, 독일의 형식주의로 대표된다.

1. 플라톤주의

절대주의적 관점은 플라톤의 철학에 그 뿌리를 두고 있다고 할 수 있다. 플라톤의 수학적 관점은 '이데아론'에서 비롯되는바, 이데아는 영구불멸의 완전한 실재인 이상적 세계로 상정된다. 플라톤에 따르면 수학적 대상은 실재하며, 수학적 대상의 존재성은 인간의 활동과는 전혀 무관한 것이다(Davis & Hersh, 1981, p. 318). 수학의 대상인 수나 도형이 불변의 이데아로 간주되며, 수학을 한다는 것은 이미 존재하는 그러한 수학적 대상의 성질과 관계를 발견하는 과정이다. 1

유클리드는 이러한 플라톤의 수학관을 《원론》에서 구현하였다. 유클리드 원론에서 증명은, 자명한 진리인 공리, 공준과 이데아를 명백하게 기술하는 것으로 상정된 정의로부터 새로운 정리를 이끌어내는 수단이었다. 증명을 통해 유도된 새로운 정리만이 진리로 인정되었는바, 증명은 인간을 참된 진리의 상태에 도달할 수 있게 하는 유일한 합리적인 과정이었다. 다시 말해서, 증명은 수학에서 다루는 내용의 절대적 진리성을 정당화하기 위한 유일한 방법으로서, 수학적 명제가 참임을 보증하는 이성에 근거한 핵심적인 방법으로 기능하였다.

그러나 19세기 초의 비유클리드 기하의 출현으로 인해, 수학자들은 어떤 공리라도 무모순의 조건만 만족한다면 그것으로 하나의 공리계를 세울 수 있음을 확신하게 되었다. 수학자

* 전주교대 강사

들은 기하 이외의 다른 수학 분야 또한 공리적으로 전개하려고 하였지만, 집합론과 함수론 등에서 처리하기 곤란한 여러 가지 패러독스가 발견되었다. 이러한 패러독스들은 공리 체계 내에서 도출되었으며, 필연적으로 공리 체계의 확실성과 공리적 방법 그 자체에 심각한 문제를 야기하였다.

수학자들은 여러 가지 패러독스에 직면하여 수학의 기초를 구축하는 데에 근본적인 오류가 있음에 틀림없다고 판단하였다. 그 결과, 수학 지식의 본성을 설명하고 그 확실성과 절대적 기초를 재확립할 목적으로 여러 가지 수리철학이 대두되었는데, 논리주의, 직관주의, 형식주의로 대표되는 수학 기초론에 대한 논의가 바로 그것이다.

2. 논리주의

논리주의자들은 수학이 논리의 일부분이라고 주장하면서 모든 수학을 논리로 환원하고자 하였는바, 수학의 절대적 확실성을 재확립하기 위하여 수학적 지식에 대한 논리적 기초를 제공하고자 하였다. 논리주의의 목적은, 오직 논리학의 개념과 공리에 바탕을 둔 공리 체계로서의 수학의 개념과 이론을 만들어냄으로써, 수학적 지식의 확실성을 논리의 확실성으로 환원하는 것이었다.(Ernest, 1991, p. 9) 그러나 논리주의를 실현하기 위한 Dedekind, Peano, Frege 등의 다양한 시도는 패러독스가 발생한다는 사실이 밝혀지면서 결국 실패로 끝나게 되었다.

논리주의에서 증명은 오직 논리학의 공리와 정의로부터 수학적 명제를 이끌어내는 수단이었다. 논리주의자들에게 있어서 증명의 기능은 수학적 명제가 논리적으로 항상 참임을(tautological) 보이는 것임과 동시에, 자신들의 논리적 공리 체계가 논리적으로 항상 참인 수학적 명제를 이끌어내는 데에 위력적임을 드러내는 수단이었다. 그러므로 논리주의에서 증명은 수학 지식을 논리적으로 정당화하기 위한 장치라고 할 수 있다.

3. 직관주의

직관주의에 의하면, 수학의 대상은 직관에 의해 구성되는바, 직관은 다른 어떤 논리보다도 선행하는 것으로서 수학의 기본 개념과 기본 명제를 절대적으로 자명한 것으로 인식하게 하는 것이다. 직관주의자들은 고전 수학은 여러 가지 패러독스로부터 안전하지 못하므로 구성적 방법에 의해 수학을 재확립해야 한다고 주장하면서, 수학적 활동의 핵심은 공리와 정리가 아닌 '내성적 구성(introspective construction)' 임을 강조하였다(Hanna, 1983, p. 51). 다시 말해서, 수학적 명제로서의 적법성은 구성 가능성과 일치하며, 수학적 진리는 유한 번의 단계로 구성 가능함으로써 보증된다는 것이다.

그러므로 직관주의에서의 수학적 지식은 제한된 구성적 논리에 기초한 '구성적 증명'에 의해 확립되며, 수학적 대상의 의미는 그것이 구성되는 과정에 의존하게 된다. 고전적인 존재 증명이 존재의 논리적 필연성을 입증하기만 하는 반면, 직관주의적 존재 증명은 그 존재성이 주장된 수학적 대상을 어떻게 구성하는지를 보여주어야 한다(Ernest, 1991, pp. 11-13).

이러한 관점하에 직관주의는 직관적으로 자명하다고 인정되는 자연수에 기초하여 유한한 구성 과정으로 수학을 전개하려고 시도하였는바, 비구성적 논증과 배중률을 배제하였다. 직관주의자들은 그전까지 타당한 수학적 증명으로 인정되었던 '연역적 증명' 중에서 '구성적 증명'만을 인정하였다. 직관주의에 있어서 수학 명제는 기본적 직관에 근거한 정신적 구성을

통해 그 명제가 참임을 보이는 경우에만 참으로 인정된다. 직관주의자들은 직관적으로 안전한 '구성적 증명' 방식을 이용하여 수학적 지식을 이끌어냄으로써 그 확실한 기초를 제공할 수 있다고 생각하였던 것이다.

