大韓數學敎育學會 論文集 第 8 卷 第 1 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.1, 59-71. July 1998

# 이차함수와 타원의 문제해결 지도를 위한 멀티미디어 학습자료 개발*

김 인 수** 고 상 숙***
박 승 재**** 김 영 진*****

## Ⅰ. 서 론

근래 수학교육의 새로운 개혁의 방향은 크게 나누어서 다음 두 가지로 볼 수 있다.

첫째, 수학교육에서 문제해결력에 대한 중요성은 꾸준히 강조되어왔다.

수학교육의 개혁에 있어 선도적 역할을 하고 있는 미국수학교사협의회(NCTM, 1989)는 '학교수학의 교과과정과 평가의 규준'에서도 탐구와 조사를 통한 문제해결로서의 수학을 학생이 성취하여야할 교육과정 규준에 포함하였다. 이러한 규준이 제시하는 수학교육의 상은 학생의 창의적 사고력과 문제 해결력의 배양을 강조하며 학생이 학교를 졸업하고 사회에 진출한 뒤 현대의 고도로 발달한 과학기술과 정보화 시대에 적응하고 유용하게 활용될 수 있는 수학적 지식의 습득은 실제 문제장면에서 문제해결을 위한 다양한 활동을 통해서 이루어진다는 인지심리학적 학습이론을 배경으로 한 것이다. 그러한 수학교육에는 다양한 활동과 문제해결 과정에서 풍부한 경험이 필수적이다. 즉 최근에 수학교육에서는 학습자의 탐구활동, 실험과 관찰 등 구체적인 조작과 창의적 활동을 강조하고 있다.

둘째, 고성능 개인 컴퓨터의 보급과 학교 학습현장의 변화이다.

컴퓨터 관련산업의 급속한 발달은 수학교육의 내용과 방법에 변화를 주고 또 변화를 요구하고 있다. 고성능 컴퓨터가 현대사회의 모든 분야에 보급됨에 따라 폭넓은 수학적 지식이 필수적으로 요구되며 학교 수학에서 강조해야 할 내용도 변화해야 되는 필요성이 제기되고 있다. 과거에는 수학적 지식이 사회의 소수 엘리트와 학자들만의 것으로 생각되었지만, 과학과 산업이 고도로 발달한 컴퓨터 정보화 시대에는 더 많은 수학적 지식을 갖춘 인력을 거의 모든 분야에서 필요로 하게 되었다.

발달된 컴퓨터 소프트웨어는 학습 방법에 편리한 보조 수단을 제공하여 다양한 교수방법이 가능하게 되었다. 예전에는 설명이나 관찰이 어렵거나 불가능했던 것이 이제는 간단히 컴퓨터 모니터에서 살펴 볼 수 있으며 복잡하여 많은 시간이 걸릴 계산을 순식간에 해낼 수도 있다. 이러한 상황은 교수방법에 변화를 불러오게 되었고 이 변화를 지지해줄 많은 연구가 필요하게 되었다. 그러나 그 동안 CAI(Computer Assisted Instruction) 교육에 대한

* 이 논문은 1997년도 전남대학교 학술 연구비 지원에 의하여 연구되었음
** 전남대학교 사범대학 수학교육과 교수
*** 전남대학교 사범대학 수학교육과 강사
**** 전남대학교 사범대학 부속 고등학교 교사
***** 광주 교육 과학 연구원 파견교사

많은 연구와 개발된 프로그램들이 주로 훈련과 연습에 사용되어 왔으며[e.g., Jacobson, 1975; Roman, 1975; Roman & Laudato, 1974], 또한, 소프트웨어를 사용하는 현존하는 연구들[e.g., Bobango, 1988; Schwartz & Yerushalmy, 1987]은 역동적인 프로그램을 사용하지 않고 개념 위주의 수학학습 효과를 연구하는데 머물고 있다.

또한, 최근 국내 중등학교 현장에는 교육여건이 많이 향상되어 펜티엄급 컴퓨터, 43인치 대형 TV, 실물화상기 등이 갖추어지고 있다. 그러나 이러한 기기들이 교육 현장에 적절하게 사용될 수 있는 프로그램은 전혀 개발되지 않은 상태이고, 이 기기들은 GSP, MATHEMATICA 등 현존하는 프로그램을 학교현장에서 직접 사용하는 데는 여러 가지 여건(예, 과밀 학급, 영어본)에 비추어 부적절한 것으로 드러나고 있다. 또 다른 문제점으로는 교사들이 컴퓨터를 보조도구로 사용할 때 컴퓨터와 관련된 지식의 부족, 교육 효과를 위한 수업준비(예, 문제해결력을 위한 수업지도)와 연구부족을 들 수 있다. 그러므로 새로운 컴퓨터 수학학습 프로그램은 일종의 학습도구로서 컴퓨터를 교사와 학생 사이에 놓음으로써 문제해결을 목적으로 하는 새로운 형태의 교수-학습 방법을 제공할 수 있어야 하고 대다수 교사의 컴퓨터와 관련된 지식의 부족을 해소하고 그들의 수업준비에 대한 부담을 줄일 수 있는 교수법에 대한 모형의 개발이 절실히 필요하다.

본 연구에서는 이차함수와 타원의 개념에서 컴퓨터가 문제해결 능력을 키우기 위해 학습의 도구로서 사용되어 교과과정의 목표로서, 교수법의 전략으로서, 수학의 필수적 핵심으로서, 그리고 행하는 수학의 과정으로서의 탐구학습의 특성에 따라 수학 내용을 분석하고 이 분석을 토대로 효과적인 문제해결 학습지도를 위한 프로그램 개발을 목적으로 한다.

