大韓數學教育學會 論文集 第 8 卷 第 1 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.1, 137-144. July 1998

수격자점을 꼭지점으로 갖는 정육면체의 개수
- 지오보드의 활용 -

이 만 근*

Ⅰ. 서론

오늘날의 문제해결력 운동의 정신적 지주는 George Polya(1887-1985)이다. 그는 뛰어난 수학자이며 수학교사이었다. 특히 그는 자신의 저서 '어떻게 문제를 풀 것인가(How to solve it)'를 통하여 문제 해결력 향상을 위한 지도방법을 역설하였고 '수학적으로 사고하도록 가르치는 것'이 수학교육의 목적이라고 주장하였다.

그러나 최근의 문제해결력에 대한 연구 경향은 초기의 설정 방향과는 약간은 다르게 진행되고 있는 것 같다. 곧, 이 분야의 연구도 다른 학문 분야처럼 "구조", "단계", "전략" 등의 수사적인 학문용어와 '어떻게 생각하는가?' 또는 '어떻게 하면 인지능력을 발달시킬 수 있는가?' 등에 집중되고 있는 경향이 있다. 물론 학생이 문제해결을 위하여 무엇을 생각하고 있으며, 문제해결과정의 각 단계는 어떠한가를 분석하고 그것들의 구조를 찾아내는 것은 굉장히 중요한 일이라고 할 수 있다. 그러나 적어도 Polya의 관점에서의 문제해결 전략은 학생이 수학을 느끼고 맛보도록 하는데 초점이 맞추어져 있다고 할 수 있다. 곧, 수학적 사고가 학문적인 연구 대상이 될 수는 있겠지만 그 연구결과로 수학적 사고능력을 증진시키는 것보다는 구체적인 수학 문제를 해결해 가는 과정에서 수학적 사고능력을 향상시키는 것이 더욱 효과적이라는 것이다. 그는 자신의 저서 How to solve it의 서문에서 자신의 학생 시절을 다음과 같이 회상하고 있다.

「회상해 보건대, 학생 시절의 필자는 수학과 물리에 대하여 조금이라도 더 이해하려고 열망하는 비교적 야망에 찬 학생이었다.

강의도 듣고, 책도 읽고, 제시된 해답과 사실을 받아들이려고 노력도 해 보았지만, 계속하여 나 자신을 불안스럽게 하는 다음과 같은 의문이 있었다.

"그렇다. 해답은 맞은 것 같고, 정확한 듯이 보인다. 그러나 어떻게 해서 그러한 풀이를 고안할 수 있는 것일까?

그렇다. 이 실험은 잘된 것 같고, 사실과 일치하는 듯 하구나. 그러나 어떻게 해서 그러한 사실을 발견할 수 있게 되는 것일까?

그리고, 나라면 어떻게 해야 그러한 것들을 스스로 발견하거나 발명할 수 있는 것인가?"」

수학적 발견술이 Polya의 창작이 아니며 이미 오랜 과거를 갖고 있었다는 사실은 잘 알려진 것이다. 이러함에도 문제 풀이 과정의 동기와 절차에 대하여 이해하려는 관점에서의 폴리아의 새로운 저술은 큰 공감을 얻게 된 것이라 할 수 있을 것이다.

---

* 동양대학교

이러한 Polya적 관점에서 살펴보면 수학교사가 수학을 느끼고 맛보는 것은 무엇보다도 중요하다고 할 것이다. 수학을 혐오하거나 수학의 즐거움을 맛보지 못한 교사는 수학이 즐거움이 될 수 있다는 사실을 학생들에게 알려줄 수 없으며 오히려 무의식중에 수학에 대한 자신의 생각을 학생들에게 이식하는 부작용을 낳게 될 수도 있다. 따라서 분명히 수학교사는 「수학 문제를 해결하는 즐거움」을 느껴야 하며 그러한 즐거움을 학생들에게 제공할 수 있는 문제를 끊임없이 찾고 개발해 나가야 할 것이다.

물론 어찌 수학이 즐겁기만 하겠는가?

프로야구 선수에게는 야구가 즐거운 순간도 있지만 숨막히는 긴장과 고뇌의 순간도 있을 것이다. 그러나 적어도 야구를 막 시작하는 학생들은 야구가 즐거워야 한다. 이들 중에 아주 극소수만이 프로야구 선수가 되는 것이며 나머지는 야구팬이 되기 때문이다.