수학을 유한한 구성 과정의 결과로 보는 직관주의에서는, 치밀하게 확립된 수학의 정리 조차도 유한 번의 구성으로 가능하지 않다는 점에서 단어들의 의미없는 조합으로 인식하여 거부하였다. 그렇게 함으로써 논리주의에서 직면하게 되었던 패러독스를 피할 수는 있었지만, 수학의 내용을 지나치게 제한하는 오류를 범함으로써 고전 수학의 많은 부분을 포기하게 되는 결과를 초래하였다.

4. 형식주의

형식주의에서 수학은 아무런 의미도 부여되지 않은 기호의 나열에 불과한 형식적 체계로 규정되며, 의미없는 기호 조작이 수학의 핵심을 이룬다. 대표적인 형식주의자인 Hilbert는 완전한 형식화의 방법과 충분히 엄밀한 방법을 적용함으로써 수학의 전체 분야가 모순이 없고 완전한 공리 체계로 조직될 수 있음을 보이고자 하였다. Hilbert에게 있어서 수학의 확실성을 보증하는 것은 수학의 무모순성과 완전성인바, 수학을 의미가 배제된 기호의 형식적 계산으로 대치함으로써 의미를 포기하는 대가로 무모순성을 얻고자 한 것이다. 또한 엄밀한 방법을 통해 공리 체계로서의 수학의 완전성, 즉 주어진 공리 체계에 대해서 모든 참인 수학적 명제들이 입증 가능하다는 것을 보이려고 하였다.

그러나 Gödel의 불완전성의 정리에 의해 형식주의자들의 이상은 좌절되었다. Gödel은 산술을 포함하는 임의의 수학 체계의 무모순성은 입증될 수 없으며, 어떠한 무모순인 공리 체계도 필연적으로 불완전하다는 것을 밝혔다. 더욱이 Gödel은 무모순인 공리 체계에 그 공리 체계에서 입증도 반증도 할 수 없는 명제를 공리로 추가한다 하더라도, 그렇게 구성된 새로운 공리 체계는 참이지만 결정 불가능한 명제를 갖게 됨을 입증하였다.

형식주의에서는, 직관주의에서 제한적으로 인정되었던 '연역적 증명'이 다시 강조되었다. 형식주의자들은 보다 더 엄밀한 연역적 증명을 강조하는바, 형식주의에서 증명은 수학이 무모순이고 완전한 공리 체계라는 것을 입증하는 데에 핵심적인 역할을 한다. 형식주의에서 어떤 명제 P의 증명은 P1, P2, ‥‥, Pn(=P)으로 이루어지는데, 여기에서 Pi는 공리, 정리, 또는 추론 규칙에 의해 이전의 명제로부터 유도된 것이다. 증명에 포함된 절차는 단순히 기호 조작으로 파악되며, 기호의 의미는 전혀 고려되지 않는다. 따라서 형식주의에서 증명은 각각의 기호가 특정한 규칙에 따라 이전의 기호로부터 유도되는 의미없는 일련의 기호들일 뿐이다(Sekiguchi, 1991, p. 15).

이상의 논의를 통하여, 절대주의 수리철학자들은 무엇을 타당한 증명으로 인정할 것인가라는 점과 증명의 세부 내용에 있어서 상당한 관점의 차이를 보이기는 하지만, 수학적 명제를 정당화하는 수단으로 증명의 본질을 파악하는 데에 있어서는 공통된 입장을 취함을 알 수 있다. 증명은, 플라토니즘에서는 수학 명제가 절대적으로 참임을 정당화하는 수단으로, 논리주의에서는 수학 명제가 논리적으로 참(tautology)임을 정당화하는 수단으로 기능한다. 직관주의에서는 구성적 증명을 통해 구성 가능성이 입증되는 명제만을 참인 명제로 인정하며, 형식주의에서는 증명을 의미없는 기호 조작으로 환원함으로써 무모순성과 완전성을 정

당화하고자 한다. 결국 절대주의 인식론에서 증명은 새로운 수학적 진리와 확실성을 보증하는 원천으로서, 공리 체계 내에서 수학적 진리를 공리에서 정리로 전달하는 유일한 메커니즘으로 작용한다.

<표 1> 절대주의 수리철학과 증명관

	수학 인식론	증명관
플라토니즘	● 수학적 지식은 영구불멸의 완전한 이상적 세계인 이데아	● 수학 내용의 절대적 진리성을 정당화하는 유일한 방법
논리주의	● 수학은 논리의 일부분, 수학적 개념을 논리의 개념으로 환원 ● 수학적 지식의 확실성은 논리의 확실성으로 대체	● 수학 지식을 논리적으로 정당화하는 장치 ● 수학적 진리는 논리의 공리와 추론 규칙만으로 입증 가능
직관주의	● 직관은 수학적 지식의 근원으로서 다른 어떤 논리보다 선행 ● 수학적 활동은 직관적으로 자명한 공리에 근거한 내성적 구성	● 수학 명제의 참은 구성 가능성과 동치 ● 구성적 증명만을 인정, 비구성적 논증과 배중률 배제
형식주의	● 수학을 의미가 배제된 형식 체계로 재조직 ● 수학의 확실성: 무모순성과 완전성	● 증명은 특별한 규칙을 따르는 의미없는 기호 조작 ● 엄밀한 연역적 증명은 무모순성과 완전성을 보장하는 수단

그러나 절대주의 수리철학은 연역적 추론 방식으로서의 증명에 있어서 종합적 방식만을 강조하였다는 점에서 그 문제점을 지적할 수 있다. 종합적 방식이란 공준이나 공리, 정의에 근거해서 가정으로부터 결론을 이끌어내는 선형적 방식을 말한다. 이러한 종합적 방식은 단지 증명의 외형적인 모습에 불과하며, 외형적으로는 가정으로부터 결론에 이르는 것으로 보이는 증명 과정이 실제로 선형적으로 생성되는 것은 아니다. 증명의 심층을 상세히 살펴보면, 증명은 결론이 참이기 위해서 우선 만족되어야 할 선행 조건을 탐색하는 분석적 방식과 그러한 선행 조건을 공리와 정의에 근거해서 가정으로부터 이끌어 내는 종합적 방식이 통합된 역동적 사고를 통해 이루어짐을 알 수 있다. 종합적 방식은 증명하려고 하는 명제의 타당성을 정당화하기에는 유용한 방식이지만, 학생들에게 증명을 의미있게 지도하기에는 부적절하다. 종합적 방식만으로 지도되는 증명은, 증명이 어떻게 해서 그런 모습으로 나타나게 되었는가를 학생들에게 이해시킬 수 없다. 예컨대, 유클리드 원론의 종합적 방식은, 유클리드가 원론을 저술하는 과정에서 경험하였을 무수한 수학적 추론 과정을 보여주지 못하고, 다만 수학적 사고의 결과만을 세련된 형식으로 제시하면서 고상하고 우아한 표현 방식을 보여줄 뿐이다.

