大韓數學教育學會 論文集 第 8 卷 第 1 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.1, 291-298. July 1998

중학교 기하의 증명 지도에 관한 소고
- van Hiele와 Freudenthal의 이론을 중심으로 -

나 귀 수*

Ⅰ. 들어가며

증명은 고대 그리스 시대 이래로 수학의 핵심적인 부분이며, 학교수학에서도 중심적인 위치를 차지해 왔다. 증명은 학교수학에 있어서 학생들의 연역적 추론 능력을 개발하고 수학의 이해를 증진시키는 데에 그 의의가 있다. 그러나 오늘날 학교수학에서 증명은 이러한 수학적 사고 방법으로서의 의미를 살리지 못하고 다분히 피상적·형식적으로 지도되고 있으며, 대부분의 학생들은 단지 기계적인 방식으로 증명을 암기하고 있다는 문제점이 제기되어 왔다.

본 논문에서는 van Hiele의 기하 사고 수준 이론과 Freudenthal의 수학화 지도론을 중심으로 이러한 증명 지도의 문제를 논의하고자 한다. 증명에 대한 이러한 교수학적 연구는 증명 교육이 이루어지고 있는 학교 현장과 가장 밀접한 관련을 갖는바, 수학 교육과정을 개발하고 구성하는 데에 있어서, 그리고 교사가 증명 수업을 진행하는 데에 있어서 반드시 고려되어야 할 부분으로 생각된다.

Ⅱ. van Hiele의 기하 사고 수준 이론

van Hiele(1986)는 중학교에서 교사로 재직하던 중, 교사인 자신이 증명을 열심히 지도함에도 불구하고 학생들이 증명을 이해하지 못하는 상황을 분석하였다. van Hiele에 의하면 기하적 사고에는 다섯 수준이 존재하며, 각 수준에는 독특한 언어 구조가 있어서 서로 다른 수준에 있는 사람끼리는 의사소통에 많은 어려움을 겪는다. 따라서 기하 교수에서의 주된 문제는 교사가 학생에게 기대하는 수준과 학생들의 수준의 차이로부터 초래된다. 즉 교사는 자신의 수준에서 학생들에게 설명하는데 학생들은 교사의 수준보다 낮은 수준에서 사고하기 때문에 교사의 설명을 이해할 수 없다는 것이다. 이에 van Hiele는 교사가 학생들의 수준을 파악하고 학생들의 수준에서 지도할 것을 권고하였다. 다시 말해서 교사는 학생의 수준에 알맞은 지도를 통해 학생들의 풍부한 사고를 유발시켜야 하며 학생들이 다음 수준으로 진행해 나가도록 지도해야 한다는 것이다.

van Hiele는 기하적 사고의 다섯 수준을 다음과 같이 설명하였다. 제 1 수준은 시각적 인식 수준으로서 이 수준의 학생들은 전체적인 모양새로 도형을 인식하며 도형의 성질에 주목하지 않는다. '이 도형이 왜 정사각형일까요?'라는 질문에 대해 이 수준의 학생들은 '정사각형처럼 보이니까요'라고 대답한다. 학생들은 도형을 시각적 전체로 인식하며 따라서 도형을

* 전주교대 강사

시각적 이미지로 표상할 수 있다. 그러나 시각적 수준의 학생들은 도형의 성질에 주목하지 않는바, 도형의 성질을 의식하지 않는다.

제 2 수준은 분석적/기술적 인식 수준으로서 학생들은 도형의 성질에 주목하며 도형의 성질을 분석할 수 있다. 이 수준에서의 사고 대상은 성질의 집합으로서의 도형이다. 학생들은 시각적으로 지각되는 모양을 분석함으로써 도형의 성질을 알게 되고 결과적으로 도형을 성질로 인식하고 특징짓는다. 학생들은 도형을 전체적으로 바라보지만 시각적 형태로서가 아닌 성질의 집합으로서 고려하는바, 시각적 이미지는 배경으로 물러나게 된다. 그러나 학생들은 도형들 사이의 포함 관계를 모호하게 인식하며, 도형에 대한 개인적 특성화에 따라 도형들 사이의 포함 관계를 인정하지 않기도 한다.