## II. 연구의 이론적 배경

### 가. 시각화

우리는 학교수학의 많은 개념과 과정을 쉽게 시각적 해석과 연결할 수 있고, 기저를 이루는 수학적 구조를 반영하여 시각적 모델을 세울 수 있다. 예를 들면 두 미지수를 지닌 선형방정식의 해는 두 직선의 교점으로서, 한 미지수로 된 연속함수의 근은 함수의 그래프가 x축과 만나는 점으로서, 또 양 함수의 적분은 면적으로서 나타낼 수 있다. 우리는 이러한 예들을 얼마든지 찾을 수 있지만 연구의 초점은 수학교육에서 시각적 모델링의 가능성으로부터 일어나는 문제를 해결하고 교수-학습적 잠재력을 증가시키는데 있다. 이러한 논의는 현장교실에서 증가하는 컴퓨터 사용의 효과가 시각적 표상과 그러한 시각적 표상에 대한 학생의 행동의 역량을 대폭 증가시키는 요즘 더욱 적절하게 이루어질 수 있다(Steen, 1987). 그 동안 시각화를 통한 수학교육의 반대 입장으로는 기본적인 시각적 개념 상(concept image)은 학생의 추상화 능력을 저해한다는 것이다. 예를 들면, 5학년 학생에게 분수를 가르칠 때 파이 차트(pie chart)를 생각하게 했다면 분수 곱셈과 비율을 어떻게 가르칠 것인가 하는 문제가 대두된다. 그래서 시각화 사용 목적은 학생으로 하여금 개념의 추상화로 인도될 수 있는 충분하고 풍부한 개념 상(concept image)을 성취하도록 돕는 것이 여야하고 중요한 것은 추상화로 가는 계단의 한 걸음으로 시각화가 어떻게, 어느 정도로 사용되어야 하느냐에 있다.

### 나. 문제해결

세계적으로 1980년대이래 문제해결 능력은

수학교육에서 관심의 대상이 되어 왔다. 미국 수학교사 협의회(National Council of Teachers of Mathematics)는 1980년대의 수학교육에 대한 "행동의 지침서'에서 다음과 같이 명시하였다.

> "문제해결은 학교 수학의 초점이 되어야 한다... 문제해결 활동의 개발에 열린 마음과 호기심과 탐구 태도는 기본적이다... 수학교사들은 문제해결이 활발하게 이루어지도록 교실환경을 조성하여야 한다. *(NCTM, 1980)*

최근에는 NCTM(1989)은 '학교수학의 교육*과정과 평가에 대한 규준*"에서 학생을 위한 새로운 목표로 문제해결 능력 개발을 강조하였고, Cooney (1988)는 "탐구와 조사의 정신은 수업에 깊숙이 스며들어야 하며... 교사들은 사려깊은 환경을 제공할 필요가 있다... 학생들은 조별로 그리고 개인별로 조사하고 탐구하는 수업의 과정에 적극적으로 참여하여야 한다... 교사는 단순한 지식의 전달자로서가 아니라 수업에 있어서 촉매자가 되어야 한다"고 교사의 역할을 명시하였다.

문제해결 활동을 통해 교사는 학생에게 문제해결을 위한 발견적 학습법의 다양한 목록을 제공할 수 있어야 한다. 그러나 학생이 언제, 왜, 어떻게 그들을 사용할 줄 모른다면, 또 학생이 그의 활동을 모니터하고 재고하는 의식적인 노력을 하지 않는다면 단순히 학생에게 발견적 학습법을 제공하는 것은 거의 가치가 없다. 여기서 수학 문제해결에 포함된 과정(processes)을 생각할 수 있고 뼈대를 설명하는 것은 중요하다. 가장 많이 알려진 것으로서는 Polya (1973)의 4단계 문제해결 방식이다. 즉 1) 문제 이해 2) 계획 설정 3) 계획 실행 4) 점검(돌이켜 보기)이다. Polya는 또한 문제해결을 '행하는 수학'의 중요한 주제로 생각하고 학생에게 기대했던 것을 말할 때, "학생들을 생각하도록 가르치는 것"이라고 강조하였다. "생각하는 법"(How to think)은 수학에서 활발한 조사와 문제해결을 지지하는 주제이다. 그러나 불행하게도 기울였던 많은 노력들이 "생각하는 법"을 가르치기보다는 "무엇을 생각할 것인가" 또는 "무엇을 할 것인가"로 변형되었는데 이는 문제해결에 있어서 절차상의 지식 습득만을 강조했기 때문이다. Suydam (1987)은 말하길:

> 만약 문제해결을 '절차를 적용하는 것'으로만 취급한다면 학생들은 관련된 문제에서 규칙 (rules)만을 따르려고 할 것이다. 만약 문제해결에 가능성이 있는 어떤 것을 생각해야하고 적용할 수 있는 모든 곳에 문제해결을 접근방법으로서 가르친다면 학생들은 덜 딱딱해할 것이다. *(p. 104)*

그래서 교사는 교수법으로서 문제해결을 기본적 사실, 개념, 절차를 배우는 학습목표뿐만 아니라, 문제상황에서 문제해결을 위한 학습목표를 달성하기 위해 사용할 수 있다. 특히, 수학*적 개념은 탐구와 발견학습을 통해 소개할 수* 있다. 학생들은 문제해결을 위한 학습활동으로부터 계산적 기술에서 연습, 식과 절차의 사용, *개념간의 관계성을 파악할 수 있는 기회* 등을 충분히 제공받을 수 있어야한다.

프로그램 고안에 있어서, 컴퓨터와 같은 인지적 도구를 Vygotsky (1978)는 학생들로 하여금 새로운 보조방법과 기호를 문제해결활동에 통합하여 사용한 학습환경에 의해 제공되는 대상이라고 설명했다. 컴퓨터 사용을 문제해결의 각 단계별로 살펴보면, 첫째 문제 이해단계에서는 컴퓨터의 다양한 기능은 학생이 문제의 문장이 무엇을 뜻하는지 이해하도록 돕는다. 예를 들면, 그래픽을 통해 컴퓨터로 문제 문장이 뜻하는 형상을 제시함으로써 학생들이 문제가 의미하는 것을 구체적으로 이해할 수 있도