Ⅲ. 준경험주의

준경험주의는 Lakatos로 대표되는 수리철학으로서, 수학적 지식은 준경험적이고 오류 가능하며 인간의 창조적 활동, 즉 발명의 산물이라고 단언한다. Lakatos는 수학은 고정된 기초 위에 세워진 유한한 구조가 아니라, 항상 성장하고 변화함에 따라 기초를 수정해 나가는 지식체라고 주장한다. 수학적 지식은 절대적 진리도 아니고 절대적 확실성도 갖지 않으며 오류 가능하므로 끊임없는 개선의 여지가 있다는 것이다. Lakatos는 이른바 논리주의, 형식주의 등의 절대주의 수리철학은, 의심의 여지가 없는 것으로 인위적으로 인정되는 공리로부터 연역적 절차를 통해 명제로 진리값을 전달하는 체계로서의 수학을 발달시키기 위해 설계된 '유클리드적 체계'라고 비판하면서, 수학의 역사 발생적 논리에 따른 수학 인식론을 제기하였다. 또한 Lakatos는 수학은 경험 과학인 자연과학과 유사한 방식으로 진행하며, 추측(가설)에 대한 거짓이 공리와 정의에 재전달된다는

의미에서 준경험적이라고 주장하였다.

절대주의적 관점에서 증명은 절대적 진리로 인정되는 공리로부터 정리를 연역함으로써 정리가 참임을 정당화하는 수단이었다. 그러나 Lakatos는 증명의 목적이 명제의 진리성과 확실성을 확보하는 것이라는 절대주의적 관점을 거부하면서, 증명의 전제가 되는 공리가 참임을 보이지 못하는 절대주의는 순환 논리에 빠질 수밖에 없다고 주장하였다. 다시 말해서, 전제가 되는 공리가 절대적 참이라는 보장이 없고 그리하여 공리가 만약 거짓이라면, 증명은 참인 결론을 연역하지 않으며 거짓인 결론을 얻을 수도 있다는 것이다(강문봉, 1993, p. 79).

Lakatos는 증명의 진정한 기능이 이미 주장된 정리를 비판함으로써 정리를 개선하는 데에 있다고 파악하였다. Lakatos는 비형식적 수학 이론의 성장을 보다 강조하면서, 수학적 발견이 다음 단계들을 거치면서 이루어진다고 주장하였다.

1. 원시적 추측
2. 증명: 원시적 추측을 그것의 하위 추측 또는 보조 정리로 분해하는 개략적인 사고 실험
3. 전면적 반례, 즉 원시적 추측에 대한 반례의 출현
4. 증명의 재검토: 전면적 반례가 국소적 반례가 되는 '혐의있는 보조 정리(guilty lemma)'가 확인된다. '혐의있는 보조 정리'가 명백해지고 원시적 추측에 조건으로 부가된다. 개선된 추측으로서의 정리는 원시적 추측을 대신한다.(Lakatos, 1976, pp. 127-128)

증명의 재검토, 즉 증명 분석은 전면적 반례가 나타나거나 확실하다고 생각하였던 증명에 대하여 의심이 생길 때 시작되며, 그러한 의심은 반례를 발견하는 계기가 된다. 그런 점에서 반례는 증명과 지식의 성장에서 매우 중요한 역할을 한다. 또한 증명 분석을 통해 발견된 증명-생성 개념과 새롭게 드러난 보조 정리들은 새로운 이론을 형성하게 된다(강문봉, 1993, p. 89).

한편, Lakatos에게 있어서 증명은 사고실험이며 초기 형태의 정리라고 할 수 있는 원시적 추측을 정련시키기 위해 분석하는 방법이다.

> 나는 사고실험 또는 '준실험(quasi-experiment)'에 대해 유서깊은 기술적 용어인 '증명'을 계속 사용할 것을 제안한다. 증명은 원시적 추측을 부분 추측이나 보조 정리로 분해하여, 가능한 한 멀리 떨어져 있는 지식체에 포함시키는 것이다.(Lakatos, 1979, p. 9)

Lakatos는 자신의 증명관을 설명하기 위하여, 다면체에서 Euler의 정리 $V-E+F=2$ (V는 꼭지점의 개수, E는 모서리의 개수, F는 면의 개수)에 대한 다음과 같은 Cauchy의 증명을 예로 들고 있다.

> 1단계: 표면이 얇은 고무로 되어 있고 속이 빈 다면체를 상상해 보자. 그 다면체의 어느 한 면을 잘라 내면, 나머지 면들을 평면 위에 평평하게 펼쳐 놓을 수 있다. 이 과정에서 면과 모서리는 변형될 것이고, 모서리는 곡선이 될 수도 있지만, 꼭지점의 개수 V와 모서리의 개수 E는 변하지 않을 것이다. 그러나 한 면을 제거하였기 때문에 면의 개수 F는 1이 줄게 될 것이다. 따라서 본래의 다면체에 대하여 $V-E+F=2$ 라고 하면, 평면 지도에서는 $V-E+F=1$ 이 된다.

2단계: 평평하게 펼쳐 놓은 평면 지도에서 삼각형이 아닌 다각형이 있으면 대각선을 그어 삼각형으로 만든다. 대각선을 그을 때마다 E와 F가 1씩 증가하게 되므로 $V-E+F=1$ 의 값은 변하지 않는다.