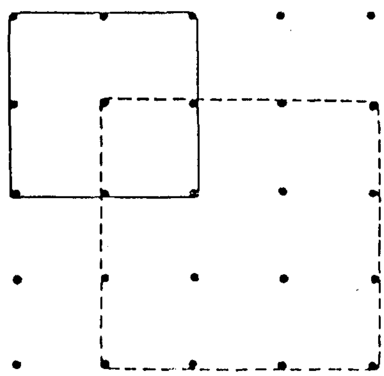
수학을 배우는 과정에서 수학을 어떻게 맛보도록 하는 것이 좋은 것인가에 대한 의견은 크게 두 가지로 다르게 나타나 있지만 각 주장 나름대로의 설득력과 약점이 있기 때문에 교사가 이를 적절히 혼용하는 것이 좋을 듯 하다. 곧, 「정리와 증명」의 체계로 구성된 수학은 논리적 엄밀성은 갖지만 흥미유발이 어려우며, 「발생상태 그대로」의 체계로 구성된 수학은 학습동기 유발에는 도움이 되지만 현실적 제한이 많이 있다는 것이다.

수학을 느끼도록 하고자 하는 여러 연구 중에 특히 Eugene F. Krause의 격자점을 꼭지점으로 갖는 정사각형의 개수에 대한 연구[2]가 눈을 끄는 것은 첫째로 소재가 단순하고 흥미로운 때문이며, 둘째로 장차 수학교사가 되고자하는 학생들의 반응에 대한 연구 때문이다. 특히 각 단계별 학생들의 반응을 기술함으로서 수학을 느끼는 과정을 이해할 수 있도록 한 점이 흥미롭다. Krause의 탐구과정을 조금 더 확장해 보고자 하는 시도에서 이 논문은 구상되었다.

Ⅱ. 격자점을 꼭지점으로 갖는 정사각형

Krause는 다음과 같이 학생들에게 익숙하면서도 특별한 수학적 배경 없이도 해결 가능한 첫 번째 문제를 제기하였다.

"4×4 지오보드 위에서 얼마나 많은 정사각형을 만들 수 있는가? (그림1)은 두 가지 예를 나타낸다.)"



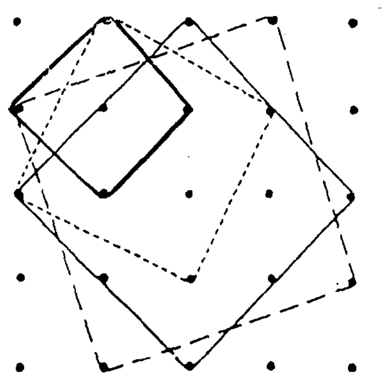
(그림1)

이에 대한 학생들의 반응은 다음 표와 같이 나타났다.

정사각형의 크기	개 수
1×1	$16=4^2$
2×2	$9=3^2$
3×3	$4=2^2$
4×4	$1=1^2$
계	30

(표1)

"이것보다는 많다"는 교사의 말에 다시 학생들은 다른 모양을 찾기 시작하고 "아하"라는 감탄사와 함께 새로운 (그림2)와 같은 사각형을 더 찾아내어 (표2)를 새로 얻는다.



(그림2)

정사각형의 크기	개 수
1×1	16
$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$	9
2×2	9
$\sqrt{5}\times\sqrt{5}$	8
$\sqrt{8}\times\sqrt{8}$	1
3×3	4
$\sqrt{10}\times\sqrt{10}$	2
4×4	1
계	50

(표 2)

이러한 형태의 사각형은 피타고라스 정리를 이용하여 한 변을 두 자연수의 제곱의 합꼴로 표현하는 것을 의미한다. 따라서 이 결과에 대하여 일부 영리한 학생들은 한 가지 의문을 갖게 되었다. (표2)를 (표3)처럼 나타내면 그 의문점은 보다 확실해 진다.

정사각형의 크기	개수
$\sqrt{1}\times\sqrt{1}$	16
$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$	9
$\sqrt{4}\times\sqrt{4}$	9
$\sqrt{5}\times\sqrt{5}$	8
$\sqrt{8}\times\sqrt{8}$	1
$\sqrt{9}\times\sqrt{9}$	4
$\sqrt{10}\times\sqrt{10}$	2
$\sqrt{16}\times\sqrt{16}$	1

(표3)

한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정사각형은 존재하지 않는가?