록 도우며 문제해결에 없어서는 안될 부분을 형상화할 수 있다. 둘째, 계획 설정 단계에서는 컴퓨터는 학생들이 필요한 문제해결 방법(전략), 수학적 사실, 개념, 그리고 식들을 생각하도록 돕는다. 학생들은 그들이 지적으로 이해하였던 것에 기초하여 화면상에 제공되는 전략 중 자신들이 원하는 것을 이용할 계획을 수립할 것이다. 셋째, 계획 실행 단계에서는 선택한 전략에 따라 식을 세우고, 수치 자료를 구하여 구성된 형상을 통해 적절한 답을 구할 것이다. 특히 학생들은 그들의 능력을 뛰어넘는 복잡한 문제를 만났을 때, 컴퓨터의 위력 있는 기능을 사용할 것이다. 어떤 경우에는 그들이 추측했던 것을 증명하는 것은 문제해결을 찾는데 있어 중요한 역할을 할 수도 있다. 마지막 점검 단계에서는 컴퓨터 사용은 더욱 더 가치가 있다. 컴퓨터는 학생들이 구한 결과, 그들이 사용했던 방법 등을 점검하는 과정 중에 새로운 문제로 일반화할 수도 있다. 이것은 학생들에게 컴퓨터 사용이 수학교육에 있어서 가장 기대하는 것으로서 새로운 문제를 풀 수 있는 응용력을 배양한다.

문제해결의 4 단계 중 마지막 단계인 점검은 가장 중요한 단계일 것이다. 그것은 학생들로 하여금 문제로부터 배울 수 있는 중요한 기회를 제공하는 학생활동이다. Polya (1973)는 이 단계를 결과를 점검하고, 논쟁을 점검하고, 결과를 다르게 유도하고, 얻어진 결과와 방법을 다른 문제에 대해 사용하고, 문제를 재해석하고, 결과를 설명하고, 풀 수 있는 새로운 문제를 제시할 수 있는 등의 활동으로써 수업에서 답을 조사하는 충언적 역할을 하는 단계라고 중요성을 주장했다. 그러나 수업에서 점검의 특성을 학생들과 개발하는 것은 그리 쉽지 않다. 뿐만 아니라 많은 문제를 풀어야만 하는 현 교육과정에서는 학생들은 점검의 중요성을 인식하지 못한 채 문제해결과정을 끝내기 급급하다.

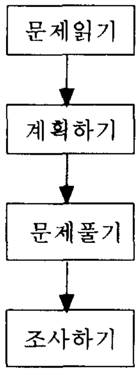


그림 1: 선형적 모델

설령, 교과서가 문제해결력을 키우기 위해 Polya의 문제해결 단계를 도입한다할지라도 선형적 (linear) 모델(그림 1 참고)로 제시되기 쉬운 정적이고 고정적인 지면상의 한계가 있다. 이러한 모델은 선형적이므로 문제해결을 밟아가야 하는 단계의 시리즈로 간주하게되어 각 과정을 외워야하는 절차로서 인식하게 하고 해답 구하기만을 강조하는 단점이 있다. 그러나, 문제해결의 4단계 과정은 수직적으로 또는 순서적으로 진행되는 것은 아니다. 예를 들면, 계획설정 단계에서 학생들이 어떤 미비한 점을 느낄때 문제이해 단계로 다시 돌아가 문제를 정확히 이해하도록 힘쓴다. 또 계획실행단계에서 그들의 처음계획이 적절치 않음을 깨달았을 때 다시 계획설정단계로 가서 새로운 계획을 찾도록 노력한다. 즉 이 네 단계는 항상 수직적인 관계가 아니고 진동하며 상호 보완하는 관계이다. Wilson, Fernadez, & Hadaway (1993)에 의해 문제해결의 4단계를 그림 2와 같이 묘사할 수 있는 것처럼 역동적인 컴퓨터 프로그램은 이러한 특성을 살려 효과적인 탐구학습을 수행할 수 있게 한다. 즉, 적절한 컴퓨터의 사용은 역동적이고 순환적인 Polya의 4단계 문제해결 방법과 역동성을 지닌 컴퓨터의 성격이 원활하게 상호작용 함으로써 학생들의 문제해결 능력을 키우는 데 결정적인 역할을 할 것이다. 그래서 교사는 앞서 Cooney가 말했듯이 학생 중심의 열린 수업을 진행하기 쉬워진다.

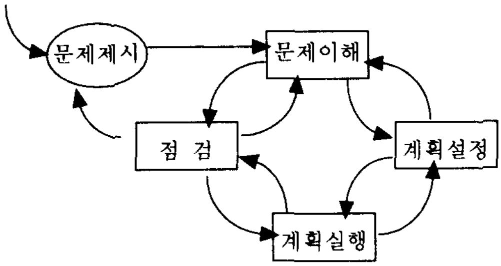



그림 2: 문제해결 과정

## III. 본 론

### 가. 연구방법과 절차

본 연구는 컴퓨터를 수학학습 보조도구로 사용하여 효율적인 중등학교 학생들의 문제해결 능력을 개발하려는 것이 목적이므로 다음과 같은 순서로 실시되었다.

(1) 관련 문헌의 수집과 분석
(2) 수학학습 내용 분석
(3) 컴퓨터 프로그램 개발
(4) 구안된 프로그램의 분석 검토

위의 연구 과정에 따라 고차식 함수의 기본을 이루는 이차함수의 그래프와 거의 내용이 자세하게 다뤄지지 않아 학생의 이해도가 부족한 타원이 중등학교 수학교과 과정에서 컴퓨터 활용을 통한 탐구학습이 효과적일 수 있는 연구 내용으로 선택되었다. 각각은 아래 표에서 처럼 두 session으로 구성되었다.

| 이차함수 | 타원 |
| --- | --- |
| *개념과 원리의 탐구학습<br>*문제 상황에서 탐구학습 | *개념과 원리의 탐구학습<br>*문제 상황에서 탐구학습 |