3단계: 삼각형으로 분할된 평면 지도에서 삼각형을 하나씩 제거해 나간다. 삼각형을 하나 제거하려면 모서리를 하나 제거하거나-그러면 면과 모서리가 하나씩 제거된다 - 또는 모서리 두개와 꼭지점 하나를 동시에 제거해야 한다. 따라서 삼각형 하나를 제거하기 전에 $V-E+F=1$ 이었다면 그 삼각형을 제거하였을 때도 $V-E+F=1$ 은 변하지 않는다. 이러한 절차를 계속해 나가면 최종적으로 단 하나의 삼각형만이 남게 되며, 이 삼각형에서 $V-E+F=1$ 이다. 그런데 모든 삼각형에서 $V-E+F=1$이므로, 최종적으로 남은 삼각형의 $V-E+F=1$ 이라는 기초명제는 참이 된다. 따라서 $V-E+F=2$ 라는 원래의 추측은 참이다.(Lakatos, 1976, pp. 29-30)

Lakatos가 주장하는 증명은 두 가지 의미를 내포하는데, 증명의 본질은 사고 실험이라는 것과, 증명 절차는 추측을 부분 추측으로 분해하여 그것을 이미 알고 있는 것과 연결시키는 과정이라는 것이다. 먼저 증명의 본질이 사고실험이라는 Lakatos의 견해는, 준경험적인 학문 체계로서의 수학에서 증명이 발견의 수단임을 시사한다고 할 수 있다. 경험적인 학문이라고 할 수 있는 자연과학에서 실험은 발견의 수단이다. 자연과학에서 실험이 추측의 참·거짓을 절대적으로 확립하는 것은 아니다. 새로운 증거나 새로운 실험 도구에 의해 기존에 행했던 실험이 잘못된 것으로 드러나거나 개선될 수도 있고 그에 따라 실험의 결과가 달라짐으로써 새로운 사실을 발견할 수도 있다. 사고실험은 머리 속에서 어떤 대상들을 다루면서 사고 활동의 결과를 관찰한다는 것을 의미한다. 따라서 증명은 곧 사고 실험이라는 관점은, 사고 실험을 통한 증명의 재검토 과정에서 반례에 의해 증명과 추측을 반박하고 개선함으로써 새로운 개념을 발견할 수 있음을 시사한다고 할 수 있다. 이러한 Lakatos의 관점에서는 추측이 참임을 밝히는 방법을 찾는 자세보다는, 증명을 통해 추측을 비판하고 개선하려는 자세가 더욱 중요하게 된다(강문봉, 1993, p. 84).

한편 증명이 '추측을 부분 추측 또는 보조 정리로 분해하여 그것을 가능한 한 멀리 떨어져 있는 지식체에 포함시키는 것'이라는 Lakatos의 관점은, 분석적 사고 방식으로서의 증명의 측면을 강조한 것으로 해석할 수 있다. 위에서 언급한 Euler의 다면체 정리에 대한 Cauchy의 증명을 상세히 살펴보면, '모든 다면체에서 $V-E+F=2$ 이다'라는 추측을 분해하여 우리가 참인 것으로 알고 있는 '삼각형에서는 $V-E+F=1$ 이다' 라는 기초 명제를 이끌어내었음을 알 수 있다. 여기에서 '삼각형에서는 $V-E+F=1$ 이다'라는 기본 명제가 바로 Lakatos가 언급한 '가능한 한 멀리 떨어져 있는 지식체'에 해당하는 것이다. '다면체에서 $V-E+F=2$ 이다'라는 정리를 증명하기 위하여 어떤 공리나 정의로부터 불시에 선형적으로 이끌어내는 것이 아니라 정리를 보조 정리로 분해하여 참이라고 알고 있는 기본 명제와 연결시키는 이러한 방식이 바로 분석적 방식인 것이다.

절대적 인식론에 있어서 증명의 본질은 정리가 절대적으로 참임을 정당화하는 수단으로 파악되며, 정리가 증명되면 그것으로 증명 작업은 일단락 되는 것으로 인식된다. 그러나 준경험주의에서의 수학적 지식은 잠정적으로 참으로 인정되는 추측에 불과하기 때문에, 어떤 정리를 증명한 것으로 모든 것이 끝나는 것은 아니며, 증명한 이후에도 증명을 분석함으로써

추측과 증명을 개선하는 끊임없는 과정이 진행된다. Lakatos에게서 증명은 어떤 정리를 정당화하는 수단이 아니라, 증명 분석을 통하여 추측을 개선해 나가고 증명 자체를 반박함으로써 새로운 개념을 발견해 내는 발견의 수단이다. 다시 말해서, 증명은 비판을 용이하게 하기 위해 추측을 가능한 한 작은 부분으로 분해하여 분석하는 사고실험을 의미하며, 증명에 의한 비판으로부터 추측의 잘못된 부분들을 찾고 그것을 수정해 나가는 계속적인 발견의 과정이다.

Lakatos의 준경험주의 수리철학은 수학교육 연구자들에게 많은 호응을 얻었다. 수학적 발견에 대한 Lakatos의 새로운 접근 방식에 매료된 수학교육 연구자들은, Lakatos의 방식이 수학교육에 광범하게 적용될 것이라고 가정하였다. 이러한 가정의 기저에 깔려 있는 생각은, Lakatos의 발견술적인 증명 과정을 교실에서 그대로 모방하는 것이 가능하고 바람직하다는 것이다. 그러나 학생들이 수업 시간에 Lakatos식의 검사와 논의 과정-그것을 통해 새로운 수학지식이 잠재적 반박에 종속되는-을 어느 정도 그대로 따라할 수 있는가 하는 문제에 대해서는 보다 신중한 논의가 필요하다.

첫째, 학생들에게 Lakatos가 주장하는 네 단계의 증명 과정을 곧이곧대로 그대로 따르도록 하는 것은, 오히려 인위적인 학습 상황을 강제로 부과할 위험이 있다. 학생들이 가지고 있는 수학적 토대에 근거해서 자연스러운 사고의 흐름을 따라 지도하지 않음으로써 학생들에게 거부감을 일으킬 수 있다는 것이다. 둘째, Lakatos의 비형식적 반증자와 수학의 오류가능성의 관념을, 교육과정에서 '형식적' 수학을 제거해야 하며 정당화 수단으로서의 증명을 배제해야 한다는 식으로 해석하는 것은 바람직하지 않다. 증명은 정당화를 위한 유용한 수단이며 지속적인 관심의 대상이 되어야 한다.(Hanna & Jahnke, 1996, p. 888) 셋째, 교육과정을 비형식적 수학에 국한시킨다고 해서 실제 수학을 학교수학에서 보다 잘 반영할 것이라고 생각하는 것은 잘못이다. Lakatos식의 증명 방법은 교육과정에서 발견술을 지도하기에 권고할 만한 것이며 따라서 중요한 위치를 차지하도록 배려할 필요가 있다. 그러나 절대주의 의미에서의 증명 방법을 완전히 배제하려는 주장은 수학 실제의 풍부함을 반영하지 못하는 교육과정을 산출할 위험이 있다.