대수적으로 그 대답은 간단하다. 3은 두 제곱수의 합으로 표시될 수 없기 때문에 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 지오보드 정사각형은 존재하지 않는다. 따라서 이제 문제는 지오보드를 떠나서 추상적인 의문으로 바뀌게 된다.

"두 제곱수의 합으로 표현되는 자연수는 어떤 것들이 있는가?"

6, 7, 11, 12, 14, 15는 두 제곱수의 합으로 표시되지 않으므로 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$인 지오보드 정사각형은 존재하지 않는다. 또 $13=2^2+3^2$이므로 한 변의 길이가 $\sqrt{13}$인 지오보드 정사각형은 존재하지만 4×4 지오보드에서는 크기의 한계 때문에 나타나지 않음을 알 수 있다.

Ⅲ. 격자점을 꼭지점으로 갖는 정육면체

이제 앞서 살펴본 Krause의 결과를 3차원 공간에서 일반화시켜 가는 과정을 학생의 관점에서 생각해 보자. Krause는 자신의 논문[2]에서 다음과 같은 사실을 기술하고 있다.

<정리> 자연수 n이 두 완전제곱수의 합으로 표현되면, 2차원 평면에서 한 변의 길이가 $\sqrt{n}$인 격자점(지오보드) 정사각형이 존재한다.

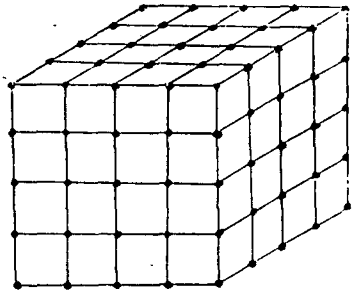
따라서 우리는 다음과 같은 추측을 할 수 있다.

<추측> 자연수 n이 세 개의 완전 제곱수의 합으로 표현되면, 3차원 공간에서 한 변의 길이가 $\sqrt{n}$인 격자점 정육면체가 존재한다.

이러한 추측을 하였어도 쉽게 참, 거짓을 판명하기는 어렵다. 따라서 우리는 제한된 3차원 공간에서 Krause와 같은 방법으로 정육면체의 개수를 구하는 과정부터 시작할 수 있을 것이다. 학생에게 제시할 수 있는 첫 번째 문제는 다음과 같다.

"4×4×4의 좌표공간에서 격자점을 꼭지점으로 갖는 정육면체를 얼마나 많이 만들 수 있는가?"

학생들은 쉽게 다음과 같은 결론에 도달할 수 있다.



(그림3)

정육면체의 크기	개 수
1×1×1	4^3
2×2×2	3^3
3×3×3	2^3
4×4×4	1^3
계	100

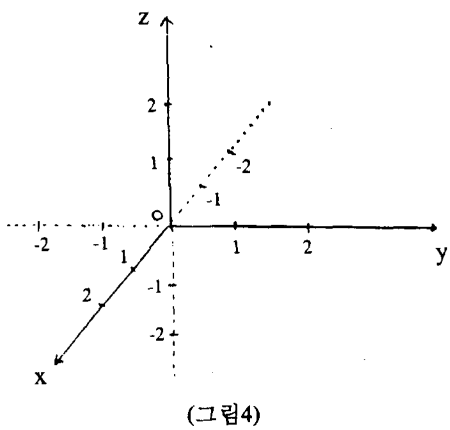
(표4)

이것은 (표1)과 대비하여 완벽한 규칙성을 갖게 되므로 학생들이 쉽게 받아 드릴 수 있다. 나아가 (표2)와 같은 방법의 다른 정육면체가 존재할 것이라는 추측이 가능하다. 그럼에도 3차원 공간은 2차원 평면처럼 그림으로 그려서 그 경우의 수를 따져 보기에는 너무나 어렵고 복잡하다. 3차원도형을 2차원평면에 나타내고자 하는 것이 무리가 아니겠는가? 따라서 대다수의 학생들은 더 이상의 것이 존재하리라는 추측을 인정하면서도 막연한 좌절감을 느끼게 된다. 이 때 우리는 자연스럽게 공간좌표 도입을 생각하게 될 것이다.