본 프로그램은 시각화 효과를 통한 문제해결력을 높일 수 있도록 다음과 같이 몇 가지 주안점을 염두에 두고 "toolbook"을 사용하여 개발되었다. 개념과 원리의 탐구학습에서는 수학 개념의 정의를 바탕으로 프로그램을 구성하여 학생 스스로 탐구, 추측, 발견할 수 있도록 하였다. 이차함수 관계식에 따라 분류된 그래프에서 각 계수의 값을 다양하게 변화시켜봄으로써 다수의 표상을 통해 계수의 역할을 직관적으로 이해할 수 있게 하였고, 이차함수 최소, 최대에서는 정의역을 선택하고 선택한 정의역에 따라 최대, 최소 값을 탐구 조사하게 하였다. 타원에서는 두 정점으로부터 일정한 거리 합과 두 정점의 위치를 다양하게 선택하여 타원을 직접 역동적으로 그려보게 하여 타원의 정의를 학생 스스로 추측, 확인할 수 있고 그 정의에 입각하여 방정식을 세워봄으로 타원 이해의 추상화를 도왔다. 특히 컴퓨터 프로그램이 모든 것을 해결해주는 것은 아니므로 여기서 교사의 역할은 매우 중요하다. 그래프에 대한 이해를 돕기 위해 도표를 만들기, 최대, 최소 값을 구할 때 정의역의 적절한 제시, 수 개의 타원의 방정식을 선택된 값에 따라 구하기 위해 칠판의 활용, 그리고 본 내용을 몇 차시로 구성할 것인지 등등 교사는 프로그램을 효과적으로 활용할 수 있는 방법을 끊임없이 고려해야한다.

문제 상황의 탐구학습에서는 앞서 다룬 개념과 원리를 바탕으로 중요하고 기본적인 문제를 선택하여 컴퓨터 프로그램을 이용하여 할 수 있는 수학학습 활동을 추출하고 분류했다. 프로그램은 문제해결의 4단계를 표상들의 연결된 표현으로 진행하게 되는데, 학생들은 문제이해 단계에서 시각적 효과를 통해 문제를 이해할 것이다. 계획 설정 단계에서는 사용하려는 전략에 따라 학생 스스로 계획을 세운 후, 계획실행 단계에서 방법으로서는 수치자료 조사, 패턴에 의해

자료를 분석하고 해석하기, 추측하기, 식 만들기, 도형이나 도표를 수학적 개념과 연결하기, animation을 이용하여 수학적 개념 사이의 관계를 파악하기 등의 활동들이 포함된다. 특히 계획 설정 단계에서 학생들의 수준에 따라 전략을 선택할 수 있도록 프로그램은 문제해결에 필요한 전략들을 제시할 것이다. 크게는 일반명시전략과 과제명시(task-specific)전략으로 나누어지는데 컴퓨터는 학생들을 용이하게 과제명시전략으로 이끈다. 왜냐하면, 도형 사이 또는 개념 사이 관계를 쉽게 파악할 수 있는 컴퓨터와의 상호작용 때문이다. 프로그램 구성 시에 계획설정단계에서 중점을 두게 될 문제해결의 대표적인 전략으로서는 자료수집, 그림이용, 귀납적 또는 연역적 추론, 창조적 추론 등을 들 수 있다.

위의 연구과정에 따라

(1) 공동연구원과 매주 정기적인 세미나

(2) 각 연구원들의 전문지식을 최대한 활용

(3) 매월 진척된 연구 내용의 검토등의 절차에 따라 연구를 진행했다. 특히 본 연구는 현직 교사들의 참여로 현장에서 교수-학습의 문제점등을 연구과정에 충분히 반영함으로써 실질적인 교육 프로그램을 개발하여 미래 수학교육에 이바지하도록 하였다.

## 나. 연구내용

수학교육에 컴퓨터를 이용하는 것은 수학적 내용을 단순히 컴퓨터 모니터로 나타내는 일은 아니다. 본 연구에서는 중등학교의 실제 수학학습지도에서 컴퓨터의 역동적 특성을 살려 탐구학습을 할 수 있기 위해 다양한 기능을 가진 버튼을 장치하여 학생은 마우스를 클릭함으로 다수의 표상을 쉽게 관찰, 추측, 분석함으로 자신의 생각을 정리할 수 있다.

### 1. 이차함수의 그래프

#### 1) 개념과 원리의 탐구학습

이차함수 그래프 목차(그림 3 참조)에는 그래프를 유형별로 분류하여 놓아 학생이 필요한 부분을 마우스를 옮겨가면 Highlight 반응이 나타나고 그 위에 마우스를 클릭하면 화면은 원하는 그래프 유형으로 쉽게 이동하여 내용이 전개된다. 각 유형에서 상수 값을 다양하게(원하는 대로) 선택하고 또 이전에 선택한 상수 값에 따른 그래프들을 3 또는 5개까지 자취를 조사하고 그들을 비교할 수 있게 하여 학생의 탐구활동을 도왔다.

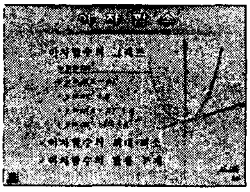


그림3 : 이차함수의 목차

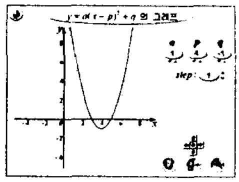


그림4 : 그래프 y=a(x-p)^2 +q

만약 식, $y=a(x-p)^2+q$를 학습하기원한다면 a 값, p 값, q 값을 선택한 s t e p의 간격에 따라 그래프를 볼 수 있으며 학생의 수준에 맞혀 아래 부분에 위치한 세 버튼 중 왼쪽 버튼을 필요에 따라 클릭 하면 프로그램은 3 또는 5개 까지 그래프를 보존하며 진행되므로 학생은 그래프에서 a, p, q 값의 역할을 탐구, 비교 조사할 수 있다(그림 4 참조). 버튼 중 가운데 위치한 버튼은 좌표 축의 위치를 원하는 곳으로 이동할 수 있게 되어있다.