그러므로 준경험주의 수리철학의 입장을 수학교육에 전적으로 반영하기보다는, 현재의 증명 교육에서 결여된 부분을 보완한다는 의미에서 적용 가능한 것만을 완화시켜 도입할 필요가 있다. 절대주의 수리철학에 대한 논의에서, 증명을 지나치게 정적인 정당화의 맥락에서 종합적 방식으로만 부과하는 것은, 학생들에게 아무런 의미도 주지 못하는 공허한 교수·학습으로 흐를 위험이 있음을 확인하였다. 따라서 Lakatos가 강조하는 발견의 맥락과 절대주의에서 강조하는 정당화의 맥락을 통합함으로써 증명 교육을 보완할 방안을 탐색할 필요가 있다. 또한 Lakatos가 강조한 증명의 분석적 방식을, 증명의 외형적 모습만을 선형적으로 제시하는 종합적 방식을 보완하는 한 방안으로 고찰해 보는 것은 교수학적으로 충분한 의의가 있다고 생각된다.

Ⅳ. 사회적 구성주의

사회적 구성주의에서는 수학적 지식을 사회적 합의를 통한 사회적 구성개념으로 규정한다. 또한 수학적 지식의 객관성은 절대적인 진리로서 객관적인 것이 아니라 사회적으로 객관

적인 것으로 대체되며, 사회적 객관성은 객관성을 사회적으로 인정되는 것과 동일시함으로써 인간을 초월한 이상적인 것으로서의 객관성을 배제한다.

사회적 구성주의의 또 다른 특징은 주관적 지식과 객관적 지식의 두 형태를 모두 고려하는 동시에 나아가 이 두 지식을 생산적인 순환관계 속에서 연결지어 파악했다는 점이다. 새로운 수학 지식은 개인적 창조의 산물인 주관적 지식으로부터 공표를 거쳐 상호 주관적인 조사, 재형식화, 수용 과정을 통해 객관적 지식에 이르게 된다. 여기에서 사람과 사람 사이의 사회적인 협의 과정이 필요하게 된다. 또한, 각 개인은 수학을 학습하여 객관적 지식을 내면화하고 재구성함으로써 주관적 지식으로 변용하며, 변용된 주관적 지식을 이용하여 다시 새로운 수학적 지식을 창조하고 공표한다. 이와 같이 주관적 지식과 객관적 지식 사이의 순환이 이루어지며, 수학의 주관적 지식과 객관적 지식은 서로 창조와 재창조에 기여하게 된다.

증명에 대한 사회적 구성주의를 주장하는 연구자들은 수학자 개인의 증명이 객관적인 수학적 지식으로 인정되는 실제적인 연구 과정에 주목한다. Hanna(1983)에 의하면, 정밀한 조사, 수정, 정련의 과정을 거치는 증명은 수학 공동체에서 충분히 흥미롭고 중요한 것으로 인정하는 정리의 증명뿐이다. 즉 의미있는 수학적 지식을 이끌어낼 것 같지 않은 정리의 증명은 수학 공동체에서 처음부터 무시되고 조사되지 않는다는 것이다. 수학 공동체에서 인정하지 않는 어떤 수학자의 증명은 개인적 지식에 불과할 뿐, 객관적 지식으로서의 수학적 증명으로 채택되지 않는다. 사회적 구성주의에 있어서 증명의 타당성에 대한 기준은 수학자 공동체에 의존하는바, 타당한 증명이란 수학 공동체의 인정을 거쳐 사회적으로 합의된 것이다.

> 어떤 증명은 '그것을 증명으로 인정하는' 사회적 행위가 있은 후에야 비로소 진정한 증명이 된다. 이는 물리학, 언어학, 생물학에서 그러한 것처럼 수학에서도 사실이다.(Manin, 1977, p. 48)

> 수학적 증명은 사회적 메커니즘인 수학 공동체의 승인을 받은 이후에 비로소 명제의 참에 대한 확신을 증가시킨다.(De Millo 외., 1986, p. 275)

어떤 수학자 개인의 증명이 수학 공동체에서 인정받기 위해서는 다른 동료 수학자들을 확신시켜야 하는바, 수학자들의 실제 활동에서 증명의 목적은 확신을 얻기 위한 것이다. 따라서 사회적 구성주의에 있어서 증명의 일차적 기능은 자기 자신을 포함해서 다른 사람을 확신시키기 위한 설명이며, 증명은 수학자들간의 의사소통의 수단이다. Hume은 이러한 관점을 다음과 같이 표현하고 있다.

> 자신의 발견이 확률적인 것이 아닌 완벽한 것으로, 그리고 자신의 발견이 참임을 즉각적이고도 전적으로 확신할 정도로 자신의 학문 분야에 정통한 수학자는 존재하지 않는다. 수학자는 자신이 발견한 것에 대해 증명을 함으로써 비로소 확신감을 얻게 되는데, 동료의 인정을 받을 경우에 그 확신감은 더욱 증대된다. 수학자의 증명은 학문 세계의 보편적인 동의와 칭찬에 의해 최상의 완벽함을 획득한다.(De Millo 외, 1986, p. 267에서 재인용)

Bell(1976) 또한 수학에서 비형식적 과정과 공적 과정의 역할을 강조하였다. Bell에 의하면, 증명은 내적으로 수행되는 동시에, 자신의 주장에 대한 상상의 의심자를 대상으로 확신에 이르게 하는 궁극적으로 공적인 활동이다. 증명은 자신의 주장에 대한 내적 테스트와 내적 수용과 내적 거부로부터 시작된다. 이러한 내

적 과정은 점차 외면화되는바, 타당성에 대한 증명을 제시하면서 자신의 주장을 다른 사람들의 비판에 드러내게 되는 것이다. 수학자는 자신의 주장에 대해 내적 테스트를 시행해 보는데, 이 때 내적 테스트는 궁극적으로 증명의 형태를 취하는바, 수학자는 자신의 주장에 대해 사회적으로 있을법한 비판을 스스로 수행해 보는 것이다.