제 3 수준은 추상적/관계적 인식 수준으로서, 도형의 성질이나 도형 자체가 논리적으로 정렬된다. 학생들은 개념에 대한 추상적 정의를 형성하고, 개념의 성질에 대한 필요조건과 충분조건을 구분하는 등 논리적 논의를 하게 된다. 도형의 성질의 일부는 도형의 정의로 채택되고 나머지 성질은 논리적 방법으로 정리된다. 학생들은 여러 도형 사이의 관계와 한 도형의 여러 성질 사이의 관계를 이해한다. 학생들은 도형들의 성질을 정렬함으로써 도형들을 위계적으로 분류할 수 있고 자신들의 도형 분류를 정당화하기 위하여 비형식적 논증을 제시하기도 한다.

학생들은 다양한 성질을 발견함에 따라 그 성질들을 조직할 필요성을 느낀다. 한 성질이 다른 성질의 전제가 됨을 인식하는 논리적 사고는 연역적 추론을 향한 첫 걸음이라고 할 수 있다. 그러나 학생들은 연역적 추론을 완전히 이해하지는 못하며, 연역적인 체계 전체를 파악하는 정도에는 이르지 못한다. 이 수준의 학생들에게 연역은 소규모로 또는 국소적으로 파악된다. 예컨대, 학생들은 사각형이 두 개의 삼각형으로 분해될 수 있고 한 삼각형의 내각의 합은 180° 이므로, 사각형의 내각의 합이 360° 라는 사실을 이끌어 낼 수 있다.

제 4 수준은 형식적 연역 수준으로서, 연역의 의의가 대역적으로 이해된다. 학생들은 기하학의 이론 전체를 구성하며 전개시키는 공리적 방법의 의의를 이해하게 되며, 공리적 체계 내에서 정리를 형성할 수 있다. 학생들은 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 사이의 논리적인 차이점을 인식하며, 연역적 추론을 완전하게 이해하여 상당히 난해한 수준의 증명을 구성할 수 있다.

제 5 수준은 엄밀한 수학적 수준으로서, 대상의 구체적 성질이나 대상들 사이의 관계의 구체적 의미가 사상된다. 즉 여러 가지 구체적 해석을 떠나서 진행하는, 여러 수학 체계에 대하여 형식적으로 추론할 수 있는 수준이다. 또한 구체적 모델을 참고하지 않고 기하를 연구할 수 있으며, 공리, 정의, 정리 등의 문장을 형식적으로 다룸으로써 추론할 수 있다. 다양한 공리 체계와 논리 체계에 대한 논의의 가치를 이해할 수 있으며, 다양한 수학 체계 안에서 가장 엄밀한 방식으로 추론할 수 있다. 수학적 구조를 잘 이해하며, 구조에 관한 고차원적 수준의 명제를 정당화할 수 있는 등 전문적인 수학자의 수준이라고 할 수 있다.

van Hiele에 따르면, 도형을 확인함에 있어서 시각적 수준(제 1 수준)과 분석적 수준(제 2 수준)의 학생들의 추론은 상당히 다르게 나타난다. 시각적 수준의 학생들은 관찰에 근거해서 판단하는데, 그 판단에는 아무런 이유가 없으며 단지 그렇게 보기 때문에 판단한다. 그러나 시각적 이미지는 분석적 수준의 학생들에게는 판단의 기초가 되지 못한다. 예컨대 마름모 그림

이 다소 불완전하게 그려진다 하더라도 분석적 수준의 학생들은 그림을 그리는 사람의 의도는 모든 변의 길이가 같게 그리는 것임을 확신하며 그림의 불완전함에 별로 동요되지 않는다. 분석적 수준에서 도형이 성질의 모임으로 고려되면, 그 다음의 관계적 수준에서는 도형과 다른 도형의 관련성이 결정되고 반성된다.

관계적 수준(제 3 수준)에서는 명제 A와 B 사이의 연결, 즉 A와 B사이에 어떤 관계가 성립하는가가 중요한 문제로 부각되는바, 명제들 간의 연결과 더불어 관련성으로 충만한 관계망이 구축된다. 이러한 관계망을 구축하기 위해서, 즉 한 도형의 여러 성질간의 관련성과 여러 도형간의 관련성을 맺기 위해서는 명제들을 조직해야 한다. 명제들을 조직하기 위한 용어가 발달함에 따라 관계망의 본질적인 아이디어에 대해 다른 사람과의 의사교환이 가능하게 되는데, 바로 이 지점에서 명제들의 조직화를 가능하게 하는 것으로서의 연역적인 방식, 즉 증명이 필요하게 된다. 한 도형의 여러 성질 사이의 관련성이나 여러 도형의 성질들간의 관련성을 구축하려는 필요성이 생길 때, 비로소 증명의 필요성이 생겨나는 것이다. 따라서 연역적 추론은 관계망 없이는 불가능하며, 관계망은 증명의 필연적인 전제 조건이라고 할 수 있다.(van Hiele, 1986, pp. 110-112)

