大韓數學敎育學會 論文集 第 8 卷 第 1 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.1, 313-326. July 1998

前形式的 證明의 意味와 敎授學的 意義에 關한 硏究

류 성 림*

Ⅰ. 서 론

현대와 같이 급변하는 정보화 사회에 적응을 잘하기 위해서는 범람하는 정보들 중에서 사회적 또는 개인적인 문제를 해결하는데 필요한 가치있는 정보를 적절히 선택하고 처리하지 않으면 안된다. 이 때 정보의 선택이나 판단에 있어서 상황을 전체적으로 파악하고 그 본질을 통찰하기 위해서는 직관력이 필요하고, 정보를 정확히 처리하여 다른 사람을 납득시키기 위해서는 논리적 사고력이 필요하다. 특히 논리적으로 사고하는 능력과 태도의 육성은 수학교육의 가장 중요한 목표 중의 하나이며, 이러한 목표를 달성하는데 있어서 증명이 중요한 역할을 하고 있음은 주지의 사실이다.

우리는 흔히 참이라고 인정되고 있는 몇개의 명제로부터, 유효한 추론에 의해서 어떤 명제가 참임을 나타내어 보이는 연역적 논증만을 증명으로 받아들이고 있다. 이것은 어떤 정리의 타당성을 보증할 때는 형식적이고 엄밀한 증명에 의해서만이 이루어질 수 있다는 것을 전제로 한 것이라 생각한다. 그러나 초등학교 수준에 있는 아동들이나 van Hiele의 학습 수준 이론에서 세 번째 수준 이하에 속해있는 학생들에게는 엄밀한 형식적 증명은 큰 의미가 없을 것이다. 현재 증명에 대한 형식적 지도는 중학교 2학년부터 이루어지고 있다. 따라서 초등학교 수준이나 형식적 지도에 대한 준비가 되어있지 않은 중등학교 학생들에게는 증명의 형식성, 엄밀성 그 이상으로 형식화 이전의 단계에서 할 수 있는 '증명하는' 활동 그 자체를 더욱 중요시하여 다룰 필요가 있다.

최근에는 정리를 증명의 최종형태로서 형식성, 엄밀성에 의해 받아들이기 이전에, 증명에 포함된 아이디어나 그 의의를 중요시하여 수학자 공동체에서 협의에 의해 받아들이는 점진적인 사회적 과정으로서 이해하려는 증명의 사회학적 견해가 대두하고 있음에 주목할 필요가 있다(Lakatos, 1976; Tymoczko, 1986). 이와 같은 입장에서 증명의 엄밀성이나 형식성을 너무 중시하는 교육에서 벗어나려는 여러 가지 시도가 있음을 볼 수 있는데, 그러한 노력 가운데 가장 대표적인 것은 형식적 증명 이전에 할 수 있는 증명으로서의 '前形式的 證明 (preformal proof)'을 들 수 있다. 전형식적 증명은 적절한 조작적, 기하적 표현을 이용하여 이것을 일반적인 근거로 받아들이는 증명이고, 적절한 예 또는 모델 내에서 이루어지는 증명으로서, 형식적 증명을 생성하거나 확신시키기도 하고, 정리의 의미를 더욱 명확히 이해하도록 도우며, 학생이 심리적으로 자연스럽게 할 수 있는 증명이다.

본고에서는 전형식적 증명이 정리나 형식

* 대구제일여자상업고등학교

적 증명을 이해하는데 매우 중요한 역할을 하고, 수학교육에서 유용하게 활용될 수 있다는 관점을 가지고서 전형식적 증명의 의미와 그 교수학적 의의에 관하여 논하고자 한다. 이에 앞서 현재의 수학교육의 철학에서 볼 때 증명의 본성을 어떻게 파악할 수 있는가를 사회학적 견해를 중심으로 고찰한다.

Ⅱ. 증명에 대한 사회학적 견해

일반적으로 증명은 공리 또는 이미 증명된 명제로부터 엄밀한 논리적 규칙에 따라 새로운 명제가 참임을 보이는 것이다. 여기서 논리적 규칙은 보통 '추론규칙'이라 하는 삼단논법의 한 형식이다. 증명을 더 자세하게 형식적으로 정의하면 다음과 같다.

명제 H1, H2, …, Hn을 전제로 하여 결론인 명제 C를 이끌어내는 '논증'은 다음과 같은 명제의 계열 P1, P2, …, Pn이다.

(1) Pn은 C이다(마지막 명제가 결론).

(2) Pi는 다음 중의 하나이다.

① Hi(전제들 중의 어떤 것)

② 공리

③ 선행하는 Pj, Pk로부터 추론규칙에 따라 이끌어진 것으로, 여기서의 추론규칙은 예컨대, 다음과 같은 것이다.

(ⅰ) 連言推理	(ⅱ) modus · ponens
P	P → Q(P이면 Q)
Q	P
∴ P∧Q	∴ Q

이와 같이, 논증(demonstration)은 논리적, 형식적으로 명확히 정의되는 것이고, '증명(proof)'은 일반적으로 논증을 어느 정도 약식으로 기술한 것이라 볼 수 있다(Kunimoto, 1992).

수학교육에서 위와 같이 기술하는 논증의 논리성, 형식성이 매우 중요시 되어 온 것이 사실이고, 특히 수학의 현대화 운동에서는 형식성이나 엄밀성을 강조하여 '증명하는' 활동보다도 증명의 기술방법(구문론적인 측면)에 지도의 중점을 두기도 하였다. 실제로 중학교의 논증지도를 보면, '가정, 결론 그리고 증명'이라는 증명의 형식을 가르치는 지도, 괄호를 완성하는 문제를 만들어 증명의 기술방법을 이해시키는 것과 같은 지도가 지배적임을 볼 수 있다. 이것은 논증지도의 목적과는 거리가 있는 것이라 말할 수 있다.

한편, 지금까지 수학은 절대적으로 확실한 기초 위에서 구축된 학문이라는 점과 위와 같이 공리로부터의 연역적 추론 때문에 타학문의 규범으로 생각되어 왔다. 금세기에 와서는 수학자나 수학 기초론 학자들에 의해 다양한 관점에서 수학의 절대적인 기초를 확립하기 위한 논의가 이루어졌다. 첫째는 Russell, Frege 등의 논리주의, 둘째는 Hilbert의 형식주의, 셋째는 Brouwer, Heyting 등의 직관주의이다(Ernest, 1991).