위에서 고찰한 바와 같이, 사회적 구성주의에서 증명은 확신의 수단이자 이해의 수단으로 파악되고 있다. 이러한 사회적 관점은, 증명을 통해 학생들에게 정리가 왜 참인가에 대한 통찰을 제공함으로써 정리를 이해하고 확신하도록 지도해야 함을 시사한다고 할 수 있다. 교실에서 증명의 목적은 '엄밀함'이나 '정직성'의 추상적 기준을 만족하기 위해 의례적으로 행해지는 관습이 아니라 학생들의 이해를 증진시키는 설명이라는 것이다.

사회적 구성주의를 옹호하는 수학교육 연구자들은, 가능한 한 교사의 간섭을 배제하면서, 학생들이 스스로 수학 지식에 대한 '사회적 합의'에 도달하도록, 즉 '합의된 의미'를 공유하도록 할 것을 주장하였다. 그러나 Balacheff(1991)는 교사의 간여를 철저하게 배제하면서 학생들이 스스로의 논의를 통해 증명에 대한 합의에 도달하도록 고안된 교수 실험을 통해, 교사의 간여가 완전히 배제된 학생들간의 논의만으로는 바람직한 사회적 합의에 도달하지 못한다는 사실을 확인하였다. 그의 실험에서 갈등을 해결하기 위한 학생들의 행동은 다분히 비과학적인 기초에 근거한 소모적인 논쟁일 뿐이었다. 학생들은 바람직한 사회적 합의를 통해 증명 문제를 해결하기보다는, 다른 학생을 그저 이기는 데에 몰두하였다.

이러한 연구 결과는 사회적 관점을 수학교육에 적용하는 데에 있어서 경계해야 할 두 가지 문제를 시사한다고 할 수 있다.[1] 첫째, 오로지 학생들의 구성 활동만 강조함으로써 교사의 역할을 무시해서는 안된다는 것이다. 학생들의 학습 활동에서 교사의 역할은 무시할 수 없는바, 교사는 학생들이 능동적으로 참여하도록 유도하면서 학생들이 나아가야 할 방향을 제시해 주어야 한다. 교사는 학생들의 아이디어의 적합성을 최종적으로 판단해 주는 역할과 함께 학생들간의 논쟁을 중재하는 역할을 해야 한다. 최근의 여러 연구는 증명이 왜 필요하고 증명이 언제 타당한가를 학생들이 이해하는 데에 있어서 교사의 적극적 활동이 얼마나 중요한가를 확인해 주고 있다(Hanna & Jahnke, 1996, p. 887). 여러 실험 연구는 증명을 지도하는 새로운 방식을 탐색하는 일이나, 학생들로 하여금 증명의 구조를 확인하고 논쟁을 제시하고 옳은 논쟁과 틀린 논쟁을 구분하도록 지도하는 일에 있어서 교사의 결정적인 역할을 확인하고 있다.

둘째, 수학교육에 있어서 사회적 합의를 지나치게 강조함으로써 수학적 지식 본연의 성질을 무시하는 것은 바람직하지 않다. 사회적 관점에 따라 합의된 의미를 매 단위의 수업 시간에 달성하는 것은 현실적으로 가능하지도 않을 뿐만 아니라 교육적으로 생산적이지도 않다. 일상적인 교실에서, 그것도 증명을 처음으로 배우는 학생들을 대상으로 하는 수학 수업에서, 합의된 증명 방식을 이끌어낸다는 것은 사실상 불가능할 것으로 생각된다. 학생들이 정교한 수학적 논의 방식이라고 할 수 있는 증명

1) 지식에 대한 철학적 관점을 교육에 적용하는 과정에 있어서, 교육적 상황은 전혀 고려하지 않고 철학적 관점의 직접적 적용을 시도함으로써 철학적 관점을 왜곡하고 교육을 인위적으로 오도하는 것은 흔히 범하는 오류이다. 이러한 오류를 방지하기 위해서는 철학적 관점을 교육 실제에 비추어 신중하게 재해석함으로써 교육적 상황에 적용 가능한 부분만을 취사선택할 필요가 있다.

양식을 교사의 아무런 도움 없이 학생들간의 사회적 합의를 통해 스스로 도달하리라 기대하는 것은 너무 무모한 일이다. 수학적 증명이 사회적으로 합의되었다고 했을 때, 그 합의는 수학에 대한 전문적인 식견을 가지고 있는 수학자들의 합의임을 주목할 필요가 있다.

한편 사회적 관점에서 개인의 주관적 지식이 사회적 합의를 거쳐 객관적 지식의 창조에 기여한다고 했을 때, 객관적 지식의 창조에 기여하는 주관적 지식은 일부 뛰어난 수학자의 주관적 지식이지 일반인들의 주관적 지식은 아니라는 점을 주목해야 한다. 모든 학생들의 개인적 지식이 사회적 합의를 통해 객관적 지식으로 변하여 수학의 발달에 기여하는 것은 아니다. 학생들이 스스로의 사회적 합의를 통해 객관적인 지식에 도달할 수 있을 것이라는 주장은 학생들을 과대평가하는 것이다. 또한 수학이 사회적으로 합의된 지식이라는 관점은, 전문적인 수학자들과 수학의 사회적 측면을 연구하는 학자들에게는 큰 의미가 있을 수 있지만, 지적 성숙도가 아직 미약한 학생들에게 수학이 사회적으로 합의된 지식이라는 관점을 갖도록 하는 것이 어떤 의미가 있는가에 대해서는 숙고의 여지가 있다.