van Hiele의 수준 이론을 살펴보면, 우리 나라 교육과정의 중학교 기하 단원에서 다루어지는 증명은 제 3 수준과 제 4 수준 사이의 사고를 필요로 하고 있음을 알 수 있다. 따라서 증명이 의미있는 학습 주제가 되기 위해서는 적어도 제 3 수준의 학생들을 대상으로 이루어져야 한다. 실제로 van Hiele의 수준 이론에 대한 후속 연구들은, 주로 학생들의 사고 수준을 조사하였으며 학생들이 증명 학습을 시작할 때의 사고 수준과 증명 학습에서의 성취도 사이의 관계를 보고하였다. 예컨대 Senk(1985)는 제 1 수준에서 증명 학습을 시작하는 학생들은 15%의 증명 성공률을, 제 2 수준에서 증명 학습을 시작하는 학생들은 20%의 성공률을, 그리고 제 3 수준의 학생들은 85%의 증명 성공률을 보인다고 보고하였다.

또한 van Hiele 이론에 비추어 보면, 증명의 교수/학습이 성공적으로 이루어지기 위해서는 여러 가지 사전 활동들이 전제되어야 함을 알 수 있다. 증명 학습이 '증명'이라는 용어를 도입한다고 해서 의미있게 이루어지는 것은 결코 아니며, 도형을 관찰하고 도형의 성질들을 학생들 스스로 분석하는 등의 다양한 경험을 토대로 했을 때 비로소 의미있는 증명 학습이 이루어진다는 것이다. 더욱이 한 도형의 여러 성질 사이에 그리고 여러 도형 사이에 어떤 관련성이 있는가를 탐색하는 과정에서 증명의 필요성을 자연스럽게 도입함으로써 학생들을 동기유발시키는 것이 바람직하다.

III. Freudenthal의 수학화 지도론

Freudenthal에 따르면, 수학적 개념·구조·아이디어 등의 본질(nooumenon)은, 물리적, 사회적, 정신적 세계의 현상(phainomena)을 조직하기 위한 수단으로 발견되어 왔다.[1)]

1) Freudenthal은 '본질'이라는 용어를 독특하게 사용한다. 일반적인 의미에서 'X의 본질'이라고 했을 때는 X에서 가장 핵심적인 부분을 의미하는바, X를 파악할 때 반드시 고려해야 하는 결정적인 부분을 말한다. 반면에 Freudenthal은 함수, 군 등을 '본질'이라는 용어로 나타내는데, 함수나 군이라는 '본질'은 함수나 군이 발생한 '현상'과 대조되는 것이다. 따라서 '본질'이라는 용어를 해석함에 있어서 일반적인 의미일 때와 Freudenthal이 사용할 때를 구분해서 파악해야 한다.

> 수학적 개념, 수학적 구조 또는 수학적 아이디어의 현상학이란, 이러한 본질을 그 본질이 조직되는 어떤 현상과 관련지어 기술하는 것으로서, 조직화의 수단으로서의 본질이 어떤 현상을 조직하기 위해 만들어졌는지, 그리고 본질이 어디까지 확장될 수 있는지, 본질이 현상에 어떻게 작용하는지, 본질이 현상에 대해 어떠한 힘을 우리에게 부여하는지를 나타내는 것이다. 교수학적 현상학이란, 이러한 본질과 현상의 관계에서 교수학적 요소를 강조하는 것, 즉 본질과 현상의 관계가 교수/학습 과정에서 어떻게 획득되는가에 주목하는 것을 말한다.(Freudenthal, 1983, pp. 28-29)

Freudenthal은 이러한 자신의 주장을 '교수학적 현상학'으로 이름하였는바, 교수학적 현상학은 간단히 말해서 수학적 개념과 구조라는 본질을 그 본질이 조직의 수단으로 작용하는 어떤 현상과 관련하여 기술하고 교수학적으로 적용하는 것이라고 할 수 있다. 그는 수학을 현상이 그것을 정리하는 수단인 본질로 조직되고, 그 본질은 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 끊임없는 재조직화의 과정으로 설명하였다. Freudenthal은 현상을 본질로 조직하는 이러한 과정을 '수학화'로 이름하였다. 또한 수학적 활동의 결과로서의 기성 수학과, 수학화 활동에 초점을 둔 실행 수학을 구분하면서, 학생들이 학습해야 하는 수학은 바로 실행 수학이라고 주장하였다.