주어진 격자점들의 중심에 원점을 두고 좌표를 생각하면 각 점의 좌표 (a, b, c)는

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2$$

의 값 중에 하나를 갖는다. 곧 격자점의 전체 개수는 $5\prod 3 = 5^3$개이다. 이제 각 경우를 생각해 보기로 하자.



(그림4)

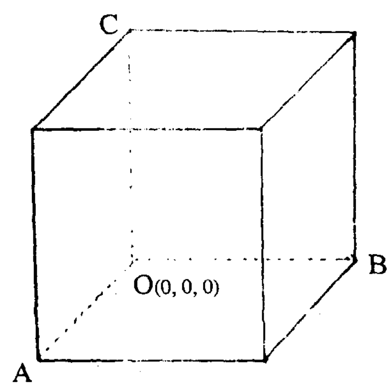
(경우 1) 한 변이 $\sqrt{1}$인 경우

이것은 $1\times1\times1$인 정육면체로 4^3개 존재함을 (표4)에서 알고 있다.

(경우 2) 한 변이 $\sqrt{2}$인 경우

$2=1^2+1^2+0$이므로 원점을 한 꼭지점으로 갖는 정육면체의 꼭지점 중에 세 점, 곧 (그림5)에서 점 A, B, C는 반드시 다음 좌표 중에 한 점이어야 한다.

(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1),
(-1, -1, 0), (-1, 0, -1), (0, -1, -1),
(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)
(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)



(그림5)

그런데 수직인 두 선분OA 와 선분OB로 이루어진 평면에 선분OC는 수직이어야 하므로

$$\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OB}=0,\ \overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OC}=0$$

을 만족하여야 한다. 따라서 A(1, 1, 0)라 하면 B(-1, 1, 0)이고 C(1, -1, 0)이어야 한다.

그런데 이 경우 선분OA ⊥ 선분OB, 선분OA ⊥ 선분OC는 만족하지만 선분OB ⊥ 선분OC가 성립하지 않으므로 모순이 된다.

또 다른 증명 방법으로는 벡터 외적을 이용할 수도 있다. 곧,

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OC}\ (k\text{는 상수})$$

이어야 하지만 실제로 계산해 보면

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\quad\text{또는}\quad\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(0,\ 0,\ 2)\qquad\text{또는}\qquad(0,\ 0,\ -2)$$

이므로 $k\overrightarrow{OC}$와 일치하는 경우가 생기지 않는다.

따라서 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 격자점 정육면체는 존재하지 않는다.

(경우 3) 한 변이 $\sqrt{3}$인 경우

$3=1^2+1^2+1^2$이므로 (그림5)에서 세 점 A, B, C의 좌표는 반드시 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ 중의 어느 하나와 일치한다. 이 경우

$$\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OB}=(\pm1,\pm1,\pm1)\circ(\pm1,\pm1,\pm1)$$
$$=(\pm1)+(\pm1)+(\pm1)$$
$$\neq0$$

따라서 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 격자점 정육면체는 존재하지 않는다.

(경우 4) 한 변이 $\sqrt{4}$인 경우

이것은 $2\times2\times2$인 정육면체로 3^3개 존재함을 (표4)에서 알고 있다.

(경우 5) 한 변이 인 경우 $\sqrt{5}$인 경우

$5=1^2+2^2+0$ 이므로 (그림5)에서 세 점 A, B, C의 좌표는 반드시 $(\pm1,\pm2,\ 0)$꼴이어야 한다.

물론 이 경우 좌표의 순서가 바뀌어 생기는 점도 생각하여야 한다.

이제 A(1, 2, 0)이라 하면 B(-2, 1, 0), C(2, -1, 0)이 되어야

$$\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OB}=0,\quad\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OC}=0$$

이 된다. 그러나 이 또한

$$\overrightarrow{OB}\circ\overrightarrow{OC}\neq0$$

이므로 세 벡터가 수직일 조건에 모순이 된다.

따라서 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 격자점 정육면체는 존재하지 않는다.

(경우 6) 한 변이 $\sqrt{6}$인 경우

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$이므로 (그림5)에서 세 점 A, B, C의 좌표는 반드시 $(\pm1, \pm1, \pm2)$꼴이어야 한다.