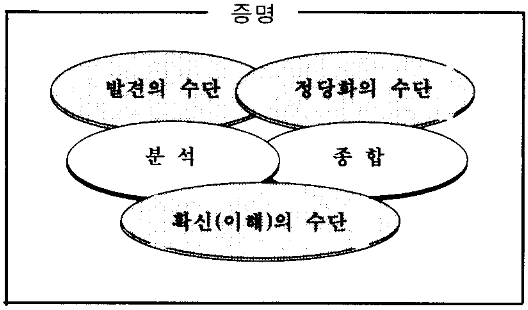
따라서 사회적 구성주의로부터 이끌어낼 수 있는 교육적 시사점은, 학생의 주관적 지식과 사회적 상호작용을 교수·학습에서 보다 적극적으로 활용해야 한다는 것이다. 이제까지의 증명 교육은 학생들이 가지고 있는 주관적 지식을 전혀 고려하지 않고 객관적 지식을 단지 외부에서 부과함으로써 의미없는 형식주의적 교육으로 편향되어 왔다. 교사가 학생들에게 일방적으로 객관적 지식을 전달하는 전통적인 방법을 지양하고, 교사와 학생간의 그리고 학생과 학생간의 상호작용을 활성화시킴으로써 학생들의 능동적 구성 활동을 통해 학생들 개인의 주관적 지식이 객관적 지식으로 발전해 나갈 수 있도록 해야 한다. 한편 학생들이 가지고 있는 개인적 지식을 교사가 개별적으로 전부 고려하여 수업을 진행한다는 것은 사실상 불가능하므로, 교사와 학생간의 상호작용과 더불어 학생과 학생간의 상호작용이 활발하게 이루어질 수 있도록 수업 상황을 설계할 필요가 있다.

이상에서 대표적인 수리 철학이라고 할 수 있는 절대주의, 준경험주의, 사회적 구성주의 수학 인식론과 증명관에 대해 살펴보았다. 증명의 본질은 절대주의에서 수학 명제가 참임을 밝히는 정당화의 수단으로, 준경험주의에서는 발견의 수단으로, 그리고 사회적 관점에서는 확신과 이해의 수단으로 파악되었다. 또한 절대주의 수리철학에서는 증명의 종합적 측면을, 준경험주의에서는 증명의 분석적 측면을 보다 강조하였다.

세 수리철학에서 파악한 증명의 측면은 외형상으로는 서로 분리되어 있는 것처럼 보이지만, 실제로는 서로 밀접하게 관련되어 있다. 증명의 심층을 자세히 들여다보면, 현재의 문제를 조사하여 추측을 형성하는 발견의 맥락 이후에, 그 추측이 참인지 거짓인지를 조사하는 정당화의 맥락이 오며, 마지막으로 그 결과를 다른 사람에게 설명하여 확신시키는 사회적 맥락이 온다. 또한 증명은 연역적 사고 활동인바, 결론으로부터 가정으로 나아가는 분석적 사고 방식과 가정으로부터 결론으로 나아가는 종합적 방식이 역동적으로 통합된 과정이다.

그러므로 증명을 복합적 다면체로 파악하는 것이 바람직하며, 증명의 다양한 측면을 학교수학에서도 적절히 반영함으로써 보다 풍부한 증명 교육이 이루어지도록 해야 한다. 교사의 증명에 대한 설명을 학생들이 무비판적으로

경청하는 것으로는 의미충실한 증명 교육을 기대하기에 충분하지 않다. 증명에 대한 절대주의적 관점과 준경험적 관점과 사회적 관점을 적절히 반영함으로써 바람직한 교수/학습 상황을 설계할 필요가 있다.



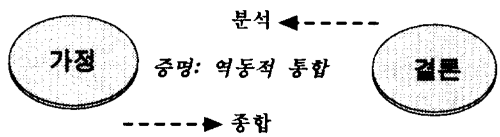
<그림 1> 증명의 복합적 측면

V. 증명의 지도 방향 탐색

이 장에서는 증명에 대한 수리철학적 분석 결과를 토대로 바람직한 증명 지도 방향을 탐색하고자 한다. 이 장에서 탐색된 증명 지도의 방향은 교육과정 개발자와 교과서 저자와 교사에게 여러 가지로 도움을 줄 수 있을 것으로 생각된다.

첫째, 준경험주의에서 강조하는 증명의 분석적 양식과 절대주의에서 강조하는 증명의 종합적 방식이 통합된 역동적인 수학적 사고 활동으로서 증명을 지도할 필요가 있다. 다시 말해서, 결론이 성립하기 위해서 성립되어야 할 전제 조건을 탐색하는 분석적 방식과 그러한 전제 조건을 가정에서부터 이끌어내는 종합적 사고 방식의 역동적 통합으로서 증명을 지도해야 한다는 것이다.

증명 교육은 학생들로 하여금 수학적으로 사고하고 연역적으로 추론하는 힘을 육성하도록 하는 데에 주된 목적이 있다. 그러나 증명의 종합적 측면만으로는 학생들에게 증명이 왜 그러한 모습으로 나타나게 되는가를 적절히 보여주지 못하며, 결국 수학적 사고 활동으로서의 증명이 아닌, 증명의 기록에 불과한 기성의 수학을 학생들에게 강제로 부과하는 결과를 초래한다. 학생들은 증명의 이러한 종합적 제시 양식의 과도한 강조로 인해, 수학적 논의의 피상적 수준만을 접하게 된다. 수학의 고정된 의례적 형식으로서가 아닌 진정한 수학적 사고 과정으로서의 증명을 지도하기 위해서는, 증명 지도에서 분석적 사고 방식과 종합적 사고 방식을 동시에 반영하여야 한다.



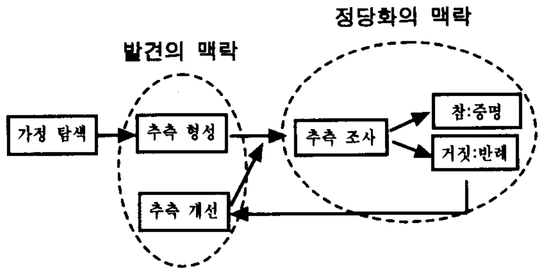
<그림 2> 분석과 종합의 역동적 통합으로서의 증명

둘째, 준경험주의에서 강조하는 발견의 맥락에서의 증명을 학교 수학에 반영하는 것이 바람직하다.[2] 다시 말해서, 학생들에게 발견의 경험을 제공함으로써, 즉 증명해야 할 명제를 '만들어 가는 활동'에 참여시킴으로써 증명의 필요성을 보다 자연스럽게 인식시킬 필요가 있다는 것이다. 현재의 증명 교육은 증명해야 할 명제의 가정과 결론을 완전한 형태로 제시함으로써 학생들에게 절대주의 수리철학에서 강조하는 정당화의 맥락만을 제시하고 있다. 학생들은 자신들이 증명해야 할 명제가 어떻게 형성되는가를 탐색할 기회를 갖지 못하고 있다. 결국 학생들은 증명에 대한 아무런 동기도 갖

2) 여기서의 발견은 재발견에 해당된다.