따라서 Freudenthal은 수학의 본질을 지도하기 위해서, 그 본질이 조직의 수단이 되는 현상을 제시해 줄 것을 권고하였다. 수학 교수/학습에 있어서, 학습자의 현실에서 수학화에 적절한 학습 상황을 선택하여, 조직되어야 할 현상으로부터 출발하여 본질에 이르도록 해야 한다는 것이다. 여기에서 학습자의 실제란, 학습자가 상식에 입각하여 자명한 것으로 받아들이는 것인바, 실제는 학습자에 따라 그 수준과 종류가 다를 수 있다. 그는 현상으로부터 본질에 이르도록 하는 방향과는 반대로, 본질을 단지 학습자에게 부과하는 접근 방식을 '반교수학적 전도'라는 이름으로 비판한다. 이러한 Freudenthal의 교수학적 현상학, 즉 수학화 지도론은 기하 영역에도 그대로 적용된다.

> 기하 지도는 공간내의 현상을 수학적으로 조직하는 것으로부터 시작되어야 한다. 그런데 모든 기하 교육과정은 수학적으로 조직된 제재를 가지고 시작한다. 따라서 학생은 비수학적 제재를 수학화하는 방법을 학습할 좋은 기회를 박탈당하고 있다. 학생이 기하 도형을 이해하게 되면 그 학생은 그것을 조직할 수 있다. 예컨대 여러 가지 평행사변형을 관찰한 학생은 [평행사변형의 정의를 제시받지 않고서도] 평행사변형이 무엇인가를 이해할 수 있게 된다. 그러나 대부분의 교육과정에서 교사가 평행사변형의 형식적 정의를 일방적으로 학생에게 전달한다. 이렇게 되면 학생은 그 정의를 발명할 기회를 박탈당한다.(Freudenthal, 1973, p. 124)

Freudenthal은 증명 교육의 실패를 학교 기하가 충분히 연역적이지 않은 데서 그 원인을 찾는 것은 잘못된 발상이라고 비판하면서, 기하 교육이 실패한 것은 학생들에게 연역을 재발명 방법으로 지도하지 않고 강제로 부과했기 때문이라고 주장하였다. 연역 체계로서의 기하는 학생들에게 인간 정신의 위력을 느끼게 할 수 있는 최상의 수단이기는 하지만, 이것이 지나쳐서 학생들에게 정신적 열등감을 심어주어서는 안된다는 것이다.

Freudenthal은 공리 체계를 더욱 굳건하게 함으로써 기하를 지도하고자 하는 시도를 반교수학적 전도로 비판한다. 학생들에게 형식화된 공리적 장치를 주입하는 것은, 학생들을 미리 정의된 제한된 체계 내에서만 조작하도록 하는 것이다. 이것은 실제의 자극에 전혀 적응하지

못하는 온실 수학을 학생들에게 지도하는 결과를 초래하며, 기하를 미리 조립된 형태로 학습시키는 것은 기하를 질식사시킨다는 것이다. Freudenthal은 이러한 공리적 독단주의로부터 학습자로부터 보호해야 한다고 주장한다.

그러므로 Freudenthal에게서 공리와 정의로부터 시작하여 연역적 증명을 부과하는 교수법은 반교수학적 전도에 해당된다. 전통 기하에서는 심지어 정의가 무엇인가를 정의하기도 하는데, 정의해야 할 것이 무엇인가를 알기 전에 정의한다는 것은 교수학적으로 의미가 없다. 수학에서 정의는 연역 사슬에서 연결 고리에 해당하는바, 단지 의미하는 바를 설명하기 위해 정의를 제시하는 것은 아니다. 따라서 교사가 모든 개념의 정의를 제시하는 것은 학생들이 스스로 정의하는 기회를 막는 것이 된다.