또 세 번째 버튼은 좌표상의 눈금의 간격을 선택할 수 있게 되어있어 그래픽 산기의 zoom in 또는 zoom out 역할을 한다. 마우스는 좌표 상에서 1초 이상만 제자리에 머물면 마우스 위치의 점의 좌표 값을 제공하여

자료수집에 도움을 준다. 그래서 교사는 학생의 이해를 돕기 위해 x, y값의 도표를 쉽게 작성할 수 있다. 그러나 학생의 수준이 버튼 사용의 복잡성을 이해하기에 준비가 이뤄지지 않았다면 교사는 버튼 사용을 제한하여야한다. 반면 학생이 준비가 되어있다면 교사는 수시로 탐구활동을 요하는 질문을 제시하여 학생이 탐구, 조사, 추측을 통해 이차함수의 그래프 성질을 일반화할 수 있도록 도와야 한다. 다음, 이차함수의 최대, 최소를 처음 메뉴에서 클릭하면 그림 5 와 같이 정의역 (그래프 상에서 빨간 색 부분이 해당)을 정하고 a, b, c값을 선택한 후 같은 방법으로 마우스는 좌표 상에서 1초 이상만 제자리에 머물면 마우스 위치의 점의 좌표 값을 제공하므로 학생은 이차함수 그래프의 y값에서 최대, 최소를 탐구할 수 있다.

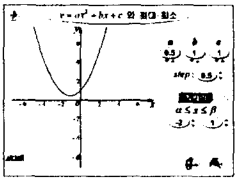
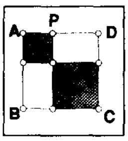


그림 5: 이차함수의 최대, 최소

2) 문제 상황의 탐구학습

이와 같이 탐구활동을 통해 이차함수 그래프를 이해한 후 문제해결력 향상을 위해선 이차함수를 활용하여 풀 수 있는 다음 문제가 선택되었다.




문제: 한 변의 길이가 10cm인 정사각형 ABCD에서 선분 AD위를 한 점 P가 움직일 때 정사각형 내부에 나타나는 두 정사각형의 면적의 합이 최소가 되는 선분 AP길이와 그 면적의 합을 구하여라.

이 문제에서는 Playa의 4단계 문제해결 단계인 첫째, 문제이해, 둘째, 계획설정, 셋째, 계획실행, 넷째, 점검을 프로그램에 이해, 계획, 실행, 점검의 네 버튼으로 화면의 왼 쪽 위에 배치하여 순환적이고 역동적인 문제해결과정의 특징을 살려 학생이 필요에 따라 문제해결 네 단계를 자유자재로 이동할 수 있도록 프로그램을 구성하여 교사가 학생들의 이해 상태를 쉽게 파악하며 수업을 진행할 수 있게 하였다. 문제 내용은 교사가 문제제시의 필요성을 느낄 때마다 문제 1위를 클릭만 하면 언제든 다시 볼 수 있도록 위에서 아래 방향으로 펼쳐 보여지게 장치 되어있다. 문제를 읽은 후 다시 마우스를 클릭하면 문제는 숨는 듯 내려왔던 위 방향으로 사라진다.

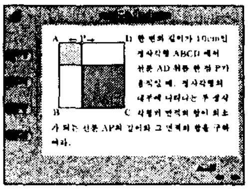


그림 6: 문제제시

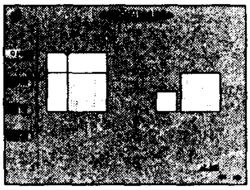


그림 7: 문제이해

문제이해로 가기 위해 버튼, 이해 위를 마우스로 클릭하면 이해 창구가 열려 학생은 컴퓨터의 시각화를 통해 문제를 이해한다. 문제이해 단계에서는 교사가 마우스를 점 P를 움직일 때마다 크기가 동시에 변화하는 두 정 사각형이 색과 크기의 대응을 보이며 화면의 오른쪽 위에 나타나게 되어 학생은 역동성을 지닌 다수의 표상을 통해 쉽게 문제를 이해할 수 있다.

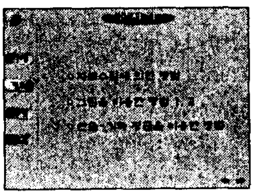


그림 8: 문제계획

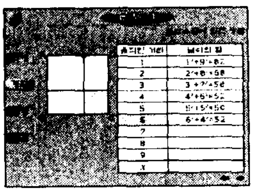


그림 9: 전략 1

문제 계획 단계에서는 그림 8에서와 같이 세 가지 전략이 제시된다. 교사는 학생의 수준에 맞는 전략 위에 마우스를 클릭한다. 자료수집에 의한 방법을 택한다면 그림 9의 방법이 선택되어 마우스를 움직인 거리의 값을 선택하여 움직이면 면적의 합이 문제 그림의 P의 위치 변화와 함께 나타나므로 교사는 학생들과 함께 자료수집에 따라 길이 AP가 5일 때 넓이의 합이 가장 작아졌다 다시 증가하는 현상을 관찰하고 일반화의 식을 발견할 것이다.

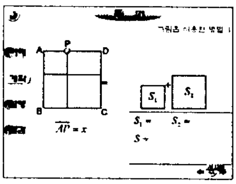


그림 10 : 전략 2-1

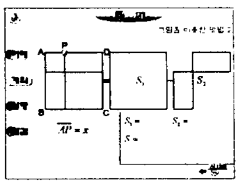


그림 11 : 전략 2-2

그림에 의한 방법 1을 택했다면 그림 10을, 그림에 의한 방법 2를 택했다면 그림 11을 계획하게 되는데 P점이 움직임에 따라 그림들이 역동적으로 따라 움직이므로 학생은 면적의 합의 식을 쉽게 세울 수 있다. 만약 학생이 산술-기하 평균을 이용하여 풀기를 원한다면 교사는 칠판 위에 학생과 함께 풀 수 있을 것이다. (이차함수 활용을 다루므로 이 방법은 프로그램에 포함하지 않았다.) 다음 계획 실행 단계에서는 각각의 계획 단계에서 택한 전략에 따라 구성한 식들을 풀도록 연결되어 화면은 이차식을 정리하여 표준식을 이끌도록 유도한다. 마지막 단계인 점검 단계에서는 문제의 그림, 식의 값, 그리고 이차함수 그래프가 동시에 보이고 그림 위의 P점을 움직여보면 다른 표상 위의 대응한 것이 함께 움직이므로 이 다수의 표상을 통해 학생은 자신의 문제해결을 반성해보고 틀린 부분이 없었는지 금방 확인해 볼 수 있다(그림 12 참조).