지 못한 채 아무런 문제 의식도 없이 증명해야 할 명제를 수동적으로 부과받고 있는 것이다. 또한 학생들은 완전한 형태로 제시되는 명제에서 가정과 결론이 증명에서 갖는 의미를 제대로 이해하지 못함으로써, 증명 과정에서 결론을 이용하거나 명제 전체를 증명 과정에서 재진술하는 오류를 범하게 된다.

그러므로 학생들에게도 발견의 맥락과 정당화의 맥락이 통합된 형태로 증명을 지도할 필요가 있다. 학생들에게 증명해야 할 완전한 명제를 제시하는 대신에, 가정에 해당하는 조건만을 제시하고 그 조건으로부터 성립할 수 있는 결론을 발견(추측)하도록 한 다음에, 발견한 그 결론이 참이라는 것을 밝히기 위해서 증명을 수행하도록 하자는 것이다. 다시 말해서 학생에게 가정만을 제시하여 가정으로부터 성립될 수 있는 여러 가지 결론을 스스로 추측하게 하는 발견의 맥락과, 학생 자신의 추측이 옳은지 틀린지를 조사하는 정당화의 맥락을 통합하여 지도함으로써 보다 의미 충실한 증명 교육을 모색하자는 것이다. 이러한 지도 방안은, 재발견의 경험을 통해 형성된 학생 자신의 추측이 어떻게 성립될 수 있는가를 조사하는 과정에서 증명의 필요성을 자연스럽게 인식하도록 하는 데에, 그리고 가정과 결론이 증명에서 갖는 의미를 보다 풍부하게 이해시키는 데에 일조할 것으로 생각된다.



<그림 3> 발견의 맥락과 정당화의 맥락의 통합

셋째, 증명에 대한 사회적 구성주의의 관점을 완화시켜 증명 교육에 적용할 필요가 있다. 사회적 구성주의에서 증명은 자신의 주장을 다른 사람에게 설명함으로써 다른 사람을 확신시키는 과정이며, 어떤 논쟁이 진정한 수학적 증명으로 인정되는 것은 오로지 수학자들간의 상호작용인 사회적 합의를 통해서 가능한 것으로 파악되었다. 한편 본문에서 학생들끼리의 합의를 거쳐 타당한 증명에 이르도록 하는 것은 현실적으로 무리가 있음을 확인하였다. 따라서 증명에 대한 사회적 관점을 완화시켜 증명 교육에 적용한다는 것은, 학생들로 하여금 확신의 수단으로서의 증명을 경험하도록 하고 타당한 증명에 대한 최종 판단은 교사의 권한에 맡기는 것을 의미한다.

본 논문에서는 확신의 수단으로서의 증명을 경험할 수 있는 학습 상황으로 소그룹 협력 학습을 제안하는 바이다. 소그룹 협력 학습에서 자신이 탐색한 증명 방식을 다른 학생들에게 설명하고 다른 학생들로 하여금 그 증명이 맞는지 틀리는지를 세심하게 따져 보도록 함으로써 사회적 상호작용을 통해 보다 의미 있는 증명의 구성을 도모할 수 있을 것으로 생각된다.

참고 문헌

강문봉. (1993). "Lakatos의 수리철학의 교육적 연구". 서울대학교 박사학위 논문.

우정호. (1994). 증명 지도의 재음미. "대한수학교육학회 논문집", 4, 1, 3-24.

Balacheff, N. (1991). The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof. In Alan J. Bishop (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth* *through Teaching.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 175-192.

De Millo, R., Lipton, R. and Peril, A. (1986). Social Processes and proofs of theorems and programs. In T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics,* 267-285.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* The Falmer Press.

Ernest, P. (1994). The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics. In Alan J. Bishop (Ed.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 335-350.

Hanna, G. (1983) *Rigorous Proof in Mathematics Education,* OISE Press, Toronto.

Hanna, G. and Jahnke, H. N. (1993). Proofs and Applications. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 4, 421-437.

__________________________. (1996). Proof and Proving. In Alan J. Bishop (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 877-908.

Hersh, R. (1993). Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 4, 389-399.

Lakatos, I. (1976). *Proof and Refutation-The Logic of Mathematical Discovery,* 우정호 역 (1990), "수학적 발견의 논리". 서울:민음사.

__________. (1986a) What Does a mathematical proof prove? In T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* 153-162.

__________. (1986b) A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* 29-48.

Sekiguchi, Y. (1991). *An Investigation on Proofs and Refutations in Mathematics Classroom.* UMI, AAC 9124336, University of Georgia.

Tymoczko, T. (Ed.) (1986) New Directions in the Philosophy of Mathematics. Boston: Houghton Mifflin Company.

The Nature of Proof and the Improvement of Proof Education

- In the Perspective on the Philosophy of Mathematics -

Na, Gwi-Soo

This thesis analyzes the nature of proof in the perspective on the philosophy of mathematics, such as absolutism, quasi-empiricism and social constructivism. And this thesis searches for the improvement of teaching proof in the light of the result of those analyses of the nature of proof.

Through the analyses of the nature of proof in the perspective on the philosophy of mathematics, it is revealed that proof is a dynamic reasoning process unifying the way of analytical thought and the way of synthetical thought, and plays remarkably important roles

such as justification, discovery and conviction.

Hence we should teach proof as a dynamic reasoning process unifying the way of analytic thought and the way of synthetic thought, avoiding the mistake of dealing with proof as a unilaterally synthetic method. At the same time, we should make students have the needs of proof in a natural way by providing them with the contexts of both justification and discovery simultaneously. Finally, we should introduce the aspect of proof that can be represented as conviction, understanding, explanation and communication to school mathematics.