> 아동이 마름모와 평행사변형이 무엇인가를 [암묵적으로] 알고 있다면, 아동은 마름모와 평행사변형의 성질을 시각적으로 발견할 수 있다. 예컨대, 평행사변형의 대변은 평행하고 길이가 같고, 대각의 크기가 같으며, 이웃하는 두 내각의 합은 180° 이고, 두 대각선은 서로를 이등분하고, 대칭의 중심을 갖으며, 합동인 두 개의 삼각형으로 분리될 수 있으며, 합동인 평행사변형으로 보도를 포장할 수 있음을 시각적으로 발견할 수 있다. 이러한 시각적 특성들은 조직화를 필요로 한다. 연역은 바로 이러한 시점에서 시작하는 것이다. 연역은 부과되는 것이 아니라 논리적 조직화 과정에서 자연스럽게 드러나게 된다. 예컨대, 평행사변형의 여러 성질은 서로 관련되어 있으며, 이들 중 어느 하나가 다른 것들을 이끌어 내는 기본 성질이 된다. 그래서 정의가 도입되는 것이다. 이렇게 되었을 때 정사각형이 왜 마름모가 되는지, 마름모가 왜 평행사변형이 되는지가 분명해진다. 이런 과정을 통해 학생은 정의하는 법을 배우고, 정의란 그것이 기술하는 것 이상을 의미한다는 것, 즉 정의는 대상의 여러 성질에 대한 연역적 조직화의 수단이라는 것을 경험하게 된다.(Freudenthal, 1983, p. 417)

이러한 Freudenthal의 주장은, 도형의 여러 가지 성질에 대한 탐색으로부터 성질들을 조직할 필요성이 생김으로써 연역적 방식이 자연스럽게 드러날 때 비로소 정의를 도입하고 증명을 통해 여러 성질들을 관련지어야 하는 것으로 해석할 수 있다. Freudenthal에게 있어서 증명을 포함한 연역적 방식은, 현상으로 나타나는 도형의 여러 성질들을 조직하기 위한 수단인바, 이러한 주장은 van Hiele의 주장과 일맥상통하는 것이다.

Freudenthal은 기하를 지도하는 진정한 방식은 학생들이 기하를 활동으로 경험하게 하는 것, 즉 학생들로 하여금 기하를 재발명하도록 하는 것이다. 학습자의 실제로부터, 그리고 증명이 조직화를 위한 수단으로서 요구되는 현상을 학생들에게 제시함으로써 증명이 자연스럽게 도입되도록 해야 한다는 것이다. Freudenthal이 학생들로 하여금 기하를 재발명하는 데 있어서 중심적인 활동으로 제안하는 것이 바로 국소적 조직화 활동인바, 국소적 조직화는 전체적 조직화와 대비되는 개념이다.

> 전체적 조직화는 기하의 전체 영역을 정의와 공리로부터 출발하는 공리 체계로 조직하는 것이다. 반면에 국소적 조직화는 공리에서 출발하는 것이 아니라 학습자가 접하고 있는 영역에서 참이라고 인정되는 사실, 즉 학습자의 실제로부터 시작해서 부분적으로 조직화하는 것을 말한다. 전문적인 수학자들이 수학을 창조하고 적용할 때 행하는 활동이 바로 국소적 조직화 활동이다.(Freudenthal, 1973, p. 73)

그러므로 Freudenthal의 수학화 지도론에 따른 바람직한 증명 지도 방향은, 공간의 여러 현상을 도형으로 조직화하여 도형의 성질들을 발견하도록 한 다음에, 그런 성질들을 조직하는

수단으로서 정의를 도입하고 그 성질들을 증명을 통해 국소적으로 조직화함으로써 학생들 스스로 명제를 만들어 보도록 하는 것이다. 이렇듯이 증명은 국소적 조직화 활동을 통해 그 필요성이 자연스럽게 부각되며, 이렇게 지도된 증명만이 수학적인 '안목'이 되며 생활 및 과학의 도구로서 실제적인 응용성을 갖게 된다. 따라서 학생들에게 전체적으로 조직화된 형식적인 수학을 제시할 것이 아니라, 학습자의 수학적 실제로부터 부분적으로 조직화하는 국소적 조직화 경험을 통하여 조직화의 수단으로서의 증명의 필요성을 인식하고 증명의 의미를 이해하게 하는 활동이 이루어져야 한다. 국소적 조직화 활동을 통해, 학생들에게 수학의 명제는 논리적으로 서로 관련되어 있고 서로 다른 것에 종속된다는 개념을 지도하는 것이 중요하다. 정의로부터 시작하여 형식적 구조를 지도하는 현재의 방법은 그 원시적인 틀이 어디에서 유래된 것인가를, 다시 말해서 수학자들이 연역 체계를 왜 그리고 어떻게 창조하고 있는가를 학생들에게 전혀 설명해 주지 못한다.