논리주의자는 수학의 제 개념을 엄밀하게 논리적으로 정의하려 하였고, 또 그것들을 논리학의 제 개념으로 환원하려 하였다. 즉 그들의 목적은 논리학적 용어나 공리로 정의할 수 없는 개념을 도입하지 않고서 수학 이론과 개념을 만들어 내며, 모든 수학적 진리를 논리의 공리와 추론 규칙만으로 증명하는 것이었다. 따라서 논리주의자들에게는 형식적 증명이 중심적 역할을 한다. 이 분야의 최초의 성공자는 Dedekind와 Peano인데, Dedekind는 유리수를 공리론적으로 다루는데 요구되는 기본적인 성질들을 서술하였으며, Peano는 산술의 기본적인 아이디어를 포함하는 형식화된 기호 체계로서

의 수학을 만들려고 시도하였다. 또한 Frege는 수체계의 출발 수준을 무정의 개념으로서의 자연수의 수준에 머물지 않고 논리의 원초 개념으로 더 깊이 들어가려고 시도하였다. 그러나 Frege의 시도는 패러독스가 발생한다는 사실이 Russell에 의해 밝혀지면서 실패로 끝났다. Russell은 패러독스의 원인이 포함공리에 있다고 보고, 이미 발생한 패러독스를 피하기 위해서, 그리고 수학을 논리로 환원하기 위해서 환원공리, 무한공리, 선택공리라는 세 가지 공리를 채택하였다. 그러나 이것은 바꾸어 말하면 수학이 모두 논리로 환원될 수 없다는 반증이다. 결국 수학의 논리주의적인 해석은 실패로 끝나게 되었다(이용률 외 공저, 1997).

직관주의자는 인간의 직관을 모든 수학적 지식의 원천으로 간주하며, 수학과 수학언어를 구별하여 수학을 정신의 비언어적 활동으로 보고 있다. 수학적 활동은 공리나 정리로 이루어져 있다기 보다는 오히려 '내성적인 자기 반성적 구성'에 의해 이루어진다고 파악하지만, 이 구성은 엄격히 제한을 받는다. 그들은 배중율을 인정하지 않았기 때문에 배리법에 의한 존재증명을 인정하지 않는다. 그 결과 다수의 고전적 수학이 사장되는 결과를 가져왔다. 또 직관주의자는 수학이 직관을 기초로 한다고 주장하지만, 직관은 어디까지나 개인적인 것이기 때문에 수학이 '조직화된 문화적 현상은 아니다'는 견해를 가지고 있다. 따라서 수학자 전원이 공통인 직관이 있다는 것을 어떻게 확신하는가에 대해 직관주의의 불충분성이 지적되고 있다.

형식주의는 논리주의에 의해 야기된 패러독스와 직관주의에 의해 야기된 고전 수학의 부분적인 포기와 같은 수학적 위기를 극복하기 위한 노력에서 비롯되었다. 형식주의자는 수학을 어떤 규칙에 따라 형성된 아무런 의미없는 기호의 계열인 형식적인 체계가 있다고 규정하며, 따라서 의미없는 기호 조작이 수학의 핵심을 이룬다. 이 견해에 의하면, 수학적 명제의 타당성은 적절한 형식체계 내에서 엄밀한 형식적 증명을 통해서 확립된다. 형식주의자는 형식체계의 무모순성이나 완전성을 증명하는 것에 의해 강력한 수학의 기초를 구축하려 하였다. 그러나 그 계획은 괴델의 불완전성 정리에 의해 실현될 수 없음이 밝혀졌다. 괴델은 산술을 포함하는 임의의 수학 체계의 무모순성은 증명될 수 없으며, 어떠한 무모순인 공리 체계도 필연적으로 불완전하다는 것을 증명하였다. 즉 어떤 체계의 무모순성을 증명할 때, 그 체계보다도 강력한 수학이 필요하다는 것을 증명하였다. 괴델의 이러한 증명은 형식주의 프로그램에 좌절을 안겨 주었을 뿐만 아니라, 수학세계에 언제 모순이 발견될지 모르는 불안을 안겨 주었다.

비록 위의 세 학파들 사이에서 수학에 대한 철학적 의견과 심지어는 증명의 타당도에 대한 준거도 달랐지만, 모두 형식적 증명의 중요성을 강조하였다.

한편 지난 20년간 여러 수학자들은 수학에서 가장 중요한 것이 연역적 추론, 즉 형식적 증명이라는 견해와는 다른 새로운 수학 철학을 피력하였다. 이는 공적인 증명, 준경험적 증명, 사회적 과정으로서의 증명, 열림성과 유연성이 있는 증명 등의 다양한 이름으로 불리는 데서 알 수 있듯이, 증명이란 명제를 정당화하는데 필요한 주장이며 납득이 되기만 하면 몇 가지 다른 형식을 가질 수 있는 것인 바, 본질적으로 증명은 절대적 확실성을 갖고 있는 것은 아니며 따라서 증명의 성격이 정적이지 않다는 것이다. 이러한 입장의 철학은 수학의 절대적인 기초를 확립하기 위한 것은 아니고, 상대주의적인 입장에서 수학을 파악하기 위한 것이다

(Hanna, 1991).

그 중에서 대표적인 사람으로 Lakatos를 들 수 있다. 그는 수학사의 예를 통해 수학이 완성된 실체를 그대로 발견하여 누적해 가는 것이라기 보다는 오랜 세월에 걸쳐 성장과 실패를 거듭해 온 인간적인 활동임을 강조하면서 시행착오적인 인간적 활동으로서의 수학의 발달과정과 그에 따른 수학의 오류주의의 입장을 표명한다.

Lakatos(1976)는 수학이 비록 경험과학은 아니지만 그 방법이 경험과학의 방법들과 유사하기 때문에 수학을 준-경험과학으로 보고 있다. 그에 의하면, 수학은 '고찰과 비판, 증명과 반박의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선'에 의해 성장한다. 따라서 어떤 증명도 그것으로서 끝나는 것은 없으며, 실제로 증명은 시작부터 형식적인 준거를 사용하기 보다 본질적인 의미를 타협하는 점진적인 사회적 과정인 바, 증명은 의미의 타협을 통해 개선되고 그 결과가 수용된다는 것이다.