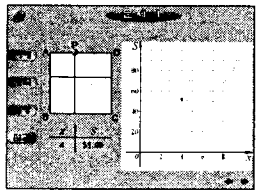


그림 12: 점 검

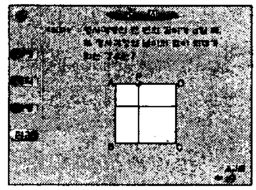


그림 13: 심화문제

또 최소 값을 갖는 변의 길이와 전체의 길이, 면적의 합간의 상관관계를 깨닫고 전체 정 사각형의 길이를 변수 “a”라 할 때 내부에 존재하는 두 정사각형의 면적의 합을 나타내는 이차함수 그래프의 관계식과 그 최소 값을 구하는 문제의 일반화한 경우를 생각해보고 교사는 이에 따른 새로운 문제를 제시할 수 있다.

2. 타 원

1) 개념과 원리를 위한 탐구학습

타원의 개념과 원리에서 두 정점(초점)이 x 축위에 있을 때와 y축위에 있을 때로 구분되어 있으므로 만약 x축위에 있을 때를 선택하여 시작하면 두 정점의 값과 두 정점으로부터 거리의 합을 자유로 변화시켜 타원의 자취를 역동적으로 관찰함으로 시각화를 통해 타원의 정의를 이해하고 타원의 방정식을 탐구할 수 있게 하였다. 즉, 학생은 두 정점의 값과 그들로부터

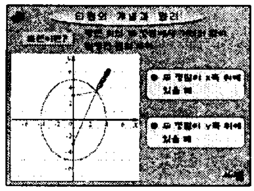


그림14 : 타원의 개념과 원리 1

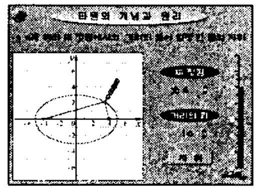


그림15 : 타원의 개념과 원리 2

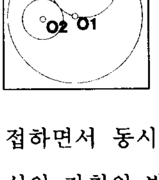
거리 합에 따른 다수의 표상을 통해 타원의 존재를 직관적으로 이해한 후 (예, 만약 두 정점이 0 으로 일치할 땐 원이 존재) 다음 스크린

으로 넘어가 타원의 정의를 통해 타원의 방정식을 구하도록 유도된다. 우선, (-4, 0)과 (4, 0)로부터 점 (x, y)까지 길이의 합이 10임을 선택하고 자취 위를 클릭하면 타원이 그려진다. 교사는 학생과 함께 길이의 합이 10이 되는 방정식을 세운 후 간단히 하여 타원의 방정식을 구할 수 있다. 또 다른 경우의 두 정점의 값과 길이 합을 선택하여 제 2의 타원의 방정식을 구할 수 있다.

이렇듯 학생이 타원의 방정식을 이해할 수 있을 때까지 교사는 새로운 환경을 계속 손쉽게 제공할 수 있으므로 무엇보다도 교사는 학생과 상호 작용을 통해 학생의 이해 정도를 잘 파악하고 학생에게 그 순간 가장 필요한 내용을 적절하게 제시할 수 있어야한다.

2) 문제 상황의 탐구학습

일반적으로 교과서는 타원에 대한 응용 문제가 그리 많지 않고 타원과 접선의 방정식으로 바로 넘어가 버리는 것이 보통이다. 다음 문제는 타원의 개념을 바탕으로 학생의 탐구, 추측을 요하고 시각화의 효과와 다수 표상을 제공하는 프로그램의 장점을 최대한 이용할 수 있어 학생의 문제해결 시간을 단축하며 문제해결력을 키울 수 있어 선택되었다.




문제: 좌표평면 위에 중심이 (2,0)이고 반지름이 7인 원 $O_1$과 중심이 (-2,0)이고 반지름이 1인 원 $O_2$가 있다. 원 $O_1$에 내접하면서 동시에 원 $O_2$에 외접하는 원들의 중심의 자취의 방정식을 구하여라.

원의 반지름이 1과 7인 두 원이 주어졌을 때 두 원에 동시에 접한 원들의 중심의 자취를 연구 조사하려한다. 문제이해 단계에서 프로그램은 다수의 접원이 존재함과 동시에 그 중심의 자취도 애니매이션 기법으로 보여주고 있다.

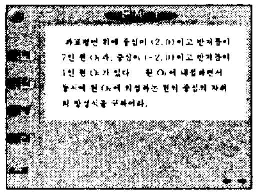


그림 16 : 문제제시

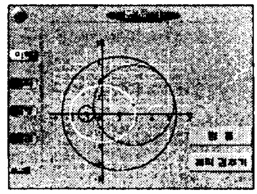


그림 17 : 문제이해

교사는 수업의 계획에 따라 자취를 보일 수도 있고 아예 학생에게 보여주지 않을 수도 있다. 만약 탐구 학습으로 학생에게 결과를 먼저 알게 하고 그 이유를 증명하게 하려면 자취를 보여 타원의 방정식을 구하도록 유도할 수 있다 (bottom to top 방식).

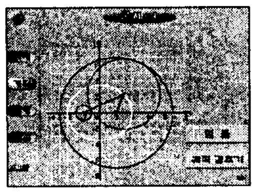


그림 18: 문제계획 1

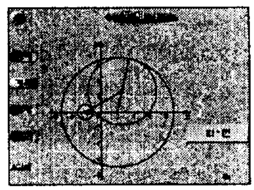


그림 19: 문제계획 2

문제 계획 단계에서 그림 18과 19를 이동하며 많은 탐구를 한 후 두 원의 반지름의 합이 일정함(타원의 정의)을 이용하여 식을 세울 계획을 한다. 계획 실행단계에서는 두 길이의 합이 8인 식을 세우고 이 식을 간단히 한다. 식과 방정식은 클릭하면 나타나게 되어 있어 교사 본인의 의도에 따라 칠판 판서로 학생들과 방정식을 풀이한 후 이 프로그램으로 확인하는 형식을 택해도 된다.