물론 이 경우 좌표의 순서가 바뀌어 생기는 점도 생각하여야 한다.

이제 A(1, 1, 2)라 하면

선분OA ⊥ 선분OB

를 만족하는 B가 이 경우에는 존재하지 않는다.

따라서 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$인 격자점 정육면체는 존재하지 않는다.

(경우 7) 한 변이 $\sqrt{7}$인 경우

7은 $a^2 + b^2 + c^2$의 꼴로 표현되지 않으므로 한 변의 길이가 $\sqrt{7}$인 격자점 정육면체는 존재하지 않는다.

(경우 8) 한 변이 $\sqrt{8}$인 경우

8도 $a^2 + b^2 + c^2$의 꼴로 표현되지 않으므로 한 변의 길이가 $\sqrt{7}$인 격자점 정육면체는 존재하지 않는다.

(경우 9) 한 변이 $\sqrt{9}$인 경우

$9 = 3^2 + 0^2 + 0^2$인 경우는 $3\times3\times3$인 정육면체와 같으므로 그 개수는 2^3개 존재한다.

또, $9 = 2^2 + 2^2 + 1^2$인 경우 (그림5)에서 세 점 A, B, C의 좌표는 반드시 $(\pm2, \pm2, \pm1)$꼴이어야 한다. 물론 이 경우 좌표의 순서가 바뀌어 생기는 점도 생각하여야 한다.

이제 A(2, 2, 1)이라 하면 B(-1, 2, -2), C(-2, 1, 2)라 정할 수 있고 이 경우

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$$

인 관계가 있음을 알 수 있다. 이 경우 다른 4개의 꼭지점을 찾아보면

(1, 4, -1), (0, 3, 3), (-3, 3, 0), (-1, 5, 1)

이 되어 주어진 $4\times4\times4$ 좌표공간에서는 이 정육면체가 존재할 수 없다. 특히 A, B, C의 좌표를 살펴보면 y축 방향으로 -1, -2, -3정도의 평행이동은 가능해 보이나 다른 4개의 꼭지점이 주어진 공간에 들어가지 않음을 확인할 수 있다.

(경우 10) 한 변이 $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$인 경우도 앞의 어느 한 경우와 같이 격자점 정육면체가 존재하지 않음을 알 수 있다.

이상의 결과로부터 다음 정리를 얻는다.

(정리) $4\times4\times4$ 좌표공간에서 격자점 정육면체는 100개 존재한다.

이 정리를 보면 대부분의 학생들은 다음과 같은 추측을 하게 될 것이다.

(추측) $n\times n\times n$ 좌표공간에서 격자점 정육면체는 $\sum_{k=1}^{n} k^3$개 존재한다.

이 추측이 참이 되려면 격자점 정육면체는 좌표축과 평행한 것만 존재하여야 한다. 그러나 (경우 9)에서 확인한 바와 같이 좌표축과 평행하지 않은 정육면체도 존재하므로 이 추측은 잘못된 것이다.

Ⅳ. k차원 공간에서 격자점 정사각형의 존재

4차원 입체를 그림을 그려 생각하는 것은 불가능하므로 이제 지오보드의 문제는 추상화되어 k차원에서 격자점 정사각형의 개수를 생각하는 단계로 접어들 수 있다.

<추측> k개의 완전 제곱수의 합으로 표현되는 자연수 n에 대하여 k차원 공간에서 한 변의 길이가 $\sqrt{n}$인 격자점 정사각형이 항상 존재한다. (k=2, 3, ⋯)

이 추측에 대한 몇 가지 구체적 예를 이용하여 참, 거짓을 판별해보면 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(정리) 위 추측은 k가 홀수이면 거짓이고, k가 짝수이면 참이 된다.

(증명) ① k=2인 경우는 Krause의 증명(논문[2]의 2장)으로 충분하다.

② k가 4이상의 짝수인 경우,

주어진 조건에 의하여

$$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2$$

으로 나타낼 수 있으므로

$O = (0, 0, \cdots, 0)$

$P = (a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k)$

$Q = (-a_2, a_1, \cdots, -a_k, a_{k-1})$

이라 놓으면

$$\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{OQ} = 0$$

이 된다. 이제 정사각형의 또 다른 꼭지점 R를 다음 조건

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (a_1 - a_2, a_2 + a_1, \cdots, a_{k-1} - a_k, a_k + a_{k-1}) = \overrightarrow{OR}$$

이 만족되도록 정의하면 사각형OPQR은 격자점 정사각형이 된다.