Lakatos와 마찬가지로 해석학의 역사를 연구한 Kitcher도 오일러, 코시, 바이어스트라스의 업적을 되짚어 보고 수학적 증명에 관해 다음과 같은 결론을 얻었다(Hanna, 1991).

> "수학적 증명은 수학적 지식에 반드시 필요한 것은 아니고, 일련의 확실성을 축적하기 위한 시도로서, 엄밀한 수학적 증명이 항상 합리적인 것은 아니다. 엄밀성의 요구는 수학의 성장에 방해가 된다. 왜냐하면 엄밀성의 요구는 문제해결을 방해하기 때문이다. 실제로 승인된 추론의 집합 가운데 가장 흥미있는 것은 그 집합의 중간적 위치를 나타내는 것, 즉 엄밀하지 않은 증명이다."

이와 같이, Kitcher는 수학자의 관심이 반드시 증명의 엄밀성에 있는 것만은 아니라는 것을 수학사를 통하여 분명히 밝히고 있다.

한편, Davis는 수학자의 현실의 수학적 활동을 되돌아 보고, 실천적 수학자가 증명을 어떻게 이해하고 있는가를 다음과 같이 말하고 있다(Hanna, 1991).

> "(수학자가 나타내는) 증명은 결코 완전하지 않고, 완전할 수 없다. 틀에 박힌 계산은 어느 정도 생략된다. 어떤 것은 그림이나 직관에 호소하기도 한다. … 그러나 이와 같은 부분적 증명은 수학자의 사회적 공동체에서는 이해되고, 평가되고, 적절하게 받아들여진다."

여기에는 증명이 완전할 수 없다는 것과 직관에 호소할 필요성을 나타내는 것 뿐만 아니라 증명의 사회학적 견해까지도 지적하고 있는 것이다.

Hanna(1991)는 증명의 사회학적 견해에 착안하여 사회적 승인을 현실적으로 어떻게 이행할 수 있는가를 명확히 하기 위해, 정리가 수학자의 공동체에 받아들여지기 위한 요인을 다음과 같이 다섯 가지로 고찰하고 있다.

첫째, 이해: 수학자가 정리, 그것에 포함된 개념, 정리의 논리적 선행 조건, 그리고 정리의 함의(결론)를 이해하며, 정리가 옳지 않다는 것을 주장할 근거가 없는 경우.

둘째, 중요성: 그 정리의 결과를 하나 또는 그 이상의 수학 분야에 이용할만큼 매우 중요한 의미를 가질 경우.

셋째, 일관성: 정리가 이미 인정된 수학적 결과와 일치할 경우.

넷째, 명성(평판): 정리를 만든 수학자가 그 정리와 관련된 분야의 전문가로서 비난받지 않을만큼 신망을 가지고 있을 경우.

다섯째, 설득력: 자신들이 경험했던 유형의 정리에 대한 설득력 있는 수학적 주장(엄밀하든 엄밀하지 않든 간에)이 있을 경우.

이들 요인 중에서 특히 어떤 것이 수학자에게 중요한가를 고찰한 후에 Hanna는 다음과 같은 결론을 얻었다.

> "수학자가 정리를 승인할 때, 엄밀한 증명보다도 그 정리의 이해나 중요성에 착안한다. 증명의 존재는 승인하기 위한 하나의 요인에 지나지 않는다."

그런데 현실적으로 증명에서 형식성을 가장 중요한 것으로 생각하고 있는 학생들이 많은데 그 이유로는 다음과 같이 설명할 수 있을 것이다.

수학적 결과를 공표할 때, 반드시 정리나 증명 형식으로 제시하며, 따라서 독자는 이 제시 방법을 수학의 핵심적인 생각으로 받아들여, '수학적 능력이 곧 엄밀한 형식적 증명을 할 수 있는 능력'으로 생각하는 것이다. 이와 같은 입장에 서게 되면, 수학교육에서도 증명을 형식적으로 기술하는 능력을 가장 중요하게 생각하여 그러한 능력을 훈련시키는데 역점을 두게 된다. 그 결과 형식성이나 엄밀성을 증명에 있어서 가장 중요한 것으로 생각하게 되는 것이다.

지금까지의 고찰을 바탕으로 수학교육에서 증명을 지도할 때 염두에 두어야 할 사항으로는 다음을 들 수 있다. 첫째, 증명에서의 엄밀한 형식은 주된 학습 요소는 아니지만 명확성, 정당성 및 이해를 위한 중요한 수단으로서 다룰 필요는 있다. 의사소통을 위해 필요한 것으로 인식하고, 또 그 필요성이 적절한 수준의 엄밀성과 조화를 이룰 수 있다면 학습은 매우 강화될 것이다. 그리고 정리의 승인에 대해 증명의 형식성, 엄밀성은 하나의 요인에 지나지 않으며, 보다 중요한 것은 증명에 포함된 아이디어와 그 이해의 중요성에 있다는 것이다. 둘째, 수학적 추론의 성장은 각자의 경험이 반영될 때 잘 이루어지며, 추론 과정의 여러 가지 방법들을 적용할 수 있는 능력을 키우도록 도와 주어야 한다. 셋째, 증명의 이해나 형식성, 엄밀성의 수준은 그 증명에 관계된 공동체의 수준에 따라 여러 가지가 있다. 따라서 수학의 학습에서 모호함에 인내하는 것도 배워야 할 것이며, 지나치게 규칙 따위에 얽매이면 통찰력을 잃을 수도 있을 것이다. 때로는 용어나 기호 등도 엄밀하게 구별되지 않는 경우도 있다. 예컨대, '−' 기호의 다양한 역할, f(x)를 함수나 x의 함수값으로 이용하는 것 등을 들 수 있다. 넷째, 혼란이 생길 위험이 있을 경우에는 필요한만큼 엄밀성을 갖추는 것도 중요한 것인바, 수학교육에서 필수적인 것으로 연역적 추론의 판단적 측면도 배워야 할 것이다.

수학교육의 역할은 학생들에게 이러한 증명의 성격을 인식하도록 하고, 수학에서 증명을 하는 지식과 기술을 기르는 다양한 활동을 제공하는 것이다.

III. 전형식적 증명의 의미

앞장에서 고찰한 바와 같이, 수리철학에서 증명에 관한 사회학적 견해가 대두되고 있으며, 이와 같은 입장에서 수학교육에서도 증명의 엄밀성이나 형식성을 너무 중시하는 교육에서 벗어나기 위한 여러 가지 형태의 시도가 이루어지고 있다. 그러한 노력 가운데 가장 대표적인 것은 '전형식적 증명'이라는 개념이다.