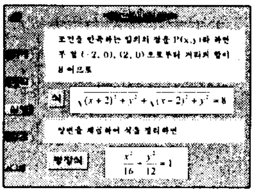


그림 20: 문제실행

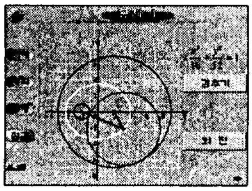


그림 21: 점검

점검과정에서는 자취는 초점이 (-2,0), (2,0)이고 a=4이고 b=$2\sqrt{3}$ 인 타원임을 타원의 방정식과 함께 재확인한다. 특히 이 문제를 토대로 만약 주어진 두 원 중 작은 원의 위치를 변화시켜 탐구학습을 할 수 있는 유사한 문제를 생각해 보고 또는 작은 원이 접한 원 밖에 있지 않고 접한 원의 내부에 있다면 또 어떤 자취를 갖게 될까 하는 새로운 문제로 확장하였다. 이 과정에서 일반화하는 수, 식을 통해 타원의 방정식을 재설명할 수 있다.

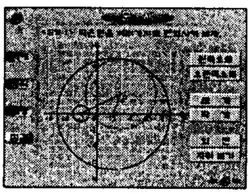


그림 22: 점검(심화 1)

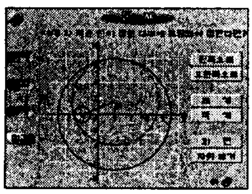


그림 23: 점검(심화 2)

# Ⅳ. 결 론

본 연구에서 개발된 프로그램은 학교 수학의 교수-학습에 몇 가지 장점을 지니고 있다. 학생과 교사 입장에서 이를 다음과 같이 요약할 수 있다.

**학생에게:**

1. 시각화(Visualization)

본 연구에서 시각화는 문제해결과정의 이해단계에서 가장 효과적으로 사용되었으며 그 이후 단계에서도 학생의 추상화를 돕는 도구로서 적절하게 사용되었다. 문제해결에 있어 매우 중요한 부분이지만 지필 학습만으로는 도저히 표현 불가능한 부분을 역동적인 프로그램의 장점을 통해 시각화함으로써 학생의 탐구 활동을 돕는 큰 이점이 있다. 타원 문제 1은 지필 학습으로는 두 원에 접하는 다수의 접 원이 존재한다는 가정 하에 타원의 방정식만을 구하느라 급급하는 매우 딱딱하고 재미없는 문제일 수 있으나 본 연구에서는 직접 존재하는 접 원의 자취를 애니매이션 기법을 통해 눈으로 확인해보고 탐구, 추측해볼 수 있기 때문에 직관력에 의한 문제해결의 용이함과 흥미를 가지고 더 나아가 심화 문제를 생각해보는 매우 깊이 있는 학습이 될 수 있다.

2. 문제 해결(Problem Solving)의 역동성의 극대화

본 연구의 역동성을 지닌 컴퓨터 프로그램은 각 단계 전후과정을 마우스를 클릭 함으로 자유롭게 왕래할 수 있어 문제해결 단계를 외워야하는 절차로서가 아니라 필요한 도구로서 언제든지 다시 방문하여 순환적이고 역동적인 문제해결과정을 통해 자신의 오류를 수정할 수 있다. 사실, Wilson, et al. (1993)의 문제해결의 역동성은 이 프로그램을 통해 잘 이행되었다고 볼 수 있다.

3. 능력 있는 문제해결자

이 프로그램의 목적은 역동성을 지닌 시각화를 효과적으로 사용하여 문제의 추상적 이해력을 키우는 것이므로 학생은 능력 있는 문제해결자가 된다. 학생이 문제해결 과정에서 오류를 범했다 할지라도 프로그램의 역동성으로 인해 용이하게 전 단계로 되돌아가 반성하고 수정할 기회를 충분히 가질 수 있다. 이러한 과정을 반복함으로써 학생은 스스로 자신의 오류를 분석하고 올바른 답을 이끌 수 있어 문제

를 해결할 수 있다는 자신감을 갖는다.

4. 점검의 중요한 학습활동 참여

프로그램이 인도하는 대로 교사가 직접 수업에서 문제해결의 단계마다 진행해가면서 학생들로 하여금 자연스럽게 점검과정에 종사하게 유도함으로 전 과정을 성실히 수행함과 동시에 점검의 중요한 학습활동도 참여하게 하여 문제 해결력을 돕는다. 특히 본 연구는 점검과정에서, 문제 내용의 시각화를 통해 다시 정리해봄으로써 문제의 의미를 구체화하고 문제로부터 배울 수 있는 중요한 기회가 되어 풀어온 문제의 답을 확장해보고 문제의 일반화를 요구하는 심화 문제를 제시할 수 있다.

**교사에게:**

1. 과정으로서, 교수법으로서 문제해결

본 프로그램은 수학 문제해결을 결과로서 보다는 과정(process)으로서 이해하고 묘사했다. Polya의 네 단계를 학습이 진행되는 과정으로 프로그램 하였기에 자연스럽게 학생은 문제해결 과정에 열중함으로써 얻어진 결과는 과정을 통한 당연한 결과로 인식할 뿐 답만 구하는 것을 학습의 목표로 여기지 않는다. 문제해결 활동에는 계산 기술에서 충분한 연습, 수식과 절차 사용, 개념사이의 관계성의 이해 도모 등을 포함하고 있어서 교사는 교수법으로서 문제해결을 수학적 개념과 원리를 소개할 때뿐만 아니라 개념과 원리를 응용하는 문제상황에도 사용할 수 있다.

2. 문제해결을 위한 학습모형 소개

대부분 교사들은 제한된 수업시간에 학생의 문제해결력을 키울 수 있는 방법을 알지 못하고, 단지 가능한 많은 문장제 문제를 제공하는 것이 그 학습목표를 달성할 수 있다고 믿는다. 그러나 본 프로그램은 교사에게 문제해결을 위한 학습 지도 법을 소개하고 있어 이차함수와 타원에서뿐만 아니라 다른 수학 내용에서도 참고할 수 있는 수업모형을 제시하고 있다.