IV. 맺으며

이상으로 van Hiele와 Freudenthal의 이론을 중심으로 증명 지도의 문제를 고찰하였다. 이하에서는 van Hiele의 기하 사고 수준 이론과 Freudenthal의 수학화 지도론이 증명 교육에 시사하는 바를 재정리하며 본 연구를 맺고자 한다.

첫째, '정의-정리-증명'의 순서로 진행되는 현재의 증명 교육을 재고할 필요가 있다. Freudenthal은 수학의 역사와 수학자들의 실제적인 수학적 활동에 대한 고찰을 통해, 정의는 처음부터 제시되는 것이 아니라 여러 명제들을 연결하기 위한 연역의 고리로서 가장 나중에 필요한 것이며, 증명은 여러 성질들을 조직하기 위한 활동이며, 정리는 이러한 조직화 활동의 결과물임을 주장하고 있다. '정의-정리-증명'의 순서로 이루어지는 증명 교육은, 지식의 자연스러운 발생의 순서를 거꾸로 뒤집는 오류를 범하는 것이다. 이는 학생들에게 진정한 수학적 사고 활동으로서의 증명을 지도하지 못하고 증명의 기록에 불과한 기성의 수학을 단지 외부적으로 부과함으로써, 형식적이고 빈약한 증명 교육을 고착시킬 위험이 있다. 따라서 수학화의 도구로서 연역을 재발명하는 학습이 이루어지도록 학생들을 격려해야 하며, '정의'보다는 '정의하기'를 '증명'보다는 '증명하기'를 학생들이 경험할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

둘째, 증명을 본격적으로 지도하기에 앞서 학생들로 하여금 도형을 관찰하고 도형의 여러 가지 성질을 발견하고 그 성질들 사이의 관련성을 파악하는 등 다양한 활동을 경험하도록 해야 한다. van Hiele의 기하 사고 수준 이론과 Freudenthal의 수학화 지도론에 대한 고찰을 통해, 증명 학습이 증명이라는 용어를 도입하면서 의미있게 시작될 수 있는 것은 결코 아님을 확인하였다. 다시 말해서, 바람직한 증명 학습은, 증명이라는 용어를 설명하기 훨씬 이전부터 도형을 관찰하고, 도형들 사이와 여러 성질들 사이의 관련성을 탐색하여 조직하는 다양한 활동에 근거하며, 이를 바탕으로 증명의 본질을 점진적으로 이해해 나갈 때 비로소 의미있게 이루어진다. 따라서 증명을 의미 있게 내면화하기 위해서는 증명을 본격적으로 지도하기에 앞서 다양한 활동이 풍부하게 전제되어야 한다. 초등학교 때부터 도형을 지도할 때, 가능한 한 학생들로 하여금 도형을 관찰하여 도형의 성질을 발견하고 관련성을 파악할 수 있도록 지도하는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

참고 문헌

우정호. (1994). 증명 지도의 재음미. 대한수학교육학회 논문집, 4, 1, 3-24.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In Douglas A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 420-464.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 401-511.

____________. (1978). *Weeding and Sowing: A Preface to a Science of Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

____________. (1981). Major Problems in Mathematics Education. Educational *Studies in Mathematics*. 12, 33-150.

____________. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

____________. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Senk, S. L. (1985). How Well do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher*, 378, 6, 448-456.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. Orlando: Academic Press.

A Study on the Proof Education in the Middle School Geometry

- Focused on the Theory of van Hiele and Freudenthal -

Na, Gwi-Soo

This study deals with the problem of proof education in the middle school geometry by examining van Hiele's geometric thought level theory and Freudenthal's mathematization teaching theory. The implications that have been revealed by examining the theory of van Hiele and Freudenthal are as follows.

First of all, the proof education at present that follows the order of 'definition-theorem-proof' should be reconsidered. This order of proof-teaching may have the danger that fix the proof education poorly and formally by imposing the ready-made mathematics as the mere record of proof on students rather than suggesting the proof as the real thought activity. Hence we should encourage students in reinventing 'proving' as the means of organization and mathematization.

Second, proof-learning can not start by introducing the term of proof only. We should recognize proof-learning as a gradual process which forms with understanding the meaning of proof on the basis of the various activities, such

as observation of geometric figures, analysis of the properties of geometric figures and construction of the relationship among those properties. Moreover students should be given this natural ground of proof.