지금부터는 전형식적 증명의 의미와 그 교육적 의의를 논하고자 한다. 전형식적 증명은 여러 가지로 표현되고 있다. 예컨대, Semadeni(1984)와 Kirsch(1979)의 '前수학적 증명', Kirsch(1979)의 '조작적 증명', Stein(1981)의 '구체적 증명', Wittmann과 Müller(1988)의 '내용

적-직관적 증명' 등을 들 수 있다. 여기서는 ' 전형식적 증명'의 개념을 규정하기 위해 예를 들어가면서 그 의미를 밝히고자 한다.

Blum과 Kirsch(1991)는 전형식적 증명의 개념을 다음과 같이 규정하고 있다.

> "전형식적 증명은 올바른 증명이지만, 형식적으로 표현되지 않는 일련의 추론을 의미한다. 이들의 결론은 타당한 것이긴 하지만, 비형식적 전제를 기반으로 하고 있다. 그와 같은 전제의 특별한 예는 구체적으로 주어진 실생활의 대상, 기하적-직관적 사실, 실생활과 관련된 기본적인 아이디어, 또는 직관적으로 분명한 것으로 '공통적으로 이해할 수 있다', '심리적으로 분명하다'와 같은 언어 표현을 포함하는 것이다. 언어 표현의 계열은 서로 심리적으로 자연스러운 순서로 이어질 수 있다. 귀납적 추론(수학적 귀납법)이나 간접적 증명('…라고 가정하면', '…라면 어떻게 될 것인가')도 포함된다. 결론을 구체적인 예로부터 직접적으로 일반화하지 않으면 안된다. 그 결론은 형식화가 되어도 올바른 구체적인 수학적 이유를 갖지 않으면 안된다."

전형식적 증명이란 용어의 원조는 Semadeni(1984)의 전수학적 증명과 그 이전의 Kirsch(1979)의 조작적 증명이라고 부른데서 찾을 수 있다. Semadeni에 의하면, 전수학적 증명이나 조작적 증명의 특징은 다음과 같다. ① 구체적 활동을 통하여 표상된다. ② 그 활동은 구체적인 수학적 근거가 된다. ③ 수학적 근거는 심리적으로 자연스러운 순서로 발생한다. 즉, 전형식적 증명은 구체적 조작을 기본으로 하고 있는 것으로 Piaget가 주장하고 있는 '수학적 개념의 발생적 기원은 인간의 활동에 있다'라는 생각을 정리의 증명에 확장한 것이라 볼 수 있다.

(예 1) 자연수의 곱셈의 교환법칙

먼저 3과 5를 선택한다. 구슬을 직사각형 모양으로 나열한다. 먼저 구슬을 가로로 분할하면 5개가 한묶음이 되어 3개로 나누어지기 때문에 5×3을 얻는다. 다음에는 세로로 분할하면 3개가 한묶음이 되어 5개로 나누어지기 때문에 3×5를 얻는다. 구슬의 개수는 분할하는 방향과는 관계가 없기 때문에 5×3=3×5가 된다. 여기서 중요한 것은 구술을 직사각형 모양으로 나열하여 그것을 분할하는 활동을 기초로 하여 교환법칙이 얻어졌다는 점이다.

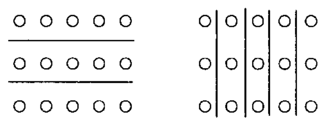


그림 1. 3×5=5×3

마찬가지의 조작을 3과 5 이외의 수에 대해서도 행한 후에 조작이 내면화되도록 하기 위해 큰 수를 선택한다. 큰 수에 대해서도 같은 조작을 한 것이 확인되면 자연수의 곱셈의 교환법칙이 증명되었다고 볼 수 있다.

(예 2) 삼각부등식에 관한 정리

'사각형의 둘레의 길이는 두 대각선의 길이의 합보다 크다'라는 정리의 증명을 다음과 같이 생각해 보자.

소재로는 핀과 고무줄을 사용한다. 그림 2에서 4개의 핀은 사각형의 꼭지점을 나타낸다. 먼저 대각선에 고무줄을 늘어나지 않도록 하여 그 길이만큼 묶는다. 다음에는 고무줄을 사각형이 만들어지도록 4개의 핀 밖으로 늘려서 감는다. 이 때, 고무줄이 늘어나게 되고, 따라서 정리가 성립한다는 것을 알 수 있다.

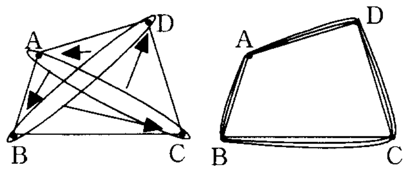


그림 2. 삼각부등식의 정리

이 증명에서는 고무줄을 핀에 끌어당기는 활동을 통해 고무줄이 늘어나는 물리적인 현상을 수학적 근거로 하여 증명한 것이다.

이 증명은 다음과 같은 형식적 증명에 대응한다고 할 수 있다.

△ABD, △BCD에서 삼각부등식은

$\overline{BD} < \overline{BA} + \overline{AD}, \quad \overline{BD} < \overline{BC} + \overline{CD}$

(고무줄 BD를 A, C에 각각 걸면, 고무줄이 늘어난 것에 대응한다)

△ACD, △ABC에서 삼각부등식은

$\overline{AC} < \overline{AD} + \overline{DC}, \quad \overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$

(고무줄 AC를 B, D에 각각 걸면, 고무줄이 늘어난 것에 대응한다)

위의 네 식의 각 변을 더하여 식을 변형하면

$\overline{AC} + \overline{BD} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

Blum과 Kirsch의 전형식적 증명의 개념 중에 귀납적 추론도 포함시켰는데, 여기서는 몇 개의 예로부터 일반적인 법칙을 이끌어내는 추론으로서의 귀납법을 의미하는 것은 아니고, 다음과 같은 Besuden(1979)의 '수학적 귀납법(mathematical induction)'을 의미하고 있는 것이다.

일반적으로 수학적 귀납법은

(a) n=1일 때 성립한다.

(b) n=k일 때 성립한다면, n=k+1일 때도 성립한다.

(a), (b)로부터 모든 자연수에 대하여 정리가 성립한다.

와 같이 증명하는 방법이다.