3. 수업안 준비에서 어려움 해소

교사들이 수업 준비의 어려움을 갖는 주된 이유는 자료부족과 컴퓨터 사용에 대한 경험부족이다. 본 프로그램은 CD에 실려있어 교사는 컴퓨터에서 쉽게 열어 사용할 수 있다. 교사가 본 프로그램 사용에서 고려할 점은 어떻게, 언제 적절한 발문을 할 것인가?, 언제 칠판을 사용할 것인가?, 그리고 본 프로그램 내용에서 어떤 효과적인 예(상수등)를 선택할 것인가? 등이 될 것이다.

4. 문제해결의 성취도에 대한 다양한 평가 수단

프로그램에서 교사는 학생과 지속적인 의사 소통을 통해 문제해결의 과정을 진행해가므로 학생의 학습 성취도를 학습 절차상에서 쉽게 파악하여 학생에게 부족한 부분을 제공할 수 있다. 또한, 교사는 문제해결 단계별로 구성된 체크 리스트를 작성하여 형식적(formal) 평가를 위해 사용할 수 있다.

문제 해결력의 신장을 주요한 목표로 하는 제 7차 교육과정에 대비하여 대부분 교사들은 수업에서 어떻게 학생의 문제해결력을 육성해야할지 모르고 있다. 지금껏 그래왔듯이 문장제 문제가 문제해결력 신장의 유일한 길이라고 생각하여 문장제 문제만을 다룬다거나 또는 문제 해결과정을 수업에 도입한다 계획하고 앞서 선형적 모델에서 설명하였듯이 외워야하는 절차에 따라 문제를 풀어야 한다면 또 다른 짐을 지우게 되는 결과가 되어 학생들은 학습의 흥미를 잃을 것이다. 그러나 본 연구는 문제의

시각화로 인한 수학적 직관력을 통해 문제해결의 추상화를 용이하게 이끌어내어 학생의 흥미를 키우고, 교육 현장의 멀티미디어의 기기를 효율적으로 활용하여 문제해결력을 키우는 데 중점을 두었기 때문에 미래 지향적이며, 교수-학습의 목표(문제해결)를 달성할 수 있는 지도법을 제시하고 학생들과 상호작용을 통해 학생의 이해도를 평가할 수 있는 다양한 기회를 제공하여 교사의 어려움을 해소할 수 있으므로 앞으로 이러한 연구가 많이 이뤄져야 하겠다. 여러 가지 장점을 가진 본 프로그램을 교실 현장에서 직접 사용하여 그 효과를 조사 해보는 것은 차후 연구로써 권장할 만하다.

## 참고문헌


Bobango, J. (1988). Van Hiele Levels of Geometric Thought and Student Achievement in Standard Content and Poor Writing: The effect of phase based instruction. (Doctoral dissertation: The Pennsylvania State University, 1987). *Dissertation Abstracts International*, 48/10A, 2566

Cooney, T. (1988). The Issue of Reform. *Mathematics Teacher*, 80, 352-363.

Jacobson, D. (1975). *The Effect of Different Modes of Practice on Number Facts and Computational Abilities.* Unpublished manuscript, The University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action*, Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1973). *How to Solve it.* Princeton University Press. (Originally copyrighted in 1945)

Roman, R. A.(1975). *The Word Problem Program: Summative evaluation* (LRDC Publication 1975/23). University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center.

Roman, R. A. & Laudato,N.C.(1974). *Computer Assisted Instruction in Word Problems: Rationale and Design* (LRDC publication 1974/19). University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center.

Steen, L. (1987). Paper and Pencil Maths. *The Chronicle of Higher Education.*

Schwartz, J., & Yerushalmy, M.(1987). The Geometric Supposer: An Intellectual Processes for Making Conjectures, *College Math Journal*, 18, 58-65.

Suydam, M. (1987). Indications from Research on Problem Solving. In F. R.Curcio(Ed.), *Teaching and Learning: A problem solving focus.* Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

Wilson,J.W., Fernadez,M.L., & Hadaway, N.(1993). Mathematical Problem Solving. *Research Ideas for the Classroom, High School Mathematics.* New York:Macmillan Publishing Co.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes.* In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds. and Trans.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

# Development of Instructional Models for Problem Solving in Quadratic Functions and Ellipses

Ihn Sue Kim, Sang Sook Koh,
Young Jin Kim, Seung Jae Park

Recently, most classrooms in Korea are fully equipped with multimedia environments such as a powerful pentium pc, a 43″ large sized TV, and so on through the third renovation of classroom environments. However, there is not much software teachers can use directly in their teaching. Even with existing software such as GSP, and Mathematica, it turns out that it doesn't fit well in a large number of students in classrooms and with all written in English. The study is to analyze the characteristics of problem-solving process and to develop a computer program which integrates the instruction of problem solving into a regular math program in areas of quadratic functions and ellipses. Problem Solving in this study included two sessions: 1) Learning of basic facts, concepts, and principles; 2) problem solving with problem contexts. In the former, the program was constructed based on the definitions of concepts so that students can explore, conjecture, and discover such mathematical ideas as basic facts, concepts, and principles. In the latter, the Polya's 4 phases of problem-solving process contributed to designing of the program. In understanding of a problem, the program enhanced students' understanding with multiple, dynamic representations of the problem using visualization. The strategies used in making a plan were collecting data, using pictures, inductive, and deductive reasoning, and creative reasoning to develop abstract thinking. In carrying out the plan, students can solve the problem according to their strategies they planned in the previous phase. In looking back, the program is very useful to provide students an opportunity to reflect problem-solving process, generalize their solution and create a new in-depth problem. This program was well matched with the dynamic and oscillating Polya's problem-solving process. Moreover, students can facilitate their motivation to solve a problem with dynamic, multiple representations of the problem and become a powerful problem solver with confidence within an interactive computer environment. As a follow-up study, it is recommended to research the effect of the program in classrooms.