③ k가 홀수인 경우,

$n = k = 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2$인 경우를 반례로 생각할 수 있다.

이 경우 사각형OPQR의 세 꼭지점 O, P, Q의 좌표는

(0, 0, 0, ⋯, 0), (±1, ±1, ⋯, ±1)

중에 어느 하나와 같다. 따라서

$$\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{OQ} = (\pm1, \pm1, \cdots, \pm1) \circ (\pm1, \pm1, \cdots, \pm1)$$
$$= (\pm1) + (\pm1) + (\pm1) + \cdots (\pm1)$$

⇒ 홀수 개

$\neq 0$

따라서 사각형 OPQR은 직사각형이 될 수 없다.

Ⅴ. 결론

지오보드의 문제의 시작은 수학과 관계없이 퀴즈 형태로 시작된 것이다. 이것이 형태를 달리하면서 정사각형에서 정육면체로 또는 존재하는 차원을 달리하여 2차원 평면에서 3차원, 4차원 ⋯ 공간으로 확대되어 나가면서 자연스럽게 새로운 수학적 기호의 도입이 이루어진다. 이것은 학생들로 하여금 역사 발생적으로 수학을 경험하게 할 수 있는 좋은 소재라고 할 수 있다. 물론 눈으로 보이지 않거나 그림으로 나타낼 수 없는 것을 다루는 것은 굉장한 상상력이 필요하다. 그러나 이것을 다루는 방법에 익숙해지면 이 또한 어렵지 않다는 것을 배울 수 있을 것이다. 구체적 사실로부터 어떤 수학적 구조를 찾아내어 추상화하여 가는 과정을 학생들이 경험하면서 아직도 증명되지 않은 추측에 도달하였을 때 학생들이 느끼는 환희와 감격은

겪어 본 사람은 모두 이해할 것이다. 수학도 운동처럼 즐거운 취미가 될 수 있으며 산처럼 정복하고자 하는 도전욕을 느끼게 해 줄 수 있는 것이다. 따라서 학생들의 문제해결력을 증진시킬 수 있는 한 방안으로 우리는 이러한 실험적인 수학문제의 개발에 더욱 노력하여야 한다.

끝으로 이 논문에서 다룬 지오보드 문제를 일반화 시켜 가는 또 다른 한 방법으로 주어진 n×n 지오보드에서 격자점 직사각형의 개수의 규칙성을 찾는 것도 계속적인 연구대상이 될 수 있을 것이다.

참고문헌

Krause, E. (1974), A Formular of Newton. School Science and Mathematics, 74, 416-430

Krause, E. (1994), Sguares with Lattice-Point Vertices. Pythagoras, 33, 19-23

Krause, E. (1988), Sguares with Lattice-Point VerticesⅡ. To appear in Pythagoras

Krause, E. (1991), Mathematics for Elementary Teachers. Heath and Company

James W. Wilson, Maria L. Fernandez, and Nelda Hadaway (1993), Mathematial Problem Solving (Wilson, P.S (Ed). Research Ideas for the Classroom : High School Mathematics. New York : Mac Millan)

우정호 역(1986), 어떻게 문제를 풀 것인가?-Ploya, G. How to Solve It, 천재교육

정은실(1995), Polya의 수학적 발견술 연구, 박사 학위 논문, 서울대학교 대학원

Cubes with lattice-point vertices

Lee, Man-Keun

A common geoboard puzzel serves as the point of departure for an investigation that lends itself to whole-group discussion with a class of prospective secondary school teachers. Students are provided with opportunities to devise and carry out problem-solving strategies (called 'heuristics' by Polya); exploit inerrelationships among geometry, arithmetic and algebra; formulate generalizations and conjectures; plan and execute an computational project; construct mathematical arguments to establish theorems; and find counter-examples to dispose of a false conjecture.

In recent tears, Eugene F. Krause wrote two papers having the same title except for the numeral In that papers he arrives at an theorem about the sizes of squares with lattice point vertices in the coordinate plane, In this paper we follow a different path generalization to coordinate 3-space