그러나 Besuden의 수학적 귀납법은 n=1에 대하여는 큰 의미가 없다. 증명하는 상황에 따라 다르지만, n의 몇 개를 확인하여 그 과정에서 증명의 기본적인 아이디어를 발견하는데 의미가 있다(여기서는 귀납적 추론도 증명의 아이디어의 발견에 유용하다). 다음에는 그것을 기초로 어떤 특정한 수에 관하여 n부터 n+1의 과정에서 찾을 수 있는 아이디어(이것은 증명의 본질적 부분에 해당한다)를 나타내는 것이 중요하다.

(예 3) n개의 순열 n!의 증명

n=1, 2에서는 공식의 이유에 해당하는 아이디어가 분명하지 않다. 2에서 3, 3에서 4로 이행할 때, 그 아이디어는 명확해진다. 예컨대, 초등학교 3, 4학년의 아동을 대상으로 한다면, 다음과 같은 이유를 들 수 있겠다. 이것으로부터 이 공식의 일반성이 이해되고, 증명이 되었다고도 볼 수 있다.

먼저 2개의 구슬을 나란히 놓는다. 2개의 가능한 순열 각각에 대해서 3개의 서로 다른 위치에 제3의 구슬을 끼워넣을 수 있다. 따라서 3개의 구슬에 대해서 2×3의 순열이 만들어진다. 다음에 2×3의 순열 각각에 대해서 4개의 서로 다른 위치에 제4의 구슬을 끼워넣을 수 있다. 따라서 4개의 구슬에 대해 2×3×4의 순열이 만들어진다. 이와 같이, n개 요소의 순열에 대해서 하나의 요소를 더하면, (n+1)개의 장소에 새로운 요소를 둘 필요가 있으므로 (n+1)개 요소의 순열은 n!를 통하여 증명되었다고 할 수 있다.

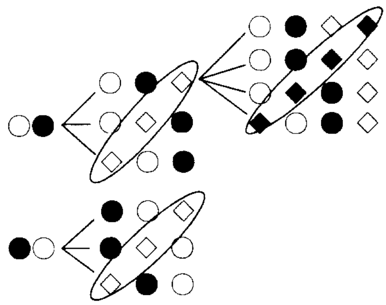


그림 3. 순열 n!

Blum의 전형식적 증명의 개념에는 Semadeni의 '구체적 조작이나 정신적 조작으로부터 성립한다'는 특징이 감소하여, 전형식적 증명의 비형식적 전제에 역점을 두고 있다. 이것은 Semadeni가 초등학교 단계에서의 '증명'을 염두에 두고 있는 반면, Blum은 그것을 보다 확장하여 중학교 이후의 증명 지도에 있어서도 전형식적 증명을 이용할 수 있도록 하기 위한 것이라 볼 수 있다.

지금까지 여러 가지의 전형식적 증명이 개발되고 있는데, 이들 전형식적 증명을 다음의 네 가지 범주로 나눌 수 있다.

① 조작적 증명(action proof)

범례들로서 통용되는 구체적인 예에 대한 조작을 통하여 성립하는 증명이다.

② 기하적-시각적 증명(geometric-intuitive proof)

기본적인 기하적 개념, 넓이 및 성질과 같은 직관적으로 분명한 사실을 참조하는 증명이다. 예를 들면, 자연수의 합의 공식을 그림을 이용하여 증명하는 것(넓이를 기초로한 증명), 정적분을 넓이로 해석하여 증명하는 것 등을 들 수 있다.

③ 실생활과 관련된 증명(reality oriented proof)

실생활에서 의미가 있고, 학습자가 쉽게 받아들일 수 있는 기본적인 아이디어를 이용하는 증명이다. 예를 들면, 함수 f를 시간-거리의 함수, f'을 속도로 해석한 증명으로서 소위 물리적 개념을 기초로 한 증명이다.

④ 범례에 의한 증명(proof by generalization from paradigm)

이것은 하나의 범례나 모델에 따라 증명하는 것이다. 또 여기에는 간접증명이나 불가능성의 증명도 포함된다. 다음 예를 생각해 보자.

(예 4) 더하기 게임

"10보다 작은 수를 생각하여라. 그기에 10을 더하여라. 10에서 처음에 생각한 수를 빼어라. 두 결과의 합을 만들어 보아라. 어떤 결과가 얻어지는가? 그 결과는 항상 그렇게 되는가? 당신의 추측에 대한 근거를 말하시오."

이 경우 아동이 다음과 같이 설명한다면 범례에 기초한 증명을 한 것이다.

"3을 택했다면,

$$\begin{array}{r} 10 + 3 \\ +\ \cancel{1}0 - 3 \\ \hline 20 \end{array}$$

따라서 결과는 항상 20이다."

이 경우 수 3은 어떤 수 x를 대표한다고 생각되기 때문에 타당한 설명이라고 말할 수 있다. 이 증명에서는 정리의 보편타당성의 본질적 과정을 하나의 범례에 의해 나타낸 것이다.

지금까지의 고찰로부터 전형식적 증명의 의미가 어느 정도 파악되었고, 이를 바탕으로 전형식적 증명의 특징을 알아보면 다음과 같다.

① 적절한 조작적, 기하적 표현과 결부된 증명

② 일반적인 근거에 의한 전략의 인식

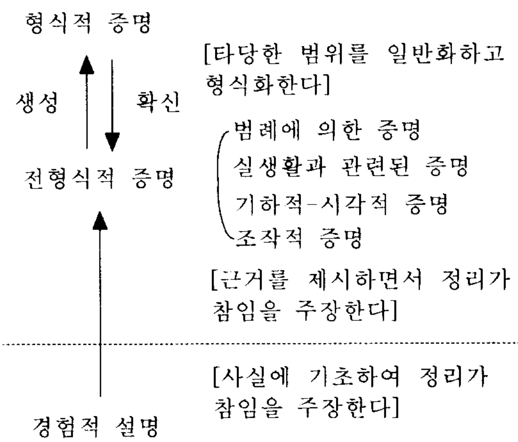
③ 적절한 예 또는 모델 내에서의 증명(여

기서 '적절한'이란 단순한 영상화나 예가 아니라, 그것에 의해 일반적인 근거가 될 수 있는 전략을 인식하는 것을 의미한다.)

다음에는 전형식적 증명의 개념을 보다 명확히 하기 위해서 경험적 설명, 형식적 증명과 비교하면서 전형식적 증명의 개념을 고찰하기로 한다. 일반적으로 증명은 다음의 세 가지 수준으로 구별할 수 있다.

① 경험적 설명
② 전형식적 증명
③ 형식적 증명

Kunimoto(1995)는 위의 세 가지 증명의 관계를 다음 도식으로 나타내고 있다.



여기서 경험적 설명은 실험·실측에 의한 것으로서, 몇 개의 예로부터 확립되는 귀납법에 해당하는 설명이다. 형식적 증명은 교과서에 실린 증명을 전형으로 하는 증명으로서, 일상 언어나 기호를 이용한 연역적 추론을 말한다. 전형식적 증명은 앞에서 기술한 바와 같이, 일반적으로 구체적인 활동을 바탕으로 하고, 일반적인 근거의 전략을 적어도 직관적으로 인식하며, 그 근거를 형식화한다면 형식적 증명이 생성될 수 있는 증명, 또는 형식적 증명을 구체적인 예에 의한 해석으로 확신시킬 수 있는 증명이다.

즉 경험적 설명은 사실에 기초하여 정리의 참을 주장하는 것이고, 전형식적 증명은 사실적인 예를 바탕으로 한 근거를 제시하면서 정리의 참을 주장하는 것으로 조작적 증명, 기하적-시각적 증명, 실생활과 관련된 증명, 범례에 의한 증명이 여기에 해당된다. 그리고 형식적 증명은 정리의 타당성을 일반화할 수 있는 기호 체계에 의해 기술되는 것이다.

Ⅳ. 전형식적 증명의 교수학적 의의

전형식적 증명은 형식적 증명을 생성하거나 확신시키기도 하며, 또는 그 자체로서 정리의 증명이 될 수 있는 증명이다. 또 전형식적 증명은 아동이 심리적으로 자연스럽게 할 수 있는 증명이다. 전형식적 증명의 심리학적 근거로서는 Ⅲ장에서 기술한 Piaget의 조작적 원리를 들 수 있고, 또한 Bruner의 EIS 원리를 그 심리학적 근거로 들 수 있다. Bruner에 의하면 인간이 대상을 인식할 때, 활동적 수준(Enactive), 영상적 수준(Iconic), 상징적(기호적) 수준(Symbolic)으로 점차 인식을 깊게 해 나간다는 것이다. 그의 유명한 가설 '어떤 교과에서도 지적 성격을 그대로 보존하면서 어떤 발달 단계의 아동에게도 효과적으로 가르치는 것이 가능하다'에서 잘 나타나고 있듯이, 아무리 나이가 어려도 언어·기호를 통하여 이해할 수 없는 고도의 개념이나 사고 방법을 활동적·영상적으로는 그 개념이나 사고 방법을 이해할 수 있다는 것이다. 또 활동적 수준, 영상적 수준, 상징적 수준을 항상 관련짓는 동시에 같은 수준에서도 여러 가지 표현을 이용하여 학습을

한다면 수학적 개념이나 사고 방법의 인식을 깊게 할 수 있다. 이러한 Bruner의 가설을 기초로 아동이나 학생이 스스로 구성하고 이해할 수 있는 수준에 적합한 적극적인 증명 활동을 인식하여 지도를 해 나가도록 하는 것이 전형식적 증명의 의도라 할 수 있다.

전형식적 증명의 의의를 명확히 하기 전에 먼저 수학교육학의 사상과 각 증명과의 관계 및 특색을 논하기로 한다. Wittmann(1988)은 증명의 세 가지 수준을 다음과 같이 구별하고 있다.

① 실험적 증명

② 내용적-직관적 증명

③ 형식적 증명

Kunimoto와는 표현의 차이가 있기는 하지만, 실험적 증명에는 경험적 설명, 내용적-직관적 증명에는 전형식적 증명, 형식적 증명에는 형식적 증명을 대응시켜 생각할 수 있다. 이들 표현 가운데 Wittmann의 내용적-직관적 증명은 그 표현에 있어서 전형식적 증명이 의미하는 바를 명확히 나타낸 것이라 할 수 있다. 전형식적 증명도 증명에 필요한 개념간의 본질적 관계(증명에 있어서의 근거)를 나타낸다는 점에서 내용적이고, 실재적인 것 및 자신이 이미 학습한 경험이나 직관과 강하게 결부된다는 점에서 직관적이기 때문이다. 그러나 내용적-직관적 증명은 그 표현상 형식적 증명과 연관지어 생각하는 것이 어렵다. 따라서 전형식적 증명이라 지칭하면 형식적 증명과의 관계가 강하게 인식되고, 형식적 증명과는 무관한 증명이라는 인식이 사라질 수 있다는 점에서 더욱 적절한 표현이라 생각한다. 그러나 전형식적 증명이라 해서 항상 형식적 증명과 관련되는 것은 아니라는 것을 유의할 필요가 있다.

표 1은 각 증명의 특색과 그 배경에 있는 수학교육학의 사상을 관련지어 나타낸 것이다.

표 1. 세 가지 범주의 증명의 특색

증 명	특 색	수학교육 사상과의 관련
경험적 설명	·보편타당성을 보증하지 않는다. ·유한개의 예에 의한 검증 ·실험적 검증 ·개연적 근거에 의함(Polya)	·전통적 수학교육 ·구체화, 개연적 고찰, 예로 설명하는 규칙을 중시하고, 증명의 계획적 도입을 회피한다.
전형식적 증명 (내용적-직관적 증명)	·근거가 명확함 ·보편타당성을 보증한다. ·구성이나 조작에 의해 지원받는다. ·모든 예에 응용될 수 있다. ·학습내용에 의존한 고찰	·발생적 수학교육 ·학습자의 예비지식에 부합한다. ·응용과의 관련을 중시, 관점을 변경, 관계가 풍부한 수학, 인지적 전략의 촉진, 문제를 발전시키는 것
형식적 증명	·정의, 공리, 추론 규칙이 명확함 ·보편타당성을 보증한다. ·형식적인 표현 ·공리적-연역적 체계를 기초로 함	·부르바키 학파식 수학교육 ·엄밀성이나 형식성을 중시 ·형식적 정의나 증명을 철저하게 따른다.

경험적 설명은 수학교육의 현대화 이전의 전통적 수학교육에 대응되는 것이다. 전통적 수학교육에서는 증명의 계획적 도입을 피하였고, 그 대신에 구체화, 개연적 고찰, 실험적 검증 그리고 예로서 설명하는 규칙을 제공하였다.

형식적 증명은 현대화에서 나타난 부르바키 학파의 수학교육에 대응하는 것이다. 부르바키 학파의 수학교육에서는 형식적인 표현, 형식적인 정의나 증명의 엄밀성을 중요시한다.

전형식적 증명(Wittmann의 내용적-직관적 증명)은 경험적 설명과는 다른 것으로, 근거를 나타내면서 명제의 진리를 확립한다. 그러나 형식적 증명과는 달리 구성이나 조작에 의존하거나 필요하다면 실재적인 것을 참조한다. 전형식적 증명은 발생적 교육학에 대응되는 것이다. 발생적 수학교육학에서는 학생의 사전 경험이나 이해와의 결부 및 인지전략의 촉진을 중요시한다. 증명과 관련하여 말하면, 추측을 북돋우고, 반성적 사고나 논의를 중요시하는

것이다. 즉 증명의 '발생'에 주목하고 있다. 발생적 교육학은 학생의 예비지식이나 경험을 중시하기 때문에, 전형식적 증명을 발생적 교육학과 관련지어서 생각하면 그 의의로서 두 가지를 들 수 있다.

첫째, 형식적 증명을 생성한다.

전형식적 증명은 그 명칭에서 알 수 있듯이 형식적 증명을 생성하는 것이다. 두 가지 예를 들어 보자.

(예 1) 정리 '임의의 자연수에 대해 각 자리수의 합이 9로 나누어 떨어지면, 그 수도 9로 나누어 떨어진다'에 대한 몇 가지 증명을 생각해 보자.

① 두자리수나 세자리수에 대해 일반적으로 다음과 같이 증명할 수 있다.

$ab=a\times 10+b=a\times 9+(a+b)$

$abc=a\times 100+b\times 10+c=a\times 99+b\times 9+(a+b+c)$

이 식의 변형에서 숫자의 합인 $(a+b)$나 $(a+b+c)$가 9로 나누어 떨어지게 되면, 그 수도 9로 나누어 떨어진다는 것을 알 수 있다.

② ①의 일반적인 방법을 어떤 특별한 수에 응용하여 다음과 같이 증명해 보자.

$45=4\times 10+5=4\times 9+(4+5)$

$234=2\times 100+3\times 10+4=2\times 99+3\times 9+(2+3+4)$

숫자의 합은 둘다 9가 되고 앞의 식은 각각 9로 나누어 떨어지기 때문에 45와 234도 9로 나누어 떨어진다.

③ 위의 증명을 조작적으로 해보자.

45개의 구슬과 234개의 구슬을 이용하여 그림 4와 같이 배열하고, 9개씩의 구슬을 묶는다. 나머지 구슬의 수는 숫자의 합과 같다. 이 조작은 매우 많은 구슬에 대해서도 행할 수 있으므로 정리가 증명된 것이라 할 수 있다.

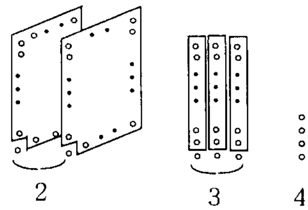


그림 4. 구슬에 의한 조작적 증명

위의 증명에서 ②, ③의 증명이 전형식적 증명이다. ②는 범례에 의한 증명이고, ③은 조작적 증명이다.

일반적으로 아동은 구슬에 의한 조작을 더 친숙하게 할 수 있고, 실제로 조작해 봄으로써 위의 정리의 증명을 이해하게 된다. 또 문자를 충분히 사용할 수 없는 아동에게는 ②와 같은 수에 의한 증명이 보다 이해하기 쉽다. 이와 같이, 전형식적 증명은 형식적 증명을 생성한다고 볼 수 있다.

(예 2) 인수분해 공식의 증명

$x^2+4x+4=(x+2)^2$의 공식은 블록을 조작함으로써 형식적 증명을 생성하는 것이 가능하다. 먼저 x^2, x, 4의 블록을 준비하고 그것을 정사각형이 되게 나열하도록 한다. 이 때, 그림 5와 같이 한 변의 길이가 $(x+2)$인 정사각형이 만들어 진다. 따라서 $x^2+4x+4=(x+2)^2$의 공식은 조작적으로 증명되었다고 할 수 있다.

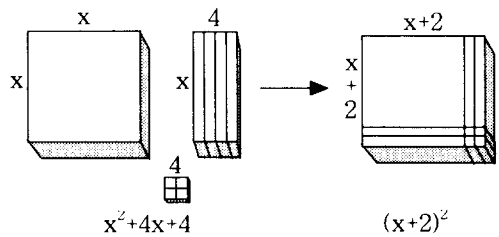
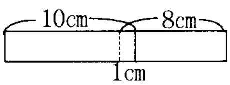


그림 5. 인수분해 공식

둘째, 정리나 형식적 증명을 확신시킨다.

예컨대, '종이 이어 붙이기' 문제를 들어 보자. '10㎝와 8㎝의 테이프를 이을 때, 풀칠할 부분은 1㎝이다. 전체는 몇 ㎝가 될까'라는 문제를 생각해 보자. 이 문제는 초등학교 수준의 문제이기 때문에 형식적인 증명을 제시하지는 못하지만 해결의 근거에 대한 납득을 할 수 있게 된다. 일반적으로 아동은 테이프를 이어 붙일 때 양쪽에 모두 1㎝씩 잡아 풀칠을 하기 때문에 전체는 16㎝라고 생각을 하게 된다. 즉 그림 6을 보고 그림 7과 같이 해석하여 생각하는 것이다. 여기서 그림 8과 같이 나타내면, '겹친 부분을 1㎝씩 뺀다'라고 하기보다는 '위의 겹쳐질 부분만 1㎝ 뺀다'로 파악하여 17㎝가 된다고 납득하게 된다. 이 경우 그림 8에서는 테이프가 붙여지는 구성과정이 기하적으로 표현되므로써 아동이 납득하기 쉬운 것이다.



10+8-1=17

그림 6

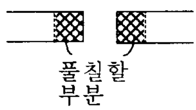


그림 7

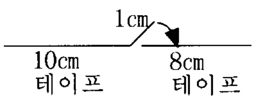


그림 8

지금까지의 고찰을 바탕으로 전형식적 증명의 교수학적 의의를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 증명의 형식성이나 엄밀성을 중요시하며 증명이 의미없는 단순한 기호의 계열이라고 보는 형식주의적인 견해로부터 벗어날 수 있다. 즉, 전형식적 증명을 통해 증명의 본질은 수학적 개념, 아이디어로서 명제들 간의 관계의 통찰에 있다는 것을 명확히 할 수 있다. 결국 증명을 형식적 증명과는 같은 의미로 보지 않는다.

둘째, 기호적 수준에서만 증명을 이해하는 것은 아니고, 행동적, 영상적 수준에서도 증명을 이해할 수 있다. 그리고 그들 증명을 비교함으로써 증명의 본질(근거가 되는 아이디어)을 이해할 수 있게 된다.

셋째, 전형식적 증명은 형식적 증명을 생성하거나 확신시키는 역할을 갖는다. 즉 전형식적 증명은 형식적 증명을 직관적으로 뒷받침하는 역할을 한다.

넷째, 전형식적 증명은 특히 수학적인 경험이 부족한 학습자들이 이해하기 쉽기 때문에 정리나 증명의 이해를 돕기 위해 활용할만한 가치가 높다.

다섯째, 증명을 발견하고 이해할 때, 전형식적 증명 방법이 형식적 증명보다도 항상 쉽다고는 말할 수 없지만, 대부분의 경우 전형식적 증명은 증명의 본질을 이해하는데 유익하고, 증명에 대한 통찰을 갖게 한다.

V. 결 론

증명 활동은 수학에서 가장 중요한 활동 중의 하나이지만, 학생들이 가장 이해하기 어려워하는 내용이기도 하다. 학생들의 증명 활동을 이해하기 위한 방법으로서, 정리의 증명(또는 설명)을 다음과 같이 세 가지 수준으로 나눌 수 있다: 경험적 설명, 전형식적 증명, 형식적 증명. 이 중에서도 특히 전형식적 증명은 오늘날 수학관의 변화, 학교 수학에서의 증명의 기능과 역할 및 증명관이 바뀌고 있다는 주장과 부합하여 형식적 증명을 이해하기 곤란한 학생들, 즉 기호적 수준에 미치지 못하고 행동적, 영상적 수준에 위치한 초등학교 또는 중등학교 학생들에게 증명의 본질을 이해시키기 위한 수단으로서 중요하게 이용할 수 있다는 점에서 그 교육적 의의가

크다고 하겠다. 그리고 전형식적 증명의 이해나 그 타당성의 판단 및 발견을 위해 대체로 다음과 같은 점을 유의하여 지도할 필요가 있다.

첫째, 수학적인 내용에 대한 다양한 표현양식에 가치를 부여할 필요가 있다. 특히 표현할 때의 기본적인 아이디어를 강조하고, 기하적-직관적인 기본개념이 전달되도록 해야 한다. 둘째, 초등학교 때부터 교실에서 전형식적 증명을 자주 다루도록 해야 한다. 셋째, 중등학교에서는 전형식적 증명과 비교하기 위해 형식적 증명의 예를 같이 제시하도록 한다. 넷째, 전형식적 이유를 형식화하는 것이 필요하다. 또 형식적 이유를 영상화, 활동화하거나 실생활과 관련지어 해석하게 한다.

결국 전형식적 증명을 수학교육에 이용하는 방법으로는 크게 두 가지를 생각할 수 있다. 첫째는 형식적인 연역적 증명이 본격적으로 도입되는 중학교 2학년 이전의 초등학교 수준에서부터 전형식적 증명을 활용하여 증명을 스스로 구성하려는 의식을 높이는 것이고, 둘째는 형식적 증명을 지도하면서 동시에 전형식적 증명을 지도하여 형식적 증명에 대한 이해를 깊게 하고, 증명의 본질과 증명의 중심 아이디어에 대한 통찰을 갖도록 지도하는 방법을 들 수 있다.

앞으로 전형식적 증명을 활용할 수 있는 학습 요소에 대한 여러 가지 자료들을 개발하여 이용해야 할 것이며, 또한 학생들이 전형식적 증명을 어떻게 받아들이고 있을 것인지에 대한 현장에서의 실천적 연구가 이루어져야 할 것이다.

참고 문헌

이용률, 성현경, 정동권, 박영배, 박교식, 강문봉, 백석윤, 유현주. (1997). "초등수학교육론". 서울: 경문사.

Blum, W., & Kirsch, K. (1991). Preformal Proving: Example and Reflections. *Educational Studies in Mathematics, vol. 22*. p.187.

Ernest, P. (1991). *The Poilosophy of Mathematics Education*. The Falmer Press. p.11.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press, Cambridge. p.5.

Hanna, G. (1991). Mathematical Proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.54-61). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische. In W. Dörfler & R. Fischer (Eds.), *Beweisen im Mathematikunterricht*. Holder-Pichler-Tempsky. pp.261-262.

Kunimoto, K. (1992). A Preformal Proof and its Educational Significance: In Relation to a Proof from a Sociological Point of View. *Research Reports of Kochi University, Social Science*. pp.1-16.

Semadeni, Z. (1984). Action Proof in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics, vol. 4*. p.32.

Stein, M. (1981). Kommentierte Bibliographie: Zum Beweisen im Mathematikunterricht (deutshund englischsprachige Literatur). *ZDM*. S.64.

Tymoczko, T. (1986). Making room for mathematics in the philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer, 8(3)*. pp.44-50.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? in P. Bender (Hrsg.), *Mathematik-didaktik: Theorie und Praxis Festschrift für Heinrich Winter*. Cornelson. pp.240-242.

A Study on the meaning of preformal proof and its didactical significance

Ryu, Sung-Rim

The purpose of this study is to verify the meaning of preformal proof and its didactical significance in mathematics education. A preformal proof plays a more important role in mathematics education, because nowadays in mathematics a proof is considered as an important fact from a sociological point of view. A preformal proof was classified into four categories: a) action proof, b) geometric-intuitive proof, c) reality oriented proof, d) proof by generalization from paradigm.

An educational significance of a preformal proof are followings: a) A proof is not identified with a formal proof. b) A proof is not only considered from a symbolic level, but also from enactive and iconic level. c) A preformal proof generates a formal proof and convinces pupils of a formal proof. d) A preformal proof is psychologically natural. e) A preformal proof changes a conception of what is a proof.

Therefore a preformal proof is expected to teach in school mathematics from the elementary school to the secondary school.